УДК 517.9

ПЛОТНОСТЬ МНОЖЕСТВА НЕРАЗРЕШИМЫХ ЗАДАЧ КОШИ ВО МНОЖЕСТВЕ ВСЕХ ЗАДАЧ КОШИ В СЛУЧАЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОГО БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА

В. Е. Слюсарчук

Ривнэн. техн. ун-т
Украина, 33000, Ривнэ, ул. Соборная, 11
e-mail: V. Ye. Slyusarchuk@RSTU.rv.ua

We prove the following theorem. Let E and $f : \mathbb{R} \times E \to E$ be an infinite-dimensional Banach space and a continuous mapping, respectively. For an arbitary point $(t_0, z_0) \in \mathbb{R} \times E$ and a number $\varepsilon > 0$ there exists a continuous mapping $g : \mathbb{R} \times E \to E$ such that.

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}\times E} \|f(t,x) - g(t,x)\| \le \varepsilon$$

and the Cauchy problem

$$z'(t) = g(t, z(t)), \quad z(t_0) = z_0, \quad t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta),$$

has no solutions for every $\delta > 0$.

Доведено таку теорему. Нехай E і $f : \mathbb{R} \times E \to E$ — відповідно довільні нескінченновимірний банахів простір і неперервне відображення. Для довільних точки $(t_0, z_0) \in \mathbb{R} \times E$ і числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке неперервне відображення $g : \mathbb{R} \times E \to E$, що

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}\times E} \|f(t,x) - g(t,x)\| \le \varepsilon$$

і задача Коші

$$z'(t) = g(t, z(t)), \quad z(t_0) = z_0, \quad t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta),$$

не має розв'язку для кожного $\delta > 0$.

Пусть E — произвольное банахово пространство. В случае $\dim E = \infty$ А. Н. Годунов [1] построил пример непрерывного отображения $F : \mathbb{R} \times E \to E$, для которого задача Коши

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = 0, \quad t \in (-\delta, \delta), \tag{1}$$

не имеет решения для каждого $\delta > 0$.

Цель статьи — показать, что множество задач Коши с таким свойством плотно во множестве всех задач Коши.

Теорема. *Пусть E и $f : \mathbb{R} \times E \to E$ — соответственно произвольные бесконечномерное банахово пространство и непрерывное отображение. Для произвольных точки $(t_0, z_0) \in \mathbb{R} \times E$ и числа $\varepsilon > 0$ найдется такое непрерывное отображение $g : \mathbb{R} \times E \to E$, что*

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}\times E} \|f(t,x) - g(t,x)\| \le \varepsilon \tag{2}$$

и задача Коши

$$z'(t) = g(t, z(t)), \quad z(t_0) = z_0, \quad t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \tag{3}$$

не имеет решения для каждого $\delta > 0$.

Доказательство. Возможны два случая: 1) задача Коши (3) не имеет решения для каждого $\delta > 0$; 2) задача Коши (3) имеет решение $y(t)$ для некоторого $\delta > 0$. В первом случае теорема справедлива при $g = f$.

Рассмотрим второй случай. На основании непрерывности y, f и F найдутся числа $\gamma_1, \gamma_2 \in (0, \delta)$, для которых

$$\|y(t) - z_0\| \leq \frac{\gamma_1}{2} \tag{4}$$

и

$$\|f(t,x) - f(t_0, z_0)\| + \|F(t - t_0, x - z_0) - F(0,0)\| \leq \frac{\varepsilon}{6}, \tag{5}$$

если $|t - t_0| \leq \gamma_2$ и $\|x - z_0\| \leq \gamma_1$.

Введем непрерывные отображения $\nu : E \to [0,1]$, $\mu : \mathbb{R} \to [t_0 - \gamma_2, t_0 + \gamma_2]$, $\hat{y} : \mathbb{R} \to E$, $\hat{f} : \mathbb{R} \times E \to E$, $\hat{F} : \mathbb{R} \times E \to E$, $\breve{f} : \mathbb{R} \times E \to E$ и $\breve{F} : \mathbb{R} \times E \to E$ с помощью равенств

$$\nu(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \|x\| \leq \dfrac{\varepsilon}{6}; \\[2ex] 2 - \dfrac{6}{\varepsilon}\|x\|, & \text{если } \dfrac{\varepsilon}{6} < \|x\| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}; \\[2ex] 0, & \text{если } \|x\| > \dfrac{\varepsilon}{3}, \end{cases}$$

$$\mu(t) = \begin{cases} t_0 - \gamma_2, & \text{если } t < t_0 - \gamma_2; \\[2ex] t, & \text{если } |t - t_0| \leq \gamma_2; \\[2ex] t_0 + \gamma_2, & \text{если } t > t_0 + \gamma_2, \end{cases}$$

$$\hat{y}(t) = y(\mu(t)),$$

$$\hat{f}(t,x) = f(\mu(t), x),$$

$$\hat{F}(t,x) = F(\mu(t) - t_0, x),$$

$$\breve{f}(t,x) = \nu(\hat{f}(t,x) - f(t_0,z_0))\hat{f}(t,x) + [1 - \nu(\hat{f}(t,x) - f(t_0,z_0))]f(t_0,z_0)$$

и

$$\breve{F}(t,x) = \nu(\hat{F}(t,x) - F(0,0))\hat{F}(t,x) + [1 - \nu(\hat{F}(t,x) - F(0,0))]F(0,0).$$

Согласно этим равенствам и (5)

$$\sup_{t,x \in \mathbb{R} \times E} \|\breve{f}(t,x) - f(t_0,z_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{6}$$

и

$$\sup_{t,x\in\mathbb{R}\times E}\|\breve{F}(t,x)-F(0,0)\|\leq\frac{\varepsilon}{3}. \tag{7}$$

Поэтому непрерывное отображение $g:\mathbb{R}\times E\to E$:

$$g(t,x)=f(t,x)-\breve{f}(t,x)+\breve{f}(t,\hat{y}(t))+$$
$$+\frac{\varepsilon}{\varepsilon+3\|F(0,0)\|}\breve{F}\left(\frac{\varepsilon(t-t_0)}{\varepsilon+3\|F(0,0)\|}+t_0,x-\hat{y}(t)\right) \tag{8}$$

удовлетворяет соотношению (2). Действительно, на основании (6), (7) и (8)

$$\|f(t,x)-g(t,x)\|\leq\|-\breve{f}(t,x)+\breve{f}(t,\hat{y}(t))\|+$$
$$+\left\|\frac{\varepsilon}{\varepsilon+3\|F(0,0)\|}\breve{F}\left(\frac{\varepsilon(t-t_0)}{\varepsilon+3\|F(0,0)\|}+t_0,x-\hat{y}(t)\right)\right\|\leq$$
$$\leq\|\breve{f}(t,x)-f(t_0,z_0)\|+\|\breve{f}(t,\hat{y}(t))-f(t_0,z_0)\|+$$
$$+\frac{\varepsilon}{\varepsilon+3\|F(0,0)\|}\left\|\breve{F}\left(\frac{\varepsilon(t-t_0)}{\varepsilon+3\|F(0,0)\|}+t_0,x-\hat{y}(t)\right)-F(0,0)\right\|+$$
$$+\frac{\varepsilon}{\varepsilon+3\|F(0,0)\|}\|F(0,0)\|\leq$$
$$\leq\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{\varepsilon+3\|F(0,0)\|}\left(\frac{\varepsilon}{3}+\|F(0,0)\|\right)=\varepsilon,$$

если $(t,x)\in\mathbb{R}\times E$.

Предположим, что задача Коши (3) имеет решение $u(t)$ для построенного отображения g и некоторого $\delta=\gamma_3\in(0,\gamma_2)$. Не ограничивая общности, можно считать, что для $t\in(t_0-\gamma_3,t_0+\gamma_3)$

$$\|u(t)-z_0\|\leq\frac{\gamma_1}{2}. \tag{9}$$

Рассмотрим функцию $\tilde{x}(t)=u(t)-\hat{y}(t)$. На основании (4) и (9) получаем

$$\|\tilde{x}(t)\|\leq\gamma_1 \tag{10}$$

для $t\in(t_0-\gamma_3,t_0+\gamma_3)$. Согласно (4), (9), (10) и определениям отображений ν, μ, $\hat{y}$, $\breve{f}$ и $\breve{F}$ для $t\in(t_0-\gamma_3,t_0+\gamma_3)$

$$\hat{y}(t)=y(t),$$
$$\breve{f}(t,\tilde{x}(t)+y(t))=f(t,\tilde{x}(t)+y(t)),$$
$$\breve{f}(t,\hat{y}(t))=f(t,y(t))$$

и

$$\breve{F}\left(\frac{\varepsilon(t-t_0)}{\varepsilon+3\|F(0,0)\|}+t_0,\tilde{x}(t)\right)=F\left(\frac{\varepsilon(t-t_0)}{\varepsilon+3\|F(0,0)\|},\tilde{x}(t)\right).$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
u'(t) &= \tilde{x}'(t) + y'(t) = g(t, \tilde{x}(t) + y(t)) = \\
&= f(t, \tilde{x}(t) + y(t)) - \breve{f}(t, \tilde{x}(t) + y(t)) + \breve{f}(t, \hat{y}(t)) + \\
&\qquad + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 3\|F(0,0)\|} \breve{F}\left(\frac{\varepsilon(t-t_0)}{\varepsilon + 3\|F(0,0)\|} + t_0, \tilde{x}(t) + y(t) - \hat{y}(t)\right) = \\
&= f(t, y(t)) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 3\|F(0,0)\|} F\left(\frac{\varepsilon(t-t_0)}{\varepsilon + 3\|F(0,0)\|}, \tilde{x}(t)\right)
\end{aligned}
$$

и

$$
\tilde{x}'(t) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 3\|F(0,0)\|} F\left(\frac{\varepsilon(t-t_0)}{\varepsilon + 3\|F(0,0)\|}, \tilde{x}(t)\right)
$$

для $t \in (t_0 - \gamma_3, t_0 + \gamma_3)$, поскольку $y'(t) = f(t, y(t))$, если $t \in (t_0 - \gamma_3, t_0 + \gamma_3)$.

Очевидно, что $\tilde{x}(t_0) = 0$, и задача Коши (1) для $\delta = \gamma_3 \varepsilon (\varepsilon + 3\|F(0,0)\|)^{-1}$ имеет решение

$$
x(t) = \tilde{x}\left(\frac{\varepsilon + 3\|F(0,0)\|}{\varepsilon} t + t_0\right),
$$

что противоречит свойствам отображения F. Следовательно, для построенного отображения g задача Коши (3) не имеет решения для каждого $\delta > 0$.

Теорема доказана.

1. *Годунов А.Н.* О теореме Пеано в банаховых пространствах // Функцион. анализ и его прил. — 1975. — **9**, вып. 1. — С. 59–60.

Получено 27.10.2001