Нелінійні коливання 1 • 1998

УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МНОГОЗНАЧНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

В.А. Плотников

Одес. ун-т,
Украина, 270000, Одесса, ул. Петра Великого, 2
e-mail: Vap@imem.odessa.ua

A review of investigations dedicated to substantiating asymptotic methods for differential equations with multiple-valued right part and approximate equations in nonlinear metric spaces.

Наведено огляд досліджень, присвячених обгрунтуванню асимптотичних методів для диференціальних рівнянь з багатозначною правою частиною і апроксимаційних рівнянь в нелінійних метричних просторах.

Впервые дифференциальные уравнения с многозначной правой частью были исследованы Зарембой [1] и Маршо [2]. Через 25 лет Т. Важевский [3, 4] и А.Ф. Филиппов [5, 6] получили фундаментальные результаты по существованию и свойствам решений дифференциальных уравнений с многозначной правой частью (дифференциальным включениям). Одним из самых существенных результатов, полученных в этом направлении, было установление связи между дифференциальными включениями и оптимальным управлением, что способствовало быстрому развитию теории дифференциальных включений.

Исследование дифференциальных включений потребовало изучения свойств многозначных функций, т. е. разработки всего аппарата математического анализа для многозначных функций. Обширная библиография этих исследований содержится, например, в [7, 8].

Пусть $\operatorname{comp}(R^n)$ — пространство всех непустых компактных подмножеств пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A,B)=\min\{d\geq 0|S_d(A)\subset B, S_d(B)\subset A\},$$

где $S_d(A)$ — замкнутая d-окрестность компактного множества $A\subset R^n$.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}\in\varepsilon X(t,x),\quad x(0)=x^0, \tag{1}$$

где $x\in R^n$, $X: R\times R^n\to\operatorname{comp}(R^n)$, $\varepsilon>0$ — малый параметр.

Включению (1) поставим в соответствие усредненное дифференциальное включение

$$\dot{y}\in X^0(y),\quad y(0)=x^0, \tag{2}$$

где

$$X^0(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T X(t,x)\,dt. \tag{3}$$

Сходимость в (3) понимается в смысле метрики Хаусдорфа, а интеграл от многозначного отображения $X(t, x)$ — в смысле Аумана [9].

В работе [10] первая теорема Боголюбова [11, 12] была обобщена на случай дифференциальных включений.

Теорема 1. *Пусть в области* $Q\{t \geq 0,\ x \in D \subset R^n\}$ *выполнены следующие условия:*

1) *отображение* $X : Q \to \text{comp}\,(R^n)$ *непрерывно, равномерно ограничено и удовлетворяет условию Липшица по переменной* x *с постоянной* λ, *т. е.*

$$X(t,x) \subset S_M(0), \quad h(X(t,x), \quad X(t,y) \leq \lambda\|x-y\|);$$

2) *равномерно относительно* $x \in D$ *существует предел (3);*

3) *для каждого* $x^0 \in D' \subset D$ *и* $t \geq 0$ *решения включения (2) лежат вместе с* ρ-*окрестностью в области* D.

Тогда для любого $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *существует* $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$ *такое, что для* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *на интервале* $0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$ *справедливы следующие утверждения:*

1) *для любого решения* $y(t)$ *включения (2) существует решение* $x(t)$ *включения (1) такое, что*

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \eta; \tag{4}$$

2) *для любого решения* $x(t)$ *включения (1) существует решение* $y(t)$ *включения (2) такое, что выполнено (4).*

Следовательно,

$$h(R^1(t),\ R^0(t)) \leq \eta,$$

где $R^1(t)$ — замыкание сечения пучка решений включения (1), $R^0(t)$ — сечение пучка решений включения (2).

Этот результат был обобщен на включения с периодической правой частью [13], на различные схемы частичного усреднения [14], интегро-дифференциальные включения [15, 16], дифференциальные включения с медленными и быстрыми переменными [17, 18, 19], дифференциальные включения с импульсами [20], функционально-дифференциальные включения [21], дифференциальные включения в банаховом пространстве [22], дифференциальные уравнения с разрывной правой частью [15, 23, 24], дифференциальные включения с запаздыванием [25].

Для обобщения теоремы 1 на бесконечный промежуток потребовалось распространить понятие устойчивости решений дифференциальных уравнений на случай дифференциальных включений [13]. При этом использовалось понятие R-решения дифференциального включения, которое введено в [26, 27].

R-решением дифференциального включения (1) называется абсолютно непрерывное многозначное отображение $X\colon\ R^1 \to \text{comp}\ (R^n)$, для которого почти всюду выполнено соотношение

$$\lim_{\Delta \to 0} \left(X(t+\Delta),\ \bigcup_{x \in X(t)} \left\{ x + \int_t^{t+\Delta} X(s,x)ds \right\} \right) = 0. \tag{5}$$

В работах [28, 29] при исследовании дифференциальных уравнений с многозначной правой частью и многозначными решениями использовалась производная многозначного отображения в смысле Хукухары [30]:

$$D_h X(t) = F(t, X(t)), \tag{6}$$

где X: $R \to \text{conv}(R^n)$, F: $R \times \text{conv}(R^n) \to \text{conv}(R^n)$, $D_h\, X(t)$ — производная Хукухары.

Теорема Боголюбова была обобщена в [31] на дифференциальные уравнения с производной Хукухары, а в [32] на дифференциальные включения с производной Хукухары.

К этому же направлению следует отнести исследования по управлению пучками траекторий (ансамблями траекторий, многозначными траекториями). Во всех этих исследованиях решения принимают значения в метрическом пространстве компактных подмножеств, которое не является линейным.

Работы по обоснованию метода усреднения для дифференциальных уравнений с многозначной правой частью позволили разработать и обосновать численно-асимптотические методы решения задач оптимального управления, основанные на усреднении уравнений движения управляемого объекта [15, 33 – 36].

Основная идея этого подхода заключается в том, что неавтономному уравнению управляемого движения с помощью алгоритма усреднения дифференциальных включений ставится в соответствие автономное уравнение управляемого движения. Это дает возможность для решения усредненной задачи управления использовать эффективные численные методы решения задач оптимального управления. Кроме того, данный подход позволяет расширить круг задач управления, решаемых с помощью метода усреднения: построение синтеза управления, задачи с векторным критерием, дифференциальные игры, задачи оптимального управления N лиц, задачи управления многозначными траекториями.

Принципиальным моментом в развитии уравнений для многозначных траекторий явилась работа [37], в которой уравнение для R-решений рассматривалось как частный случай некоторого аппроксимационного уравнения в метрическом пространстве.

Пусть X — метрическое пространство с метрикой $\delta(\cdot\,,\cdot)$, φ: $[0,\sigma)\times[t_0, t_0{+}T)\times X \to X$.

Уравнение

$$\delta(x(t+h),\ \varphi(h,t,x(t))) = o(h), \quad x(t_0) = x_0, \tag{7}$$

называется квазидифференциальным уравнением динамической системы в метрическом пространстве.

Абсолютно непрерывное отображение $x:[t_0,T) \to X$, удовлетворяющее (7) при $t \in [t_0,T]$, называется решением квазидифференциального уравнения (7).

Наряду с уравнением (7) можно рассматривать систему квазидифференциальных уравнений

$$\delta_k(x_k(t+\Delta),\ \varphi_k(\Delta,t,x(t))) = o(\Delta), \quad x_k(t_0) = x_{k_0},$$

где $x_k \in Y_k$ — локально компактные метрические пространства с метрикой $\delta_k\,(\cdot\,,\cdot)$, $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Система квазидифференциальных уравнений позволяет рассматривать системы произвольного вида, например,

$$\dot y_1 \in F_1(t,y_1,y_2,y_3), \quad \dot y_2 = F_2(t,Y_1,y_2,y_3), \quad Dy_3 = F_3(t,Y_1,y_2,y_3),$$

где $y_1 \in R^{n_1}$, $y_2 \in R^{n_2}$, $y_3 \in \text{comp}(R^{n_3})$, $Dy_3(t)$ — производная Хукухары многозначной функции $y_3(t)$, $Y_1 : R^1 \to \text{comp}(R^{n_1})$ — R-решение дифференциального включения для y_1, $F_1 : R^1 \times R^{n_1} \times R^{n_2} \times \text{comp}(R^{n_3}) \to \text{conv}(R^{n_1})$, $F_2 : R^1 \times \text{comp}(R^{n_1}) \times R^{n_2} \times \text{comp}(R^{n_3}) \to R^{n_2}$, $F_3 : R^1 \times \text{comp}(R^{n_1}) \times R^{n_2} \times \text{comp}(R^{n_3}) \to \text{conv}(R^{n_3})$.

В аппроксимационных уравнениях не используется операция дифференцирования, что дает возможность избавиться от требования линейности пространства решений и с единых позиций рассматривать дифференциальные уравнения в линейных метрических пространствах, уравнения с многозначными решениями, а также динамические системы в нелинейных метрических пространствах [37 – 42].

Таким образом, аппроксимационные уравнения являются некоторыми квазидифференциальными уравнениями для определения динамических систем в нелинейных метрических пространствах.

В работе [43] разработана теория мутационных уравнений в метрических пространствах, которая так же, как и в [37], позволяет рассматривать многозначные траектории (трубки) и траектории в нелинейных метрических пространствах. При этом если в [37] предложен подход, который позволил не использовать в явном виде производную для описания движений в нелинейных метрических пространствах, то в работе [43] аналогичные результаты получены с помощью построения „дифференциального исчисления" в нелинейных метрических пространствах.

В работах [39 – 41] проведено обоснование метода усреднения для квазидифференциальных уравнений на конечном и бесконечном промежутках, квазидифференциальных уравнений с импульсными воздействиями. При выборе соответствующего метрического пространства X и отображения φ из этих результатов следуют известные ранее результаты по обоснованию метода усреднения для дифференциальных уравнений и включений.

Метод усреднения для гиперболических дифференциальных включений изучался в [44, 45].

Рассмотрим дифференциальное включение с малым параметром

$$u_{yx}(x,y) \in \varepsilon^2 F(x,y,u(x,y)), \tag{8}$$

решения которого удовлетворяют условию

$$u(x,0) = u(0,y) = 0, \quad x \geq 0, \ y \geq 0. \tag{9}$$

Решением дифференциального включения (8) называется функция u: $G_x \to E^n$, $G_+ = R_+ \times R_+$, которая является абсолютно непрерывной в каждой области $[0,a]\times[a,b]$ для любых конечных a и b и почти всюду на G_+ удовлетворяет дифференциальному включению (8).

Включению (8) поставим в соответствие включение

$$z_{xy} \in \varepsilon^2 \Phi(z(x,y)), \tag{10}$$

где

$$\Phi(z) = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \int_0^T F(x,y,z)\,dx\,dy. \tag{11}$$

Теорема 2. *Пусть многозначное отображение F: $G_+ \times Q \to \operatorname{comp} E^n$, $Q \subset E^n$ удовлетворяет условиям:*

1) *измеримо по x, y для каждого $u \in Q$ удовлетворяет условию Липшица по u с постоянной K и $|F(x,y,u)| \leq M$;*

2) *равномерно относительно $x \in Q$ существует предел (11);*

3) *в области* G_+ *решения задач (8), (9) и (10), (9) существуют и принадлежат* Q *вместе с некоторой их* δ*-окрестностью при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$.

Тогда для любых $\eta > 0$, $L > 0$ *существует* $\varepsilon_0(\eta, L) \leq \varepsilon^*$ *такое, что в области* $[0,\ L\varepsilon^{-1}] \times [0,\ L\varepsilon^{-1}]$ *при* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *каждому решению* $u(x,\ y)$ *задачи (8), (9) можно поставить в соответствие такое решение* $z(x,y)$ *задачи (10), (9), что* $\|u(x,y) - z(x,\ y)\| \leq \eta$, *и наоборот.*

Метод усреднения также изучался применительно к интегральным включениям Вольтерра.

В [46] рассматривается интегральное включение

$$x(t) \in x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t K(t,s) f(s, x(s)) ds, \tag{12}$$

где $K(t,s)$ — квадратная матрица размерности n, а $f(t,x)$ — многозначное отображение из $R_+ \times Q$ в пространство comp (E^n). Решением включения (12) называется непрерывная функция u: $R_+ \to E^n$, которая для $x \geq 0$ удовлетворяет включению (12).

Пусть для любых $x \in Q$ и $t \geq 0$ существует не зависящий от $p \in [1,\ N]$, $N < \infty$, предел

$$\lim_{T\to\infty} \int\limits_t^{t+T} K(t + pT, s) f(s, x) ds = \Phi(x).$$

Включению (12) поставим в соответствие включение

$$y(t) \in x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t \Phi(y(s))\, ds. \tag{13}$$

При определенных условиях на $K(t,s)$ и $f(t,x)$ доказана близость решений включений (12) и (13).

В [47] изучался метод усреднения применительно к двумерным интегральным включениям Вольтерра.

Пусть $r = (r_1, r_2)$, $0 < r_i < 1$, $i = 1, 2$, и $I_0^r\ f(x,y)$, $D_0^r\ f(x,\ y)$ — соответственно смешанный левосторонний интеграл и смешанная левосторонняя производная Римана – Лиувилля [48] функции $f(x,y)$: $G \to E^n$, $G = [0,a] \times [0,b]$, $f_{1-r}(x,\ y) = I_0^{1-r}\ f(x,y)$.

В [48 – 50] изучаются условия существования дифференциального включения

$$D_0^r u(x,y) \in F(x,y,u(x,y)), \tag{14}$$

$$u_{1-r}(x,0) = u(0,y) = 0, \quad x \in [0,a], \quad y \in [0,b]. \tag{15}$$

Решением задачи (14), (15) называется непрерывная функция u: $G \to E^n$, для которой $u_{1-r}(x,y) \in AC(G)$ и которая почти всюду на G удовлетворяет (14).

В работе [49] обоснована схема частичного усреднения для задачи

$$D_0^r u(x,y) \in \varepsilon_1^{r_1} \varepsilon_2^{r_2} F(x,y,u(x,y)), \tag{16}$$

$$u_{1-r}(x,0) = u_1 - r(0,y) = 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0. \tag{17}$$

Пусть многозначное отображение $\Phi(x,y,z)$: $G_+ \times Q \to \mathrm{comp}\,(E^n)$ такое, что равномерно относительно $x \geq 0$, $y \geq 0$ и $z \in Q$

$$\lim_{\substack{T_1\to\infty \\ T_2\to\infty}} \frac{1}{T_1^{r_1}T_2^{r_2}} \int\limits_x^{x+T_1}\int\limits_y^{y+T_2} \frac{h(F(s,t,z),\Phi(s,t,z))\,dsdt}{(x+t_1-s)^{1-r_1}(y+T_2-t)^{1-r_2}} = 0.$$

Дифференциальному включению (16) поставим в соответствие включение

$$D_0^r z(x,y) \in \varepsilon_1^{r_1}\varepsilon_2^{r_2}\Phi(x,y,z(x,y)). \tag{18}$$

В этой же работе доказана теорема о близости решений задач (16), (17) и (18), (17) в области $[0, L_1\varepsilon_1^{-1}]\times[0, L_2\varepsilon_2^{-1}]$, $L_1 > 0$, $L_2 > 0$.

Обобщение теоремы А.Н. Тихонова на сингулярно возмущенные дифференциальные включения рассматривалось в работах [15, 51 – 54].

1. *Zaremba S.C.* Sur les equations an paratingent //Bull. sci. math. – 1936. – **60**, № 5. – P. 139–166.
2. *Marchaud A.* Sur les champs de demicones et equations differentielles du premier order //Bull. Soc. math. France. – 1934. – **62**. – P. 1–38.
3. *Wazewski T.* Systemes de commande et equation an contingent //Bull. Akad. pol. sci. Sér sci. math., astron. et phys. – 1961. – **9**, № 3. – P. 151–155.
4. *Wazewski T.* Sur une condition equvalente a l'equation an contingent //Ibid. – № 12. – P. 865–867.
5. *Филиппов А.Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью //Вестн. Моск. ун-та. – 1967. – № 3. – С. 16–26.
6. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
7. *Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление //Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы. – М.: Наука, 1985. – С. 194–252.
8. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.М., Обуховский П.В.* Многозначные отображения //Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ /ВИНИТИ. – 1981. – **19**. – С. 127–231.
9. *Aumann R.I.* Integrals of set-valued functions //J. Math. Anal. and Appl. – 1965. – **12**, № 1. – P. 1–12.
10. *Плотников В.А.* Метод усреднения для дифференциальных включений и его приложение к задачам оптимального управления //Дифференц. уравнения. – 1979. – № 8. – С. 1427–1433.
11. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
12. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
13. *Плотников В.А.* Усреднение дифференциальных включений //Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, № 5. – С. 573–576.
14. *Плотников В.А.* Частичное усреднение дифференциальных включений //Мат. заметки. – 1980. – **27**, № 6. – С. 947–952.
15. *Плотников В.А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
16. *Плотников В.А., Рудык О.Г.* Об одной схеме усреднения интегро-дифференциальных включений //Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 5. – С. 78–81.
17. *Гайцгори В.Г.* Управление системами с быстрыми и медленными движениями. – М.: Наука, 1991. – 224 с.

18. *Филатов О.П., Хапаев М.М.* О взаимной ε-аппроксимации решений системы дифференциальных включений и усредненного включения //Мат. заметки. – 1990. – **47**, вып. 5. – С. 127–134.

19. *Филатов О.П., Хапаев М.М.* Усреднение дифференциальных включений с быстрыми и медленными переменными //Там же. – Вып. 6. – С. 102–109.

20. *Плотников В.А., Плотникова Л.И.* Усреднение дифференциальных включений многозначными импульсами //Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, №11. – С. 1526–1532.

21. *Булгаков А.И.* Усреднение функционально-дифференциальных включений //Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, №10. – С. 1678–1690.

22. *Ноанг Зыонг Туан.* Теорема об усреднении дифференциальных включений с медленными и быстрыми переменными в банаховом пространстве //Там же. – 1992. – **28**, №2. – С. 360–363.

23. *Плотников В.А.* Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – 60 с.

24. *Плотников В.А., Климчук С.С.* Усреднение уравнений скользящего режима в задачах управления //Динамика систем. – 1989. – С. 86–92.

25. *Плотников В.А., Желтиков В.П.* Усреднение дифференциальных включений с запаздыванием //Изв. вузов. Математика. – 1983. – №9(256). – С. 42–45.

26. *Панасюк А.И., Панасюк В.И.* Асимптотическая оптимизация нелинейных систем управления. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1977.

27. *Панасюк А.И., Панасюк В.И.* Об одном уравнении, порождаемом дифференциальным включением //Мат. заметки. – 1980. – **27**, вып. 3. – С. 429–437.

28. *De Blasi F.S., Irvolino F.* Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso //Boll. Unione mat. Ital. – 1969. – **2**, №4–5. – P. 491–501.

29. *Толстоногов А.А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. – Новосибирск: Наука, 1986. – 296 с.

30. *Hukuhara M.* Sur l'application mesurables dont la valeur est un compact convexe //Funkc. evacioj. – 1967. – №10. – P. 43–66.

31. *Kisielewicz M.* Method of averaging for differential equations with compact convex valued solutions //Rend mat. – 1976. – **9**, №3. – P. 397–408.

32. *Плотников А.В.* Усреднение дифференциальных включений с производной Хукухары //Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, №1. – С. 121–125.

33. *Небеснов В.И., Плотников В.А., Кузюшин А.Я.* Оптимальное управление ВРШ на волнении. – М.: Пищ. пром-сть, 1974. – 88 с.

34. *Небеснов В.И., Плотников В.А.* Математические методы исследования режимов работы содовых комплексов. – М.: Изд-во ММФ, 1977. – 72 с.

35. *Плотников В.А.* Асимптотические методы в задачах оптимального управления. – Одесса: Одес. ун-т, 1976. – 103 с.

36. *Плотников А.В.* Усреднение уравнений управляемого движения с многозначными траекториями //Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, №5. – С. 657–659.

37. *Панасюк А.И.* О квазидифференциальных уравнениях в метрических пространствах //Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, №8. – С. 1344–1353.

38. *Панасюк А.И.* Квазидифференциальные уравнения в полном метрическом пространстве в условиях типа Каратеодори //Там же. — Ч. I. – 1995. – **31**, №6. – С. 962–972; Ч. II. – №8. – С. 1361–1369.

39. *Плотников В.А., Плотникова Л.И.* Усреднение квазидифференциальных уравнений в метрических пространствах //Там же. — №10. – С. 1678–1683.

40. *Плотников В.А., Плотникова Л.И.* Частичное усреднение квазидифференциальных уравнений в метрических пространствах //Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, №10. – С. 1442–1447.

41. *Plotnikov V.A., Kitanov P.* Continious dependence of solutions of quasidifferential equations with impulses //Discrete. Math. and Appl. Res. Math. Blagoevgrad. – 1995. – №5. – P. 238–245.

42. *Плотников В.А., Плотникова Л.И.* Усреднение квазидифференциальных уравнений и включений в метрическом пространстве //Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. – С. 159–160.

43. *Aubin J.-P.* Mutational equations in metric spaces //Set-Valued Analysis. – 1993. – **1**, № 1. – P. 3–46.

44. *Витюк А.Н., Клименко С.С.* Теорема Н.Н. Боголюбова для гиперболических дифференциальных включений //Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 5. – С. 641–645.

45. *Витюк А.Н.* К вопросу об усреднении дифференциальных включений с частными производными //Краевые задачи. – Пермь, 1990. – С. 94–98.

46. *Витюк А.Н.* Усреднение в интегральных многозначных уравнениях Вольтерра //Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 2. – С. 1622–1626.

47. *Витюк А.Н.* Усреднение в интегральных включениях Вольтерра //Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 2. – С. 1–5.

48. *Витюк А.Н.* Дифференциальные включения с частными производными дробных порядков //Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – С. 59–61.

49. *Витюк А.Н.* Частичное усреднение для дифференциальных включений с частными производными дробных порядков //Дифференц. уравнения. – 1996. – **32**, № 8. – С. 1131–1133.

50. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

51. *Dontchev A.L.* Perturbations approximations and sesitivity analisis of optimal control systems. – Moscow: Mir, 1987.

52. *Dontchev A.L., Slavov J.I.* Upper semicontinuity of solutions of singularly perturbed differential inclutions //H.-J. Sebastian and K. Tammer(eds). System Modelling and Optimization. Lect. Notes Control and Inf. Sci. 143, Springer, 1991. – P. 273–280.

53. *Dontchev A.L., Veliov V.M.* Singular perturbation in Mayer's problem for linear systems //SIAM J. Control Optimization. – 1983. – **21**. – P. 566–581.

54. *Tuan H.* On reachable set of singularly perturbed differential inclusions and optimal control problems //Optimization. – 1992. – **26**. – P. 325–338.

Получено 20.08.97