УДК 517.925.518

О РЕШЕНИЯХ СО СТЕПЕННОЙ АСИМПТОТИКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В. М. Евтухов

Одес. нац. ун-т
Украина, 65026, Одесса, ул. Дворянская, 2

В. Н. Шинкаренко

Одес. эконом. ун-т

We find necessary and sufficient conditions for binomial differential equations with exponential nonlinearity to possess solutions that have power asymptotics.

Встановлено необхідні і достатні умови існування розв'язків із степеневою асимптотикою двочленних диференціальних рівнянь з експоненціальною нелінійністю.

1. Формулировка основных результатов. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\left(|y^{(n-1)}|^{\lambda-1} y^{(n-1)}\right)' = \alpha_0\, p(t)\, e^{\sigma y}, \tag{1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\},\ \sigma, \lambda \in R \setminus \{0\},\ p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[\,, -\infty < a < \omega \le +\infty,$ — непрерывная функция.

При $n = 2$ такого вида уравнение появляется при изучении распределения электростатического потенциала в цилиндрическом объеме низкотемпературной плазмы. В этом частном случае вопрос об асимптотике его решений исследовался в работах [1 – 5]. В настоящей статье некоторые из результатов этих работ распространяются на общий случай $n \ge 2$. При этом удается получить результаты при более слабых ограничениях на коэффициент p.

Легко видеть, что каждое решение y уравнения (1), определенное в некоторой левой окрестности ω, либо имеет одно из свойств $\mathcal{P}_\omega^i$, $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$:

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = c_i \ne 0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{либо } 0; \\ \text{либо } \pm\infty \end{cases} \quad \text{при} \quad k = i+1, \ldots, n-1^1,$$

либо свойство $\mathcal{P}_\omega$:

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(n-1)}(t) \ne 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{либо } 0; \\ \text{либо } \pm\infty \end{cases} \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Ниже приводятся полученные для уравнения (1) результаты о существовании и асимптотике при $t \uparrow \omega$ решений со свойствами $\mathcal{P}_\omega^i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Они формулируются

[1] При $i = n - 1$ второе условие лишнее.

отдельно для каждого из случаев $\omega = +\infty$ и $\omega < +\infty$. Относящиеся к случаю $\omega < +\infty$ теоремы могут быть использованы и для описания асимптотики сингулярных решений уравнения (1) (по поводу определений сингулярных решений см. монографию И.Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурия [6, с. 262], гл. III, § 11).

Теорема 1. *Пусть* $\omega = +\infty$. *Если выполняется условие*

$$p^0_{n-1} = \liminf_{t\to+\infty} \frac{\ln p(t)}{t^{n-1}} > -\infty, \tag{2}$$

то уравнение (1) *не имеет решений со свойством* $\mathcal{P}^{n-1}_{+\infty}$, *для которых*

$$\frac{\sigma\, c_{n-1}}{(n-1)!} > -p^0_{n-1}. \tag{3}$$

Если же

$$p^1_{n-1} = \limsup_{t\to+\infty} \frac{\ln p(t)}{t^{n-1}} < +\infty, \tag{4}$$

то для любой постоянной $c_{n-1} \neq 0$, *удовлетворяющей неравенству*

$$\frac{\sigma\, c_{n-1}}{(n-1)!} < -p^1_{n-1}, \tag{5}$$

существуют решения со свойством $\mathcal{P}^{n-1}_{+\infty}$ *уравнения* (1), *причем для каждого из них при* $t \to +\infty$ *имеют место асимптотические представления*

$$y^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{c_{n-j} t^{n-k-j}}{(n-k-j)!} +$$

$$+ \frac{\alpha_0 |c_{n-1}|^{1-\lambda}}{\lambda} \int\limits_{+\infty}^{t} \int\limits_{+\infty}^{t_{n-k}} \cdots \int\limits_{+\infty}^{t_2} p(t_1) \exp\left[\sigma \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{n-j} t_1^{n-j}}{(n-j)!}\right] dt_1 \ldots dt_{n-k} [1 + o(1)], \tag{6}$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_{n-2}$ — *некоторые постоянные.*

Теорема 2. *Пусть* $\omega = +\infty$. *Если для некоторого* $i \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$ *выполняется условие*

$$\begin{aligned} p^0_i &= \liminf_{t\to+\infty} \frac{\ln p(t)}{t^i} > -\infty \quad \text{при} \quad \lambda > 0\,, \\ p^1_i &= \limsup_{t\to+\infty} \frac{\ln p(t)}{t^i} < +\infty \quad \text{при} \quad \lambda < 0\,, \end{aligned} \tag{7}$$

то уравнение (1) не имеет решений со свойством $\mathcal{P}^i_{+\infty}$, *для которых*

$$\frac{\sigma c_i}{i!} > -p^0_i \quad \text{при} \quad \lambda > 0\,, \qquad \frac{\sigma c_i}{i!} < -p^1_i \quad \text{при} \quad \lambda < 0\,. \tag{8}$$

Если же

$$p_i^1 = \limsup_{t\to+\infty} \frac{\ln p(t)}{t^i} < +\infty \quad \textit{при} \quad \lambda > 0\,,$$
$$p_i^0 = \liminf_{t\to+\infty} \frac{\ln p(t)}{t^i} > -\infty \quad \textit{при} \quad \lambda < 0\,, \tag{9}$$

то для любой постоянной $c_i \neq 0$, *удовлетворяющей неравенству*

$$\frac{\sigma c_i}{i!} < -p_i^1 \quad \textit{при} \quad \lambda > 0\,, \qquad \frac{\sigma c_i}{i!} > -p_i^0 \quad \textit{при} \quad \lambda < 0\,, \tag{10}$$

существуют решения со свойством $\mathcal{P}^i_{+\infty}$ *уравнения* (1), *причем для каждого из них при* $t \to +\infty$ *имеют место асимптотические представления*

$$y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{i-k} \frac{c_{i-j}\, t^{i-k-j}}{(i-k-j)!} +$$
$$+\ \mu_i \int\limits_{+\infty}^{t} \int\limits_{+\infty}^{t_{n-k}} \cdots \int\limits_{+\infty}^{t_3} \left| \int\limits_{A}^{t_2} p(t_1) \exp\left[\sigma \sum_{j=0}^{i} \frac{c_{i-j} t_1^{i-j}}{(i-j)!}\right] dt_1 \right|^{\frac{1}{\lambda}} dt_2 \ldots dt_{n-k}[1+o(1)],$$
$$k = 0, 1, \ldots, i,$$

$$y^{(k)}(t) = \mu_i \int\limits_{+\infty}^{t} \int\limits_{+\infty}^{t_{n-k}} \cdots \int\limits_{+\infty}^{t_3} \left| \int\limits_{A}^{t_2} p(t_1) \exp\left[\sigma \sum_{j=0}^{i} \frac{c_{i-j} t_1^{i-j}}{(i-j)!}\right]\, dt_1 \right|^{\frac{1}{\lambda}} dt_2 \ldots dt_{n-k}[1+o(1)],$$
$$k = i+1, \ldots, n-2,$$

$$y^{(n-1)}(t) = \mu_i \left| \int\limits_{A}^{t} p(t_1) \exp\left[\sigma \sum_{j=0}^{i} \frac{c_{i-j} t_1^{i-j}}{(i-j)!}\right]\, dt_1 \right|^{\frac{1}{\lambda}} [1+o(1)], \tag{11}$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_{i-1}$ — *некоторые постоянные,*

$$\mu_i = \alpha_0 \,\mathrm{sign} \int\limits_{A}^{t} p(\tau) \exp\left[\sigma \sum_{j=0}^{i} \frac{c_{i-j} \tau^{i-j}}{(i-j)!}\right] d\tau\,, \quad A = \begin{cases} +\infty & \textit{при } \lambda > 0; \\ a & \textit{при } \lambda < 0. \end{cases}$$

Теорема 3. *Для существования решений со свойством* $\mathcal{P}^0_{+\infty}$ *уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \int\limits_{t_n}^{+\infty} \cdots \int\limits_{t_3}^{+\infty} \left| \int\limits_{A}^{t_2} p(t_1) dt_1 \right|^{\frac{1}{\lambda}} dt_2 \ldots dt_n < +\infty, \tag{12}$$

где

$$A = \begin{cases} +\infty, & \textit{если } \int\limits_a^\infty p(\tau)d\tau < \infty; \\ \\ a\,, & \textit{если } \int\limits_a^\infty p(\tau)d\tau = \infty. \end{cases}$$

Более того, для каждого такого решения при $t \uparrow +\infty$ имеют место асимптотические представления

$$y(t) = c_0 + \mu_0 \int\limits_{+\infty}^{t} \int\limits_{+\infty}^{t_{n-1}} \cdots \int\limits_{+\infty}^{t_3} \left| \int\limits_A^{t_2} p(t_1)dt_1 \right|^{\frac{1}{\lambda}} dt_2 \ldots dt_{n-1}[1+o(1)],$$

$$y^{(k)}(t) = \mu_0 \int\limits_{+\infty}^{t} \int\limits_{+\infty}^{t_{n-k}} \cdots \int\limits_{+\infty}^{t_3} \left| \int\limits_A^{t_2} p(t_1)dt_1 \right|^{\frac{1}{\lambda}} dt_2 \ldots dt_{n-k}[1+o(1)], \quad k = 1,\ldots,n-2\,, \tag{13}$$

$$y^{(n-1)}(t) = \mu_0 \left| \int\limits_A^{t} p(t_1)dt_1 \right|^{\frac{1}{\lambda}} [1+o(1)],$$

где

$$\mu_0 = \alpha_0\, e^{\frac{\sigma}{\lambda} c_0} \operatorname{sign} \int\limits_A^t p(\tau)d\tau.$$

Замечание 1. Теорема 3 остается справедливой и в случае, когда в условии $\mathcal{P}^0_{+\infty}$ постоянная $c_0 = 0$, т. е. для решений со свойством $\mathcal{P}_{+\infty}$, которые удовлетворяют условию $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

Далее, сформулируем теоремы, относящиеся к случаю $\omega < +\infty$.

Теорема 4. *Пусть $\omega < +\infty$. Тогда для существования решений со свойством $\mathcal{P}^{n-1}_\omega$ уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int\limits_a^\omega p(\tau)d\tau < +\infty.$$

Более того, для каждого такого решения при $t \uparrow \omega$ имеют место асимптотические представления

$$y^{(k)}(t) = \sum_{m=k}^{n-1} \frac{c_m (t-\omega)^{m-k}}{(m-k)!} + \frac{\alpha_0\, e^{\sigma c_0} |c_{n-1}|^{1-\lambda}}{\lambda} \int\limits_\omega^t \int\limits_\omega^{t_{n-k}} \cdots \int\limits_\omega^{t_2} p(t_1)dt_1 dt_2 \ldots dt_{n-k}[1+o(1)],$$

$$k = 0,1,\ldots,n-1\,,$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_{n-2}$ *— некоторые постоянные.*

Теорема 5. *Пусть* $\omega < +\infty$. *Тогда для существования решений со свойством* $\mathcal{P}_\omega^i$, $i \in \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, *уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int\limits_b^\omega \int\limits_{A_{n-i-1}}^{t_{n-i}} \cdots \int\limits_{A_2}^{t_3} \left| \int\limits_{A_1}^{t_2} p(t_1) dt_1 \right|^{\frac{1}{\lambda}} dt_2 \ldots dt_{n-i} < +\infty,$$

где пределы интегрирования $A_{n-k},\ k = i+1, \ldots, n-1$, *выбраны следующим образом:*

$$A_1 = \begin{cases} a, & \text{если} \displaystyle\int\limits_a^\omega p(\tau)\, d\tau = +\infty; \\ \omega, & \text{если} \displaystyle\int\limits_a^\omega p(\tau)\, d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$A_{n-k} = \begin{cases} b, & \text{если} \displaystyle\int\limits_b^\omega \int\limits_{A_{n-k-1}}^{t_{n-k}} \cdots \int\limits_{A_2}^{t_3} \left| \int\limits_{A_1}^{t_2} p(t_1) dt_1 \right|^{\frac{1}{\lambda}} dt_2 \ldots dt_{n-k} = \pm\infty; \\ \omega, & \text{если} \displaystyle\int\limits_b^\omega \int\limits_{A_{n-k-1}}^{t_{n-k}} \cdots \int\limits_{A_2}^{t_3} \left| \int\limits_{A_1}^{t_2} p(t_1) dt_1 \right|^{\frac{1}{\lambda}} dt_2 \ldots dt_{n-k} = \mathrm{const}\,, \end{cases}$$

$k = i+1, \ldots, n-2,\ b$ *— произвольное число из промежутка* $]a, \omega[$.

Более того, для каждого такого решения при $t \uparrow \omega$ *имеют место асимптотические представления*

$$y^{(k)}(t) = \sum_{m=k}^{i} \frac{c_m (t-\omega)^{m-k}}{(m-k)!} +$$

$$+ \mu_i \int\limits_\omega^t \int\limits_\omega^{t_{n-k}} \ldots \int\limits_\omega^{t_{n-i+1}} \int\limits_{A_{n-i-1}}^{t_{n-i}} \int\limits_{A_{n-i-2}}^{t_{n-i-1}} \cdots \int\limits_{A_2}^{t_3} \left| \int\limits_{A_1}^{t_2} p(t_1) dt_1 \right|^{\frac{1}{\lambda}} dt_2 \ldots dt_{n-k} [1 + o(1)],$$

$$k = 0, 1, \ldots, i\,,$$

$$y^{(k)}(t) = \mu_i \int\limits_{A_{n-k}}^{t} \int\limits_{A_{n-k-1}}^{t_{n-k}} \cdots \int\limits_{A_2}^{t_3} \left| \int\limits_{A_1}^{t_2} p(t_1)dt_1 \right|^{\frac{1}{\lambda}} dt_2 \ldots dt_{n-k}[1+o(1)], \quad k = i+1, \ldots, n-2,$$

$$y^{(n-1)}(t) = \mu_i \left| \int\limits_{A_1}^{t} p(t_1)dt_1 \right|^{\frac{1}{\lambda}} [1+o(1)],$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_{i-1}$ *— некоторые постоянные,* $\mu_i = \alpha_0\, e^{\frac{\sigma\, c_0}{\lambda}} \operatorname{sign} \int\limits_{A_1}^{t} p(\tau)d\tau.$

Замечание 2. Теорема 5 при $i = 0$ остается справедливой и в случае, когда в условии $\mathcal{P}_\omega^0$ постоянная $c_0 = 0$. В этом случае она касается решений со свойством $\mathcal{P}_\omega$, которые удовлетворяют условию $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y(t) = 0$.

2. Доказательства теорем. При доказательстве теорем из первого пункта нам потребуется одно вспомогательное утверждение о существовании исчезающих при $t \uparrow \omega$ решений системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dz_i}{dt} &= \frac{\varphi'_{i-1}(t)}{\varphi_{i-1}(t)}[z_{i+1} - z_i], \qquad i = 1, \ldots, n-1, \\ \frac{dz_n}{dt} &= \frac{\varphi'_{n-1}(t)}{\varphi_{n-1}(t)} \left[f(t) + \sum_{i=1}^{n} h_i(t) z_i + g(t) Z(t, z_1, z_2, \ldots, z_n) \right], \end{aligned} \tag{14}$$

где $\varphi_{i-1} : [\alpha, \omega[\longrightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$ $i = 1, \ldots, n,$ — непрерывно дифференцируемые функции, $f, g : [\alpha, \omega[\longrightarrow \mathbf{R},$ $h_i : [\alpha, \omega[\longrightarrow \mathbf{R},$ $i = 1, \ldots, n,$ и $Z : [\alpha, \omega[\times \mathbf{R}_b^n \longrightarrow \mathbf{R}$ — непрерывные функции,

$$\mathbf{R}_b^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{R}^n \,:\, |z_i| \le b,\ i = 1, \ldots, n\},$$

причем $Z(t, 0, \ldots, 0) = 0$ при $t \in [\alpha, \omega[$.

Лемма 1. *Пусть функция* Z *имеет на множестве* $[\alpha, \omega[\times \mathbf{R}_b^n$ *частные производные по переменным* $z_1, \ldots, z_n$ *и такова, что*

$$\frac{\partial Z(t, z_1, \ldots, z_n)}{\partial z_i} \longrightarrow 0,\ i = 1, \ldots, n, \quad \textit{при} \quad |z_1| + \ldots + |z_n| \to 0$$

равномерно по $t \in [\alpha, \omega[$. *Пусть, кроме того, выполняются условия*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \varphi_{i-1}(t) = \begin{cases} \textit{либо} \quad 0; \\ \textit{либо} \quad \pm\infty, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} f(t) = 0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} h_i(t) = 0,\ i = 1, \ldots, n-1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} h_n(t) = \mathrm{const} \ne 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} g(t) = \mathrm{const}.$$

Тогда система дифференциальных уравнений (14) имеет по крайней мере одно решение $(z_i)_{i=1}^n : [t_0, \omega[\longrightarrow \mathbf{R}_b^n$, $t_0 \in [\alpha, \omega[$, *стремящееся к нулю при* $t \uparrow \omega$.

Справедливость этого утверждения непосредственно вытекает из следствия 2.4 работы [7].

Доказательство теоремы 1. Допустим, что уравнение (1) имеет решение $y : [t_0, +\infty[\longrightarrow \longrightarrow \mathbf{R}$, $t_0 \in [a, +\infty[$, со свойством $\mathcal{P}_{+\infty}^{n-1}$. Тогда

$$y^{(k)}(t) \sim \frac{c_{n-1} t^{n-k-1}}{(n-k-1)!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad \text{при} \quad t \to +\infty, \tag{15}$$

где c_{n-1} — некоторая отличная от нуля постоянная, и поэтому в силу (1) получаем

$$y^{(n)}(t) = \frac{\alpha_0 \, |c_{n-1}|^{1-\lambda}}{\lambda} p(t)[1 + o(1)] \exp\left\{ \frac{\sigma \, c_{n-1} \, t^{n-1}}{(n-1)!} [1 + o(1)] \right\} \quad \text{при} \quad t \to +\infty \,,$$

или

$$y^{(n)}(t) =$$

$$= \frac{\alpha_0 \, |c_{n-1}|^{1-\lambda}}{\lambda} [1 + o(1)] \exp\left\{ t^{n-1} \left[\frac{\ln p(t)}{t^{n-1}} + \frac{\sigma c_{n-1}}{(n-1)!} + o(1) \right] \right\} \ \text{при}\, t \to +\infty \,. \tag{16}$$

Отсюда в случае выполнения условий (2) и (3) следует, что

$$y^{(n-1)}(t) \longrightarrow \pm\infty \quad \text{при} \quad t \longrightarrow +\infty,$$

но это противоречит (15) при $k = n-1$. Значит, при условии (2) уравнение (1) не имеет решений со свойством $\mathcal{P}_{+\infty}^{n-1}$, для которых постоянная c_{n-1} удовлетворяет неравенству (3).

Если же выполняются условия (4) и (5), то из (16) для y получаем асимптотические представления вида

$$y^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{c_{n-j} t^{n-k-j}}{(n-k-j)!} +$$

$$+ \ \frac{\alpha_0 |c_{n-1}|^{1-\lambda}}{\lambda} \int\limits_{+\infty}^{t} \int\limits_{+\infty}^{t_{n-k}} \cdots \int\limits_{+\infty}^{t_2} p(t_1) \exp\left\{ \frac{\sigma \, c_{n-j} t_1^{n-1}}{(n-1)!} [1 + o(1)] \right\} dt_1 \ldots dt_{n-k} [1 + o(1)],$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_{n-2}$ — некоторые постоянные.

Принимая их во внимание, в силу (1) имеем

$$y^{(n)}(t) = \frac{\alpha_0 \, |c_{n-1}|^{1-\lambda}}{\lambda} p(t)[1+o(1)] \exp\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{c_{n-j} t^{n-j}}{(n-j)!}\right] \quad \text{при} \quad t \to +\infty .$$

Отсюда с учетом (4) и (5) получаем представления (6).

Таким образом, установлено, что если уравнение (1) при выполнении условия (4) имеет решение со свойством $\mathcal{P}_{+\infty}^{n-1}$, для которого постоянная c_{n-1} удовлетворяет неравенству (5), то это решение допускает асимптотические представления (6).

Допустим теперь, что выполняется условие (4), и выясним вопрос о фактическом существовании решений уравнения (1), допускающих асимптотические представления вида (6).

Выберем произвольным образом постоянную $c_{n-1} \neq 0$, удовлетворяющую неравенству (5), и постоянные $c_0, c_1, \ldots, c_{n-2} \in \mathbf{R}$. После этого уравнение (1) с помощью преобразования

$$y^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{c_{n-j} t^{n-k-j}}{(n-k-j)!} + \frac{\alpha_0 |c_{n-1}|^{1-\lambda}}{\lambda} \varphi_k(t)[1+z_{k+1}(t)], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{17}$$

где

$$\varphi_k(t) = \int\limits_{+\infty}^{t} \int\limits_{+\infty}^{t_{n-k}} \cdots \int\limits_{+\infty}^{t_2} p(t_1) \exp\left[\sigma \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{n-j} t_1^{n-j}}{(n-j)!}\right] dt_1 \ldots dt_{n-k}, \tag{18}$$

сведем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} z_k' &= \frac{\varphi_{k-1}'(t)}{\varphi_{k-1}(t)} [z_{k+1} - z_k], \qquad k = 1, \ldots, n-1, \\ z_n' &= \frac{\varphi_{n-1}'(t)}{\varphi_{n-1}(t)} \left[f(t) + h_1(t) z_1 + h_n(t) z_n + g(t) Z(t, z_1, z_n) \right], \end{aligned} \tag{19}$$

в которой

$$f(t) = g(t) - 1, \quad g(t) = \left| 1 + \frac{\alpha_0 \, |c_{n-1}|^{1-\lambda} \varphi_{n-1}(t)}{\lambda \, c_{n-1}} \right|^{1-\lambda} \exp\left[\frac{\alpha_0 \, \sigma |c_{n-1}|^{1-\lambda} \varphi_0(t)}{\lambda}\right],$$

$$h_1(t) = \frac{\alpha_0 \, \sigma |c_{n-1}|^{1-\lambda}}{\lambda} g(t) \varphi_0(t), \quad h_n(t) = \frac{\alpha_0 (1-\lambda) |c_{n-1}|^{1-\lambda} g(t) \varphi_{n-1}(t)}{\lambda \, c_{n-1} + \alpha_0 \, |c_{n-1}|^{1-\lambda} \varphi_{n-1}(t)} - 1,$$

$$\begin{aligned} Z(t, z_1, z_n) = &\left| 1 + \frac{\alpha_0 |c_{n-1}|^{1-\lambda} \varphi_{n-1}(t) z_n}{\lambda \, c_{n-1} + \alpha_0 \, |c_{n-1}|^{1-\lambda} \varphi_{n-1}(t)} \right|^{1-\lambda} \exp\left[\frac{\alpha_0 \, \sigma |c_{n-1}|^{1-\lambda}}{\lambda} \varphi_0(t) z_1\right] - \\ &- 1 - \frac{\alpha_0 \, \sigma |c_{n-1}|^{1-\lambda} \varphi_0(t)}{\lambda} \, z_1 - \frac{\alpha_0 (1-\lambda) |c_{n-1}|^{1-\lambda} \varphi_{n-1}(t)}{\lambda \, c_{n-1} + \alpha_0 \, |c_{n-1}|^{1-\lambda} \varphi_{n-1}(t)} \, z_n. \end{aligned}$$

В силу условий (4) и (5) функции φ_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, из (18) отличны от нуля на промежутке $[a, +\infty[$ и удовлетворяют условиям

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi_k(t) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{20}$$

Поэтому в (19)

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0, \quad \lim_{t \to +\infty} g(t) = 1, \quad \lim_{t \to +\infty} h_1(t) = 0, \quad \lim_{t \to +\infty} h_n(t) = -1.$$

С учетом (20) подберем число $t_0 > a$ настолько большим, чтобы

$$\frac{\alpha_0 |c_{n-1}|^{1-\lambda} \varphi_{n-1}(t)}{\lambda\, c_{n-1} + \alpha_0\, |c_{n-1}|^{1-\lambda} \varphi_{n-1}(t)} < 1 \quad \text{при} \quad t \geq t_0.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{\partial Z(t, z_1, z_n)}{\partial z_i} \longrightarrow 0, \quad i = 1, n, \quad \text{при} \quad |z_1| + |z_n| \longrightarrow 0$$

равномерно по $t \in [t_0, +\infty[$.

Значит, для системы (19) на множестве $[t_0, +\infty[\times \mathbf{R}_1^n$ выполнены все условия леммы 1. Согласно этой лемме система дифференциальных уравнений (19) имеет хотя бы одно решение $(z_k)_{k=1}^n : [t_1, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}_1^n$, $t_1 \geq t_0$, стремящееся к нулю при $t \to +\infty$. Этому решению в силу замен (17) соответствует решение $y : [t_1, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ уравнения (1), допускающее при $t \to +\infty$ асимптотические представления (6). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что уравнение (1) имеет решение $y : [t_0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$, $t_0 \in [a, +\infty[$, со свойством $\mathcal{P}_{+\infty}^i$, где $i \in \{1, \ldots, n-2\}$. Тогда для этого решения

$$\begin{gathered} y^{(k)}(t) \sim \frac{c_i\, t^{i-k}}{(i-k)!}, \qquad k = 0, 1, \ldots, i, \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \\ \lim_{t \to +\infty} y^{(k)}(t) = 0, \qquad k = i+1, \ldots, n-1, \end{gathered} \tag{21}$$

где c_i — некоторая отличная от нуля вещественная постоянная. Поэтому из (1) следует

$$\left| y^{(n-1)}(t) \right|^{\lambda - 1} y^{(n-1)}(t) = \alpha_0 \int_{A_0}^{t} p(\tau) \exp\left(\frac{\sigma\, c_i\, \tau^i}{i!} [1 + o(1)] \right) d\tau \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

где

$$A_0 = \begin{cases} t_0, & \text{если} \quad \displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} p(\tau) \exp\left(\frac{\sigma\, c_i\, \tau^i}{i!} [1 + o(1)] \right) d\tau = +\infty; \\[2ex] +\infty, & \text{если} \quad \displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} p(\tau) \exp\left(\frac{\sigma\, c_i\, \tau^i}{i!} [1 + o(1)] \right) d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$y^{(n-1)}(t) = \mu \left| \int_{A_0}^{t} p(\tau) \exp\left(\frac{\sigma\, c_i\, \tau^i}{i!} [1 + o(1)] \right) d\tau \right|^{\frac{1}{\lambda}}, \tag{22}$$

где

$$\mu = \operatorname{sign} \left[\alpha \int_{A_0}^{t} p(\tau) \exp\left(\frac{\sigma\, c_i\, \tau^i}{i!} [1 + o(1)] \right) d\tau \right].$$

Поскольку при $\tau \to +\infty$

$$p(\tau) \exp\left(\frac{\sigma\, c_i\, \tau^i}{i!} [1 + o(1)] \right) = \exp\left(\tau^i \left[\frac{\ln p(\tau)}{\tau^i} + \frac{\sigma\, c_i}{i!} + o(1) \right] \right), \tag{23}$$

в случае выполнения условий (7), (8) представление (22) противоречит (21) при $k = n - 1$. Следовательно, при выполнении условия (7) уравнение (1) не имеет решений со свойством $\mathcal{P}^i_{+\infty}$, для которых постоянная c_i удовлетворяет неравенству (8).

Если же выполняется условие (9) и постоянная c_i удовлетворяет неравенству (10), то ввиду (23)

$$A_0 = \begin{cases} t_0 & \text{при} \quad \lambda < 0; \\ +\infty & \text{при} \quad \lambda > 0 \end{cases}$$

и для любых $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ и $t_y > t_0$

$$\int_{t_y}^{+\infty} \int_{t_{n-k}}^{+\infty} \dots \int_{t_3}^{+\infty} \left| \int_{A_0}^{t_2} p(t_1) \exp\left(\frac{\sigma\, c_i\, t_1^i}{i!} [1 + o(1)] \right) dt_1 \right|^{\frac{1}{\lambda}} dt_2 \dots dt_{n-k} < +\infty.$$

Поэтому из (22) с учетом того, что y является решением со свойством $\mathcal{P}^i_{+\infty}$ уравнения (1), при $t \to +\infty$ получаем асимптотические представления

$$y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{i-k} \frac{c_{i-j}\, t^{i-k-j}}{(i-k-j)!} +$$

$$+ \mu \int\limits_{+\infty}^{t} \int\limits_{+\infty}^{t_{n-k}} \cdots \int\limits_{+\infty}^{t_3} \left| \int\limits_{A_0}^{t_2} p(t_1) \exp\left(\frac{\sigma c_i\, t_1^i}{i!} [1 + o(1)] \right) dt_1 \right|^{\frac{1}{\lambda}} dt_2 \ldots dt_{n-k},$$

$$k = 0, 1, \ldots, i,$$

$$y^{(k)}(t) =$$

$$= \mu \int\limits_{+\infty}^{t} \int\limits_{+\infty}^{t_{n-k}} \cdots \int\limits_{+\infty}^{t_3} \left| \int\limits_{A_0}^{t_2} p(t_1) \exp\left(\frac{\sigma c_i\, t_1^i}{i!} [1 + o(1)] \right) dt_1 \right|^{\frac{1}{\lambda}} dt_2 \ldots dt_{n-k},$$

$$k = i + 1, \ldots, n - 2,$$

$$y^{(n-1)}(t) = \mu \left| \int\limits_{A_0}^{t} p(t_1) \exp\left(\frac{\sigma c_i\, t_1^i}{i!} [1 + o(1)] \right) dt_1 \right|^{\frac{1}{\lambda}},$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_{i-1}$ — некоторые вещественные постоянные. Подставляя теперь найденное для $y(t)$ представление в правую часть уравнения (1) и повторяя приведенные выше рассуждения, получаем уточнения этих асимптотических представлений в виде (11).

Тем самым показано, что если уравнение (1) при выполнении условия (9) имеет решения со свойством $\mathcal{P}^i_{+\infty}$, для которых постоянная c_i удовлетворяет неравенству (10), то каждое из них допускает при $t \to +\infty$ асимптотические представления (11). Значит, остается лишь выяснить вопрос о фактическом существовании решений с представлениями (11) уравнения (1).

Допустим, что выполняется условие (9). Выбрав произвольным образом постоянную $c_i \neq 0$, удовлетворяющую неравенству (10), а также постоянные $c_0, c_1, \ldots, c_{i-1} \in \mathbf{R}$, уравнение (1) с помощью преобразования

$$\begin{aligned} y^{(k)}(t) &= \sum_{j=0}^{i-k} \frac{c_{i-j}\, t^{i-k-j}}{(i-k-j)!} + \mu_i \varphi_k(t)[1 + z_{k+1}(t)], \quad k = 0, 1, \ldots, i, \\ y^{(k)}(t) &= \mu_i \varphi_k(t)[1 + z_{k+1}(t)], \quad k = i + 1, \ldots, n - 1, \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$\varphi_k(t) = \int\limits_{+\infty}^{t}\int\limits_{+\infty}^{t_{n-k}}\cdots\int\limits_{+\infty}^{t_3}\left|\int\limits_{A}^{t_2} p(t_1)\exp\left[\sigma\sum_{j=0}^{i}\frac{c_{i-j}t_1^{i-j}}{(i-j)!}\right]dt_1\right|^{\frac{1}{\lambda}} dt_2\dots dt_{n-k},$$

$$k = 0, 1, \dots, n-2,$$

$$\varphi_{n-1}(t) = \left|\int\limits_{A}^{t} p(t_1)\exp\left[\sigma\sum_{j=0}^{i}\frac{c_{i-j}t_1^{i-j}}{(i-j)!}\right]dt_1\right|^{\frac{1}{\lambda}},$$

сведем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} z_k' &= \frac{\varphi_{k-1}'(t)}{\varphi_{k-1}(t)}[z_{k+1}-z_k], \qquad k = 1,\dots,n-1,\\ z_n' &= \frac{\varphi_{n-1}'(t)}{\varphi_{n-1}(t)}\left[f(t)+h_1(t)z_1+h_n(t)z_n+g(t)Z(t,z_1,z_n)\right], \end{aligned} \tag{25}$$

в которой

$$f(t) = g(t)-1, \quad g(t) = \mathbf{e}^{\sigma\mu_i\varphi_0(t)},$$

$$h_1(t) = \sigma\mu_i g(t)\varphi_0(t), \quad h_n(t) = -1+(1-\lambda)g(t),$$

$$Z(t,z_1,z_n) = |1+z_n|^{1-\lambda}\mathbf{e}^{\sigma\mu_i\varphi_0(t)z_1} - 1 - (1-\lambda)z_n - \sigma\mu_i\varphi_0(t)z_1.$$

Здесь в силу условий (9), (10) и указанного выбора предела интегрирования A $\varphi_0(t)\to 0$ при $t\to+\infty$, и поэтому

$$\lim_{t\to+\infty} h_n(t) = -\lambda \neq 0, \quad \lim_{t\to+\infty} f(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} h_1(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} g(t) = 1.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial Z(t,z_1,z_n)}{\partial z_i} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad |z_1|+|z_n| \longrightarrow 0 \quad \text{равномерно по} \quad t\in[t_0,+\infty[,$$

где $t_0 \in [a,+\infty[$. Следовательно, для системы уравнений (25) выполнены условия леммы 1. На основании этой леммы система дифференциальных уравнений (25) имеет хотя бы одно решение $(z_i)_{i=1}^n : [t_0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}^n$, $t_0\in[a,+\infty[$, стремящееся к нулю при $t\to\to+\infty$. В силу замен (24) ему соответствует решение y уравнения (1), допускающее при $t\to+\infty$ асимптотические представления (11).

Доказательство теоремы 3. Пусть $y : [t_0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R},\ t_0 \in [a, +\infty[,$ — решение уравнения (1) со свойством $\mathcal{P}^0_{+\infty}$. Тогда в силу (1)

$$\left| y^{(n-1)}(t) \right|^{\lambda-1} y^{(n-1)}(t) = \alpha_0 \, e^{\sigma \, c_0} \int\limits_A^t p(\tau) d\tau [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty \,,$$

где c_0 — некоторая вещественная постоянная, A указано в формулировке теоремы. Отсюда следует

$$\operatorname{sign} y^{(n-1)}(t) = \alpha_0 \operatorname{sign} \int\limits_A^t p(\tau) d\tau$$

и поэтому

$$y^{(n-1)}(t) = \mu_0 \left| \int\limits_A^t p(\tau)\, d\tau \right|^{\frac{1}{\lambda}} [1 + o(1)] \qquad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

где $\mu_0 = \alpha_0 \, e^{\sigma c_0} \operatorname{sign} \int\limits_A^t p(\tau)\, d\tau$. Данное представление, очевидно, не противоречит определению решения со свойством $\mathcal{P}^0_{+\infty}$ лишь в случае, когда выполняется условие (12). При этом из него вытекают асимптотические представления (13).

Таким образом, остается лишь выяснить вопрос о фактическом существовании при выполнении условия (12) решений со свойством $\mathcal{P}^0_{+\infty}$ уравнения (1), для которых имеют место асимптотические представления (13).

Выберем произвольным образом вещественную постоянную c_0 и, предположив выполненным условие (12), сведем уравнение (1) с помощью замен

$$\begin{gathered} y(t) = c_0 + \mu_0 \varphi_0(t)[1 + z_1(t)], \\ y^{(k)}(t) = \mu_0 \varphi_k(t)[1 + z_{k+1}(t)], \qquad k = 1, \ldots, n-1, \end{gathered} \tag{26}$$

где

$$\varphi_k(t) = \int\limits_{+\infty}^{t} \int\limits_{+\infty}^{t_{n-k}} \cdots \int\limits_{+\infty}^{t_3} \left| \int\limits_A^{t_2} p(t_1)\, dt_1 \right|^{\frac{1}{\lambda}} dt_2 \ldots dt_{n-k}, \qquad k = 0, \ldots, n-2,$$

$$\varphi_{n-1}(t) = \left| \int\limits_A^t p(t_1)\, dt_1 \right|^{\frac{1}{\lambda}},$$

к системе дифференциальных уравнений

$$z_k' = \frac{\varphi_{k-1}'(t)}{\varphi_{k-1}(t)}[z_{k+1} - z_k], \qquad k = 1, \ldots, n-1,$$

$$z_n' = \frac{\varphi_{n-1}'(t)}{\varphi_{n-1}(t)}\left[f(t) + h_1(t)z_1 + h_n(t)z_n + g(t)Z(t, z_1, z_n)\right],$$

в которой

$$f(t) = g(t) - 1, \qquad g(t) = \mathbf{e}^{\mu_0\varphi_0(t)},$$

$$h_1(t) = \mu_0 g(t)\varphi_0(t), \qquad h_n(t) = -1 + (1-\lambda)g(t),$$

$$Z(t, z_1, z_n) = |1 + z_n|^{1-\lambda}\mathbf{e}^{\mu_0\varphi_0(t)z_1} - 1 - (1-\lambda)z_n - \mu_0\varphi_0(t)z_1.$$

Эта система дифференциальных уравнений является точно такой же, как и рассмотренная при доказательстве теоремы 2 система (25). Поэтому на основании леммы 1 она имеет хотя бы одно решение $(z_i)_{i=1}^n : [t_0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}^n,\ t_0 \in [a, +\infty[$, стремящееся к нулю при $t \to +\infty$, которому в силу замен (26) соответствует решение y уравнения (1), допускающее при $t \to +\infty$ асимптотические представления (13).

Доказательства теорем 4, 5 проводятся аналогично предыдущим с тем лишь отличием, что здесь ввиду условия $\lim\limits_{t\uparrow\omega}(t - \omega) = 0$ не возникает необходимости повторного уточнения получаемых на первом этапе доказательства асимптотических представлений для решений со свойствами $\mathcal{P}_\omega^i$, $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

3. Случай степенного коэффициента $p(t)$. В качестве примера, иллюстрирующего полученные выше результаты, рассмотрим при $t \in]0, +\infty[$ дифференциальное уравнение

$$\left(|y^{(n-1)}|^{\lambda-1}y^{(n-1)}\right)' = a\, t^\gamma e^{\sigma y}, \tag{27}$$

где $a,\ \lambda,\ \sigma \in \mathbf{R} \setminus \{0\},\ \gamma \in \mathbf{R}$.

Поскольку в данном случае для любого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln p(t)}{t^i} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln|a| + \gamma\ln t}{t^i} = 0,$$

из теорем 1 – 3 непосредственно вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. *Для любой постоянной c_{n-1}, удовлетворяющей неравенству $\sigma c_{n-1} < 0$, и любых $c_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, \ldots, n-2$, уравнение (27) имеет решение со свойством $\mathcal{P}_{+\infty}^{n-1}$, допускающее при $t \to +\infty$ асимптотические представления*

$$y^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{c_{n-j}\, t^{n-k-j}}{(n-k-j)!} + \mu_{n-1k} t^{\gamma-(n-k)(n-2)} \exp\left[\sigma \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{n-j}\, t^{n-j}}{(n-j)!}\right][1 + o(1)], \tag{28}$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где

$$\mu_{n-1k} = \frac{a\,(-1)^{n-k}|c_{n-1}|^{1+k-n-\lambda}}{\lambda}\left|\frac{(n-2)!}{\sigma}\right|^{n-k}.$$

Более того, решений со свойством $\mathcal{P}_{+\infty}^{n-1}$, *отличных от допускающих представления* (28), *уравнение* (27) *не имеет.*

Следствие 2. *Для каждого* $i \in \{1,\ldots,n-2\}$ *и любых постоянных* $c_k \in \mathbf{R}$, $k = 1,\ldots,i$, *где* $\sigma\lambda c_i < 0$, *уравнение (27) имеет решение со свойством* $\mathcal{P}_{+\infty}^{i}$, *допускающее при* $t \to +\infty$ *асимптотические представления*

$$y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{i-k}\frac{c_{i-j}\,t^{i-k-j}}{(i-k-j)!} + \mu_{ik}t^{\frac{\gamma-(i-1)[1+\lambda(n-k-1)]}{\lambda}}\exp\left[\frac{\sigma}{\lambda}\sum_{j=0}^{i}\frac{c_{i-j}\,t^{i-j}}{(i-j)!}\right][1+o(1)],$$

$$k = 0,1,\ldots,i,$$

$$y^{(k)}(t) = \mu_{ik}t^{\frac{\gamma-(i-1)[1+\lambda(n-k-1)]}{\lambda}}\exp\left[\frac{\sigma}{\lambda}\sum_{j=0}^{i}\frac{c_{i-j}\,t^{i-j}}{(i-j)!}\right][1+o(1)], \qquad k = i+1,\ldots,n-1,$$

где

$$\mu_{ik} = (-1)^{n-k}[\mathrm{sign}(a\lambda)]|a|^{\frac{1}{\lambda}}|\lambda|^{n-k-1}\left|\frac{(i-1)!}{c_i\sigma}\right|^{\frac{1}{\lambda}+n-k-1}.$$

Более того, решений со свойством $\mathcal{P}_{+\infty}^{i}$, *отличных от решений такого вида, уравнение (27) не имеет.*

Следствие 3. *Для существования решений уравнения(27), удовлетворяющих условию* $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = c_0 = \mathrm{const}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\lambda[\gamma+1+\lambda(n-1)] < 0.$$

Более того, каждое такое решение допускает при $t \to +\infty$ *асимптотические представления*

$$y(t) = c_0 + \mu_{00}t^{\frac{\gamma+1+\lambda(n-1)}{\lambda}}[1+o(1)],$$

$$y^{(k)}(t) = \mu_{0k}t^{\frac{\gamma+1+\lambda(n-k-1)}{\lambda}}[1+o(1)], \quad k = 1,\ldots,n-1,$$

где

$$\mu_{0k} = \frac{(-1)^{n-k}e^{\frac{\sigma c_0}{\lambda}}|\lambda|^{n-k-1}\,\mathrm{sign}(a\lambda)}{\prod\limits_{j=1}^{n-k-1}|\gamma+1+\lambda j|}\left|\frac{a}{\gamma+1}\right|^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Далее заметим, что уравнение (27) наряду с решениями, заданными на полуоси $[t_0,+\infty[\subset]0,\infty[$, может также допускать сингулярные решения второго рода. Определение такого класса решений дано в монографии И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурия [6, с. 262] (гл. 3, § 11). В случае уравнения (27) решение y, заданное на некотором конечном промежутке $[t_0,\omega[\subset]0,+\infty[$ $(]\omega,t_0]\subset[0,+\infty[)$, называется сингулярным решением второго рода при $t\uparrow\omega$ (соответственно при $t\downarrow\omega$), если

$$\limsup_{t\uparrow\omega}|y^{(n-1)}(t)|=+\infty \qquad (\limsup_{t\downarrow\omega}|y^{(n-1)}(t)|=+\infty).$$

Теорема 5 позволяет для любого $\omega\in]0,+\infty[$ решить вопрос о существовании сингулярных решений второго рода при $t\uparrow\omega$ уравнения (27), которые имеют свойство $\mathcal{P}^i_\omega$, где $i\in\{0,1,\ldots,n-2\}$.

Следствие 4. *Для существования сингулярных решений второго рода при $t\uparrow\omega$, $\omega\in]0,+\infty[$, уравнения (27), имеющих свойство $\mathcal{P}^i_\omega$, $i\in\{0,1,\ldots,n-2\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\lambda(n-i-1)<-1. \tag{29}$$

Если при этом либо $i=n-2$, либо $0\le i<n-2$ и $-\dfrac{1}{\lambda}\notin\{1,\ldots,n-i-2\}$, то каждое такое решение допускает при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления

$$y^{(k)}(t)=\sum_{m=k}^{i}\frac{c_m(t-\omega)^{m-k}}{(m-k)!}+\mu_{ik}(\omega-t)^{\frac{1}{\lambda}+n-k-1}[1+o(1)],\quad k=0,1,\ldots,i,$$

$$y^{(k)}(t)=\mu_{ik}(\omega-t)^{\frac{1}{\lambda}+n-k-1}[1+o(1)],\quad k=i+1,\ldots,n-1,$$

где $c_0,c_1,\ldots,c_{i-1}$ — некоторые постоянные,

$$\mu_{ik}=(-1)^{n-k}(\operatorname{sign}a)\,[|a|\omega^{\gamma}e^{\sigma c_0}]^{\frac{1}{\lambda}}\prod_{j=1}^{n-k-1}\left[\frac{1}{\lambda}+j\right]^{-1}.$$

Если же $0\le i<n-2$ и $\dfrac{1}{\lambda}=-s$ при некотором $s\in\{1,\ldots,n-i-2\}$, то каждое такое решение допускает при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления

$$y^{(k)}(t)=\sum_{m=k}^{i}\frac{c_m(t-\omega)^{m-k}}{(m-k)!}+\frac{\mu_{is}\,(t-\omega)^{n-s-k-1}\,\ln(\omega-t)}{(n-k-s-1)!}[1+o(1)],\qquad k=0,1,\ldots,i,$$

$$y^{(k)}(t)=\frac{\mu_{is}\,(t-\omega)^{n-k-s-1}\,\ln(\omega-t)}{(n-k-s-1)!}[1+o(1)],\qquad k=i+1,\ldots,n-s-1,$$

$$y^{(k)}(t)=-\mu_{is}(s-n+k)!\,(\omega-t)^{n-s-1-k}[1+o(1)],\qquad k=n-s,\ldots,n-1,$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_{i-1}$ *— некоторые постоянные,*

$$\mu_{is} = \frac{(\operatorname{sign} a)|a|^{\frac{1}{\lambda}} \left[\omega^{\gamma} e^{\sigma c_0}\right]^{\frac{1}{\lambda}}}{(s-1)!}.$$

Теперь заметим, что вопрос о существовании сингулярных решений второго рода при $t \downarrow \omega$ уравнения (27) может быть сведен с использованием преобразования

$$y(t) = z(\tau), \qquad t - \omega = \omega - \tau, \tag{30}$$

к вопросу о существовании сингулярных решений второго рода при $\tau \uparrow \omega$ дифференциального уравнения

$$\left(|z^{(n-1)}|^{\lambda-1} z^{(n-1)}\right)' = (-1)^n a \left[2\omega - \tau\right]^{\gamma} e^{\sigma z}. \tag{31}$$

При этом решения уравнения (27), которые соответствуют решениям со свойством $\mathcal{P}^i_{\omega}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, уравнения (31), будем называть решениями со свойством $\mathcal{P}^i_{\omega+}$.

В случае $\omega > 0$ коэффициент уравнение (31) при $\tau \uparrow \omega$ стремится к отличной от нуля постоянной $(-1)^n a\, \omega^{\gamma}$, т. е. имеет место случай, описанный следствием 4. Поэтому если в формулировке этого следствия заменить a на $(-1)^n a$, t на τ и $y^{(k)}(t)$ на $z^{(k)}(\tau)$, а затем учесть преобразование (30), то получим следующее утверждение.

Следствие 5. *Для существования сингулярных решений второго рода при* $t \downarrow \omega$, $\omega \in]0, +\infty[$, *уравнения (27), имеющих свойство* $\mathcal{P}^i_{\omega+}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство (29). Если при этом либо* $i = n-2$, *либо* $0 \le i < n-2$ *и* $-\dfrac{1}{\lambda} \notin \{1, \ldots, n-i-2\}$, *то каждое такое решение допускает при* $t \downarrow \omega$ *асимптотические представления*

$$y^{(k)}(t) = \sum_{m=k}^{i} \frac{(-1)^m c_m (t-\omega)^{m-k}}{(m-k)!} + \mu_{ik} (t-\omega)^{\frac{1}{\lambda}+n-k-1} [1 + o(1)], \quad k = 0, 1, \ldots, i\,,$$

$$y^{(k)}(t) = \mu_{ik} (t-\omega)^{\frac{1}{\lambda}+n-k-1} [1 + o(1)], \quad k = i+1, \ldots, n-1\,,$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_{i-1}$ *— некоторые постоянные,*

$$\mu_{ik} = (\operatorname{sign} a) \left[|a| \omega^{\gamma} e^{\sigma c_0}\right]^{\frac{1}{\lambda}} \prod_{j=1}^{n-k-1} \left[\frac{1}{\lambda} + j\right]^{-1}.$$

Если же $0 \le i < n-2$ *и* $\dfrac{1}{\lambda} = -s$ *при некотором* $s \in \{1, \ldots, n-i-2\}$, *то каждое такое решение допускает при* $t \downarrow \omega$ *асимптотические представления*

$$y^{(k)}(t) = \sum_{m=k}^{i} \frac{(-1)^m c_m (t-\omega)^{m-k}}{(m-k)!} + \frac{\mu_{is}\, (t-\omega)^{n-s-k-1}\, \ln(t-\omega)}{(n-k-s-1)!} [1 + o(1)], \quad k = 0, 1, \ldots, i\,,$$

$$y^{(k)}(t) = \frac{\mu_{is}\, (t-\omega)^{n-k-s-1}\, \ln(t-\omega)}{(n-k-s-1)!} [1 + o(1)], \quad k = i+1, \ldots, n-s-1\,,$$

$$y^{(k)}(t) = -\mu_{is} (s-n+k)!\, (\omega - t)^{n-s-1-k} [1 + o(1)], \quad k = n-s, \ldots, n-1,$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_{i-1}$ — *некоторые постоянные,*

$$\mu_{is} = \frac{(-1)^{s-1}(\operatorname{sign} a)|a|^{\frac{1}{\lambda}} \left[\omega^{\gamma} e^{\sigma c_0}\right]^{\frac{1}{\lambda}}}{(s-1)!}.$$

С использованием преобразования (30) и теорем 4, 5 легко решается вопрос о существовании решений со свойствами $\mathcal{P}^{i}_{+0}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ уравнения (27).

Следствие 6. *Для существования решений со свойством* $\mathcal{P}^{n-1}_{+0}$ *уравнения (27) необходимо и достаточно, чтобы* $\gamma > -1$. *При этом каждое такое решение допускает при* $t \downarrow 0$ *асимптотические представления*

$$y^{(k)}(t) = \sum_{m=k}^{n-1} \frac{(-1)^m c_m t^{m-k}}{(m-k)!} + \frac{a\, e^{\sigma c_0} |c_{n-1}|^{1-\lambda}\ t^{\gamma+n-k}}{\lambda \prod\limits_{j=1}^{n-k} (j+\gamma)} [1 + o(1)], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,,$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_{n-2}$ — *некоторые постоянные.*

Следствие 7. *Для существования решений со свойством* $\mathcal{P}^{i}_{+0}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, *уравнения (27) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\frac{\gamma+1}{\lambda} > i + 1 - n.$$

При этом если $-\dfrac{\gamma+1}{\lambda} \notin \{0, 1, \ldots, n-i-2\}$, *то каждое такое решение допускает при* $t \downarrow 0$ *асимптотические представления*

$$y^{(k)}(t) = \sum_{m=k}^{i} \frac{(-1)^m c_m t^{m-k}}{(m-k)!} + \frac{\operatorname{sign}\left(\dfrac{a}{\gamma+1}\right) \left|\dfrac{a}{\gamma+1}\right|^{\frac{1}{\lambda}} e^{\frac{\sigma c_0}{\lambda}}\ t^{\frac{\gamma+1}{\lambda}+n-k-1}}{\prod\limits_{j=1}^{n-k-1} \left(\dfrac{\gamma+1}{\lambda} + j\right)} [1 + o(1)],$$

$$k = 0, 1, \ldots, i\,,$$

$$y^{(k)}(t) = \frac{\operatorname{sign}\left(\dfrac{a}{\gamma+1}\right) \left|\dfrac{a}{\gamma+1}\right|^{\frac{1}{\lambda}} e^{\frac{\sigma c_0}{\lambda}}\ t^{\frac{\gamma+1}{\lambda}+n-k-1}}{\prod\limits_{j=1}^{n-k-1} \left(\dfrac{\gamma+1}{\lambda} + j\right)} [1 + o(1)], \qquad k = i+1, \ldots, n-1\,,$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_{i-1}$ — *некоторые постоянные. Если же* $\gamma = -1$, *то для любого такого решения при* $t \downarrow 0$ *имеют место асимптотические представления*

$$y^{(k)}(t) = \sum_{m=k}^{i} \frac{(-1)^m c_m t^{m-k}}{(m-k)!} - \frac{(\operatorname{sign}\ a)|a|^{\frac{1}{\lambda}} e^{\frac{\sigma c_0}{\lambda}}\ t^{n-k-1} |\ln t|^{\frac{1}{\lambda}}}{(n-k-1)!} [1 + o(1)], \quad k = 0, 1, \ldots, i\,,$$

$$y^{(k)}(t) = -\frac{(\operatorname{sign}\ a)|a|^{\frac{1}{\lambda}} e^{\frac{\sigma c_0}{\lambda}}\ t^{n-k-1} |\ln t|^{\frac{1}{\lambda}}}{(n-k-1)!} [1 + o(1)], \qquad k = i+1, \ldots, n-1\,,$$

а если $\dfrac{\gamma+1}{\lambda} = -s, \quad$ *где* $\quad s \in \{1,\ldots,n-i-2\}$, *то асимптотические представления вида*

$$y^{(k)}(t) = \sum_{m=k}^{i} \frac{(-1)^m c_m t^{m-k}}{(m-k)!} + \frac{(-1)^s(\operatorname{sign} a)\left|\dfrac{a}{\gamma+1}\right|^{\frac{1}{\lambda}} e^{\frac{\sigma c_0}{\lambda}}\; t^{n-s-k-1}\ln t}{(s-1)!(n-s-k-1)!}[1+o(1)],$$

$$k = 0,1,\ldots,i\,,$$

$$y^{(k)}(t) = \frac{(-1)^s(\operatorname{sign} a)\left|\dfrac{a}{\gamma+1}\right|^{\frac{1}{\lambda}} e^{\frac{\sigma c_0}{\lambda}}\; t^{n-s-k-1}\ln t}{(s-1)!(n-s-k-1)!}[1+o(1)], \qquad k = i+1,\ldots,n-s-1\,,$$

$$y^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{n-k}(\operatorname{sign} a)\left|\dfrac{a}{\gamma+1}\right|^{\frac{1}{\lambda}} e^{\frac{\sigma c_0}{\lambda}}\; t^{n-s-k-1}}{\prod\limits_{j=1}^{n-k-1}(s-j)}[1+o(1)], \qquad k = n-s,\ldots,n-1\,,$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_{i-1}$ *— некоторые постоянные. Более того, все такие решения являются сингулярными решениями второго рода при* $t \downarrow 0$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух условий:*

$$\gamma = -1, \quad \lambda > 0; \qquad \frac{\gamma+1}{\lambda} < 0.$$

1. *Евтухов В.М., Дрик Н.Г.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Сообщ. АН ГССР. — 1989. — **133**, № 1. — С. 29–32.
2. *Дрик Н.Г.* Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в особом случае // Дифференц. уравнения. — 1989. — **25**, № 1. — С. 1071–1072.
3. *Евтухов В.М., Дрик Н.Г.* Асимптотические представления решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // Repts Enlarged Session Sem. I.N. Vekua Inst. Appl. Math. — 1992. — **7**, № 3. — P. 39–42.
4. *Дрик Н.Г.* Асимптотическое поведение решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка: Дис ... . канд. физ.-мат. наук. — Одесса, 1992.
5. *Evtukhov V.M., Drik N.G.* Asymptotic behavior of solutions of a second order nonlinear differential equation // Georg. Math. J. — 1996. — **3**, № 2. — P. 101–120.
6. *Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1990. — 430 с.
7. *Евтухов В.М.* Асимптотическое представление решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Киев, 1998.

Получено 14.05.2002