

**ПРО ІСНУВАННЯ І АСИМПТОТИКУ ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ
ВИРОДЖЕНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ
СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
У ВИПАДКУ КРАТНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ**

В. П. Яковець, А. М. Акименко

Ніжин. пед. ун-т

Україна, 16600, Ніжин Чернігівської обл., вул. Кропив'янського, 2

We consider an inhomogeneous singularly perturbed system of linear differential equations with ω -periodic coefficients and an identically degenerate matrix of the derivative. We find sufficient conditions for existence and uniqueness of an ω -periodic solution of this system in the case where the main pencil of matrices has multiple spectrum. We construct an asymptotics of this solution.

Розглядається лінійна неоднорідна сингулярно збурена система диференціальних рівнянь з ω -періодичними коефіцієнтами і тотожно виродженою матрицею при похідній. Знайдено достатні умови існування і єдиності ω -періодичного розв'язку цієї системи у випадку, коли головна в'язка матриць має кратний спектр. Побудовано асимптотику цього розв'язку.

Постановка задачі. Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\varepsilon^h B(t) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x(t, \varepsilon) + f(t, \varepsilon), \quad (1)$$

де $A(t, \varepsilon), B(t)$ — квадратні $(n \times n)$ -вимірні матриці, $x(t, \varepsilon), f(t, \varepsilon)$ — n -вимірні вектори, $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

Припустимо, що виконуються такі умови:

1) $A(t, \varepsilon), B(t), f(t, \varepsilon)$ — ω -періодичні по $t, \omega > 0$;

2) матриця $A(t, \varepsilon)$ і вектор $f(t, \varepsilon)$ допускають на R рівномірні асимптотичні розвинення за степенями ε :

$$A(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t), \quad f(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(t); \quad (2)$$

3) коефіцієнти розвинень $A_k(t), f_k(t)$ нескінченно диференційовні на R ;

4) $\det B(t) = 0 \quad \forall t \in R$;

5) гранична в'язка матриць $A_0 - \lambda B$ регулярна при всіх $t \in R$, тобто $\det(A_0 - \lambda B) \neq 0$ [1, с. 313], і має „скінченний” елементарний дільник $(\lambda - \lambda_0(t))^p$ кратності p та „нескінченний” кратності $q = n - p$. Зазначимо, що згідно з [1] „скінченний” елементарний дільник $(\lambda - \lambda_0)^p$ — це елементарний дільник матриці A_0 відносно B , який відповідає власному значенню λ_0 , а „нескінченний” елементарний дільник є елементарним дільником матриці B відносно A_0 , який відповідає нульовому власному значенню.

За виконання цих умов будемо досліджувати питання про існування ω -періодичного розв'язку системи (1) та побудову його асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Аналогічна задача для даного класу систем досліджувалась у роботі [2], де передбачалось, що всі „скінченні” та „нескінченні” елементарні дільники граничної в’язки матриць прості, що значно полегшувало дослідження.

Наявність кратних „скінченних” і „нескінченних” елементарних дільників у граничної в’язки матриць $A_0 - \lambda B$ призводить до необхідності оперування з асимптотичними розвиненнями за дробовими степенями параметра ε , що значно ускладнює задачу і вимагає подолання труднощів принципового характеру. Це й здійснюється в даній роботі.

Деякі допоміжні означення. З умови 5 випливає [3] (§1.5), що матриця $A_0(t)$ має на R B -жорданів ланцюжок векторів довжини p , що складається з власного вектора $\phi_1(t)$, який відповідає власному значенню $\lambda_0(t)$, та $p - 1$ B -приєднаних векторів $\phi_2(t), \dots, \phi_p(t)$, які при всіх $t \in R$ задовольняють співвідношення

$$\begin{aligned} (A_0 - \lambda_0 B)\phi_1 &= 0, \\ (A_0 - \lambda_0 B)\phi_i &= B\phi_{i-1}, i = \overline{2, p}, \end{aligned} \quad (3)$$

а рівняння $(A_0 - \lambda_0 B)z = B\phi_p$ не має розв’язку в жодній точці множини R .

У свою чергу матриця $B(t)$ має A_0 -жорданів ланцюжок векторів довжини q , що складається з власного вектора $\tilde{\phi}_1(t)$, який відповідає нульовому власному значенню та $q - 1$ A_0 -приєднаних векторів $\tilde{\phi}_2, \dots, \tilde{\phi}_{q-1}$, які задовольняють співвідношення

$$\begin{aligned} B\tilde{\phi}_1 &= 0, \\ B\tilde{\phi}_j &= A_0\tilde{\phi}_{j-1}, j = \overline{2, q}. \end{aligned} \quad (4)$$

Вектори, що утворюють отримані ланцюжки, з співвідношень (3), (4) визначаються неоднозначно. Цієї неоднозначності можна уникнути, якщо визначити їх за допомогою рекурентних формул

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi, \quad \phi_i = HB\phi_{i-1}, i = \overline{2, p}, \\ \tilde{\phi}_1 &= \tilde{\phi}, \quad \tilde{\phi}_j = GA_0\tilde{\phi}_{j-1}, j = \overline{2, q}, \end{aligned}$$

де $\phi(t), \tilde{\phi}(t)$ — деякі фіксовані власні вектори відповідно матриці A_0 відносно B та матриці B відносно A_0 , а $H(t), G(t)$ — напівобернені матриці до матриць $(A_0 - \lambda_0 B)$ та $B(t)$. Звідси

$$\begin{aligned} \phi_i &= (HB)^{i-1}\phi, \quad i = \overline{2, p}, \\ \tilde{\phi}_j &= (GA_0)^{j-1}\tilde{\phi}, \quad j = \overline{2, q}. \end{aligned} \quad (5)$$

Зазначимо, що згідно з [4–6] вектори $\phi, \tilde{\phi}$ і матриці $H(t), G(t)$ можна визначити так, щоб вони були достатню кількість разів диференційовні і ω -періодичні, що ми й передбачатимемо в подальших викладках. Тоді такі ж властивості матимуть і вектори (5).

Позначимо через $\psi(t)$ елемент нуль-простору матриці $(A_0 - \lambda_0 B)^*$, а через $\tilde{\psi}(t)$ — елемент нуль-простору матриці B^* , які визначимо так, щоб вони були ω -періодичними і достатньо гладкими. Оскільки рівняння

$$(A_0 - \lambda_0 B)y = B\phi_p, \quad Bz = A_0\tilde{\phi}_q$$

не мають розв'язку, то

$$(B(HB)^{p-1}\phi, \psi) \neq 0, (A_0(GA_0)^{q-1}\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \neq 0,$$

де символом (a, b) позначено скалярний добуток в унітарному n -вимірному просторі, в якому розглядається система (1). Беручи до уваги, що вектори $\psi(t)$ та $\tilde{\psi}(t)$ визначаються з точністю до скалярного множника, визначимо їх так, щоб виконувались рівності

$$\begin{aligned} (B(HB)^{p-1}\phi, \psi) &= 1, \\ (A_0(GA_0)^{q-1}\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) &= 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Крім того, з (3), (4) знаходимо

$$\begin{aligned} (B(HB)^{i-1}\phi, \psi) &= 0, \quad i = \overline{1, p-1}, \\ (A_0(GA_0)^{j-1}\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) &= 0, \quad j = \overline{1, q-1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Побудова асимптотики матриці монодромії та мультиплікаторів. Згідно з [3, 4] матриця монодромії для системи (1) має вигляд

$$\Omega = Y^*(0, \varepsilon)B(0)X(\omega, \varepsilon)[Y^*(0, \varepsilon)B(0)X(0, \varepsilon)]^{-1}, \tag{8}$$

де $X(t, \varepsilon)$ — фундаментальна матриця [3] однорідної системи

$$\varepsilon^h B(t) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x(t, \varepsilon), \tag{9}$$

а $Y(t, \varepsilon)$ — фундаментальна матриця спряженої з (9) системи

$$\varepsilon^h \frac{dB^*y}{dt} = -A^*(t, \varepsilon)y(t, \varepsilon). \tag{10}$$

Розглянемо однорідну систему диференціальних рівнянь (9). Згідно з [3, 7] ця система має p формальних лінійно незалежних розв'язків вигляду

$$x_i(t, \varepsilon) = u_i(t, \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_i(t, \varepsilon) dt \right), \quad i = \overline{1, p}, \tag{11}$$

де $u_i(t, \varepsilon)$ — n -вимірні вектори, а $\lambda_i(t, \varepsilon)$ — скалярні функції, які зображуються формальними розвиненнями за степенями $\mu = \sqrt[q]{\varepsilon}$:

$$u_i(t, \varepsilon) = \phi(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k u_k^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, p},$$

$$\lambda_i(t, \varepsilon) = \lambda_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_k^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, p},$$
(12)

та $q - 1$ формальних лінійно незалежних розв'язків другої групи

$$\tilde{x}_j(t, \varepsilon) = \tilde{u}_j(t, \varepsilon) \exp \left(\nu^{-(q-1)h-1} \int_0^t \frac{dt}{\xi_j(t, \varepsilon)} \right), \quad j = \overline{1, q-1},$$
(13)

де $\nu = \sqrt[q-1]{\varepsilon}$, та $\tilde{u}_j(t, \varepsilon), \xi(t, \varepsilon)$ — розвинення в ряди за степенями ν :

$$\tilde{u}_j(t, \varepsilon) = \tilde{\phi}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k \tilde{u}_k^{(j)}(t), \quad j = \overline{1, q-1},$$

$$\xi_j(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \xi_k^{(j)}(t), \quad j = \overline{1, q-1}.$$
(14)

Коефіцієнти розвинень (12) визначаються із системами алгебраїчних рівнянь, які утворюються шляхом підстановки (11), (12) в систему (9). Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметра μ , маємо [3]

$$(A_0 - \lambda_0 B) u_k^{(s)}(t) = b_k^{(s)}(t), \quad s = \overline{1, p}, \quad k = 1, 2, \dots,$$
(15)

де

$$b_k^{(s)}(t) = \sum_{i=1}^k P_i^k(\lambda^{(s)}) B(HB)^{i-1} \phi + \sum_{j=0}^{k-p-1} \sum_{i=1}^{k-p-j} P_i^{k-p-j}(\lambda^{(s)}) (BH)^i g_{p+j}^{(s)} + g_k^{(s)}(t),$$

$$k = 1, 2, \dots, s = \overline{1, p},$$
(16)

$$g_k^{(s)}(t) = - \sum_{i=1}^{[k/p]} A_i u_{k-ip}^{(s)} + B(u_{k-hp}^{(s)})', \quad k \geq p, \quad s = \overline{1, p},$$

а символом $P_i^k(\lambda^{(s)})$ позначено суму всіх можливих добутоків і множників вигляду $\lambda_{j_1}^{(s)}, \lambda_{j_2}^{(s)}, \dots, \lambda_{j_i}^{(s)}$, сума індексів яких $j_1 + j_2 + \dots + j_i = k$.

Далі, використовуючи умову сумісності системи (15) — ортогональність її правої частини до вектора $\psi(t)$ та беручи до уваги (6), (7), знаходимо

$$(\lambda_1^{(s)})^p = (K\phi, \psi), \quad (17)$$

де $K = A_1 - \delta_{h,1} B \frac{d}{dt}$, звідки

$$\lambda_1^{(s)} = \sqrt[p]{|(K\phi, \psi)|} \left(\cos \frac{\arg(K\phi, \psi) + 2\pi(s-1)}{p} + i \sin \frac{\arg(K\phi, \psi) + 2\pi(s-1)}{p} \right), \quad (18)$$

$$s = \overline{1, p},$$

якщо $(K\phi, \psi) \neq 0 \forall t \in R$.

З (14), (15) отримуємо рекурентну формулу для визначення значень $\lambda_k^{(s)}$:

$$\lambda_{k+1}^{(s)} = -\frac{c_k^{(s)}(t) + \tilde{P}_p^{p+k}(\lambda^{(s)})}{p(\lambda_1^{(s)})^{p-1}}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

де

$$c_k^{(s)} = \sum_{i=p+1}^{p+k} P_i^{p+k}(\lambda^{(s)})(B(HB)^{i-1}\phi, \psi) + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} P_i^{k-j}(\lambda^{(s)})((BH)^i g_{p+j}^{(s)}, \psi) + (g_{p+k}^{(s)}, \psi), \quad (20)$$

а $\tilde{P}_p^{p+k}(\lambda^{(s)})$ — та частина виразу $P_p^{p+k}(\lambda^{(s)})$, яка не містить $\lambda_{k+1}^{(s)}$.

Вектори $u_k^{(s)}(t)$ визначаються за формулою

$$u_k^{(s)} = H(t)b_k^{(s)}(t), \quad k = 1, 2, \dots. \quad (21)$$

Аналогічно визначаються коефіцієнти розвинень (14). Підставляючи (13), (14) у (9) і порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ν , одержуємо

$$B\tilde{u}_k^{(s)} = \tilde{b}_k^{(s)}(t), \quad k = 1, 2, \dots, \quad s = \overline{1, q-1}, \quad (22)$$

звідки

$$\tilde{u}_k^{(s)} = G(t)\tilde{b}_k^{(s)}(t), \quad k = 1, 2, \dots, \quad s = \overline{1, q-1}, \quad (23)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{b}_k^{(s)} &= \sum_{i=1}^k P_i^{k-i}(\xi^{(s)}) A_0 (GA_0)^{i-1} \tilde{\phi} + \\ &+ \sum_{j=0}^{k-q} \sum_{i=1}^{k-q-j+1} P_i^{k-q-i-j+1}(\xi^{(s)}) (A_0 G)^i \tilde{g}_{q+j-1}^{(s)} + \tilde{g}_k^{(s)}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\tilde{g}_k^{(s)}(t) = \sum_{j=0}^{k-q+1} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k-j}{q-1} \rfloor} \xi_j^{(s)} A_i \tilde{u}_{k-1-j-(q-1)i}^{(s)} - \sum_{i=0}^{k-(q-1)h} \xi_i^{(s)} B(\tilde{u}_{k-(q-1)h-i}^{(s)})', \quad (25)$$

$$k = q-1, q, \dots, \quad s = \overline{1, q-1}.$$

Символ $P_i^k(\xi^{(s)})$ має такий же зміст, що й символ $P_i^k(\lambda^{(s)})$ [3].

Використовуючи умову сумісності системи (22) — ортогональність вектора $\tilde{b}_k^{(s)}$ до вектора $\tilde{\psi}$, знаходимо

$$(\xi_0^{(s)})^{q-1} = -(A_1 \tilde{\phi}, \tilde{\psi}),$$

звідки

$$\begin{aligned} \xi_0^{(s)} &= \sqrt[q-1]{|(A_1 \tilde{\phi}, \tilde{\psi})|} \left(\cos \frac{\arg(-A_1 \tilde{\phi}, \tilde{\psi}) + 2\pi(s-1)}{q-1} + \right. \\ &\left. + i \sin \frac{\arg(-A_1 \tilde{\phi}, \tilde{\psi}) + 2\pi(s-1)}{q-1} \right), \quad s = \overline{1, q-1}, \end{aligned} \quad (26)$$

якщо $(A_1 \tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \neq 0$.

Для визначення значень $\xi_k^{(s)}$ отримуємо рекурентну формулу

$$\xi_k^{(s)} = -\frac{\tilde{c}_k^{(s)}(t) + \tilde{P}_q^{q+k}(\xi^{(s)})}{q(A_1 \tilde{\phi}, \tilde{\psi})}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (27)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k^{(s)} &= \sum_{i=q+1}^{q+k} P_i^{q+k-i}(\xi^{(s)}) (A_0 (GA_0)^{i-1} \tilde{\phi}, \tilde{\psi}) + \\ &+ \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^{k-j} P_i^{k-j}(\xi^{(s)}) ((A_0 G)^i \tilde{g}_{q+j-1}^{(s)}, \tilde{\psi}) + (\tilde{g}_{q+k}^{(s)}, \tilde{\psi}), \end{aligned} \quad (28)$$

$$s = \overline{1, q-1},$$

а $\tilde{P}_q^{q+k}(\xi^{(s)})$ — та частина виразу $P_q^{q+k}(\xi^{(s)})$, яка не містить $\xi_k^{(s)}$.

За допомогою рекурентних формул (18), (19), (21), (23), (26), (27) можна визначити будь-які коефіцієнти розвинень (12), (14). У роботі [7] встановлено, що розв'язки (11), (13) за виконання певних умов є асимптотичними розвиненнями точних лінійно незалежних розв'язків системи (9).

Розглянемо систему (10), спряжену з (9). Вона також має дві групи розв'язків, які відповідають „скінченному” та „нескінченному” елементарним дільникам:

$$y_i(t, \varepsilon) = v_i(t, \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \eta_i(t, \varepsilon) dt \right), \quad i = \overline{1, p}, \quad (29)$$

та

$$\tilde{y}_j(t, \varepsilon) = \tilde{v}_j(t, \varepsilon) \exp \left(\nu^{-(q-1)h-1} \int_0^t \frac{dt}{\zeta_j(t, \varepsilon)} \right), \quad j = \overline{1, q-1}, \quad (30)$$

де

$$v_i(t, \varepsilon) = \psi(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k v_k^{(i)}(t), \quad \eta_i(t, \varepsilon) = -\bar{\lambda}_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \eta_k^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, p}, \quad (31)$$

$$\tilde{v}_j(t, \varepsilon) = \tilde{\psi}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k \tilde{v}_k^{(j)}(t), \quad \zeta_j(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \zeta_k^{(j)}(t), \quad j = \overline{1, q-1}. \quad (32)$$

Коефіцієнти розвинень (31), (32) знаходяться за формулами

$$v_k^{(s)}(t) = H^* b_k^{(s)}(t), \quad k = 1, 2, \dots, s = \overline{1, p}, \quad (33)$$

де

$$b_k^{(s)}(t) = \sum_{i=1}^k (-1)^i P_i^k(\eta^{(s)}) B^* (H^* B^*)^{i-1} \psi + \sum_{j=0}^{k-p} \sum_{i=1}^{k-p-j} (-1)^{p+j} P_i^{k-p-j}(\eta^{(s)}) (B^* H^*)^i g_{p+j}^{(s)}, \quad (34)$$

$$g_k^{(s)}(t) = - \sum_{i=1}^{[k/p]} A_i^* v_{k-ip}^{(s)} + (B^* v_{k-hp}^{(s)})', \quad k \geq p, s = \overline{1, p}, \quad (35)$$

$$\eta_1^{(s)} = \sqrt[p]{|(K^*\psi, \phi)|} \left(\cos \frac{\arg(-1)^p(K^*\psi, \phi) + 2\pi(s-1)}{p} + i \sin \frac{\arg(-1)^p(K^*\psi, \phi) + 2\pi(s-1)}{p} \right), \quad s = \overline{1, p}. \quad (36)$$

Тут $K^* = A_1^* + \delta_{h,1} \frac{d}{dt} B^*$,

$$\eta_{k+1}^{(s)} = (-1)^p \frac{c_k^{(s)}(t) + \tilde{P}_p^{p+k}(\eta^{(s)})}{p(\eta_1^{(s)})^{p-1}}, \quad (37)$$

$$c_k^{(s)} = \sum_{i=p+1}^{p+k} (-1)^i P_i^{p+k}(\eta^{(s)}) (B^*(H^*B^*)^{i-1}\psi, \phi) + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{k-j} P_i^{k-j}(\eta^{(s)}) ((B^*H^*)^i g_{p+j}^{(s)}, \phi), \quad (38)$$

$$\tilde{v}_k^{(s)}(t) = G^* \tilde{b}_k^{(s)}(t), \quad k = 1, 2, \dots, s = \overline{1, q-1}, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_k^{(s)}(t) &= \sum_{i=1}^k (-1)^i P_i^k(\zeta^{(s)}) A_0^* (G^* A_0^*)^{i-1} \tilde{\phi} + \\ &+ \sum_{j=0}^{k-q} \sum_{i=1}^{k-q-j+1} (-1)^{k-q-i} P_i^{k-q-i-j+1}(\zeta^{(s)}) (A_0^* G^*)^i \tilde{g}_{q+j-1}^{(s)} + \tilde{g}_k^{(s)}, \\ \tilde{g}_k^{(s)}(t) &= - \sum_{j=0}^{k-q+1} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k-j}{q-1} \rfloor} \zeta_j^{(s)} A_i^* \tilde{v}_{k-1-j-i(q-1)}^{(s)} + \\ &+ \sum_{i=0}^{k-(q-1)h-1} \zeta_i^{(s)} (B^* \tilde{v}_{k-h(q-1)-i-1}^{(s)})', \quad k \geq q-1, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\zeta_0^{(s)} = \sqrt[q-1]{|(A_1^* \tilde{\psi}, \tilde{\phi})|} \left(\cos \frac{\arg(-1)^q(A_1^* \tilde{\psi}, \tilde{\phi}) + 2\pi(s-1)}{q-1} + i \sin \frac{\arg(-1)^q(A_1^* \tilde{\psi}, \tilde{\phi}) + 2\pi(s-1)}{q-1} \right), \quad s = \overline{1, q-1}, \quad (41)$$

$$\zeta_k^{(s)} = (-1)^{q+1} \frac{\tilde{c}_k^{(s)}(t) + \tilde{P}_q^{q+k}(\zeta^{(s)})}{q(A_1^* \tilde{\psi}, \tilde{\phi})}, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k^{(s)} = & \sum_{i=q+1}^{q+k} (-1)^i P_i^{q+k-i}(\zeta^{(s)})(A_0^*(G^* A_0^*)^{i-1} \tilde{\psi}, \tilde{\phi}) + \\ & + \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{k-j} (-1)^{k-j} P_i^{k-j}(\zeta^{(s)})((A_0^* G^*)^i \tilde{g}_{q+j-1}^{(s)}, \tilde{\phi}) + (\tilde{g}_{q+k}^{(s)}, \tilde{\psi}), \quad s = \overline{1, q-1}. \end{aligned}$$

Зазначимо, що згідно з (36)

$$\begin{aligned} (\eta_1^{(s)})^p &= (-1)^p (K^* \psi, \phi) = (-1)^p ((A_1^* \psi, \phi) + \delta_{h,1}((B^* \psi)', \phi)) = \\ &= (-1)^p ((\psi, A_1 \phi) + \delta_{h,1}((\psi, B' \phi) + (\psi', B \phi))) = \\ &= (-1)^p [(\overline{A_1 \phi, \psi}) + \delta_{h,1}((\overline{B' \phi, \psi}) + (\overline{B \phi, \psi'}))], \end{aligned}$$

звідки

$$(\overline{\eta_1^{(s)}})^p = (-1)^p [(A_1 \phi, \psi) + \delta_{h,1}((B' \phi, \psi) + (B \phi, \psi'))].$$

У свою чергу згідно з (17)

$$(\lambda_1^{(s)})^p = (K \phi, \psi) = ((A_1 \phi, \psi) - \delta_{h,1}(B \phi', \psi)).$$

Отже, якщо p парне, то

$$\begin{aligned} (\lambda_1^{(s)})^p - (\overline{\eta_1^{(s)}})^p &= (A_1 \phi, \psi) - \delta_{h,1}(B \phi', \psi) - (A_1 \phi, \psi) - \delta_{h,1}((B' \phi, \psi) + (B \phi, \psi')) = \\ &= -\delta_{h,1}(B \phi, \psi)' = 0, \end{aligned}$$

тобто $(\lambda_1^{(s)})^p - (\overline{\eta_1^{(s)}})^p = 0$. Якщо p непарне, то

$$(\lambda_1^{(s)})^p + (\overline{\eta_1^{(s)}})^p = 0.$$

Ці рівності будуть виконуватись, якщо покласти

$$\overline{\eta_1^{(s)}} = -\lambda_1^{(s)}, \quad s = \overline{1, p}. \quad (43)$$

Аналогічно з (26), (41) маємо

$$(\xi_0^{(s)})^{q-1} = -(A_1 \tilde{\phi}, \tilde{\psi}),$$

$$(\zeta_0^{(s)})^{q-1} = (-1)^q (A_1^* \tilde{\psi}, \tilde{\phi}) = (-1)^q (\tilde{\psi}, A_1 \tilde{\phi}) = (-1)^q \overline{(A_1 \tilde{\phi}, \tilde{\psi})},$$

звідки

$$(\bar{\zeta}_0^{(s)})^{q-1} = (-1)^q (A_1 \tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = (-1)^{q-1} (\xi_0^{(s)})^{q-1}.$$

Остання рівність буде виконуватись, якщо покласти

$$\bar{\zeta}_0^{(s)} = -\xi_0^{(s)}, \quad s = \overline{1, q-1}. \quad (44)$$

Розглянемо вирази, які утворюються з (11), (13), (29), (30) шляхом обривання відповідних розвинень (12), (14), (31), (32) на m -му члені:

$$x_m^{(i)}(t, \varepsilon) = u_m^{(i)}(t, \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_m^{(i)}(t, \varepsilon) dt \right), \quad i = \overline{1, p}, \quad (45)$$

$$\tilde{x}_m^{(j)}(t, \varepsilon) = \tilde{x}_m^{(j)}(t, \varepsilon) \exp \left(\nu^{-(q-1)h-1} \int_0^t \frac{dt}{\xi_m^{(j)}(t, \varepsilon)} \right), \quad j = \overline{1, q-1},$$

де

$$u_m^{(i)}(t, \varepsilon) = \phi(t) + \sum_{k=1}^m \mu^k u_k^{(i)}(t), \quad \lambda_m^{(i)}(t, \varepsilon) = \lambda_0(t) + \sum_{k=1}^m \mu^k \lambda_k^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, p}, \quad (46)$$

$$\tilde{u}_m^{(j)}(t, \varepsilon) = \tilde{\phi}(t) + \sum_{k=1}^m \nu^k \tilde{u}_k^{(j)}(t), \quad \xi_m^{(j)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \nu^k \xi_k^{(j)}(t), \quad j = \overline{1, q-1}, \quad (47)$$

$$y_m^{(i)}(t, \varepsilon) = v_m^{(i)}(t, \varepsilon) \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^t \eta_i(t, \varepsilon) dt), \quad i = \overline{1, p}, \quad (48)$$

$$\tilde{y}_m^{(j)}(t, \varepsilon) = \tilde{v}_m^{(j)}(t, \varepsilon) \exp \left(\nu^{-(q-1)h-1} \int_0^t \frac{dt}{\zeta_m^{(j)}(t, \varepsilon)} \right), \quad j = \overline{1, q-1}.$$

Тут

$$v_m^{(i)}(t, \varepsilon) = \psi(t) + \sum_{k=1}^m \mu^k v_k^{(i)}(t), \quad \eta_i(t, \varepsilon) = -\bar{\lambda}_0(t) + \sum_{k=1}^m \mu^k \eta_k^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, p}, \quad (49)$$

$$\tilde{v}_m^{(j)}(t, \varepsilon) = \tilde{\psi}(t) + \sum_{k=1}^m \nu^k \tilde{v}_k^{(j)}(t), \quad \zeta_m^{(j)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \nu^k \zeta_k^{(j)}(t), \quad j = \overline{1, q-1}. \quad (50)$$

Складемо $(n \times n)$ -вимірні матриці

$$Q(t, \varepsilon) = [U_m(t, \varepsilon); \tilde{\phi}(t)], \quad P(t, \varepsilon) = [V_m(t, \varepsilon); \tilde{\psi}(t)]^*, \quad (51)$$

де $U_m(t, \varepsilon), V_m(t, \varepsilon)$ — прямокутні матриці розмірності $n \times (n - 1)$, складені з вектор-стовпців (46), (47) та (49), (50):

$$U_m(t, \varepsilon) = [u_m^{(1)}(t, \varepsilon), \dots, u_m^{(p)}(t, \varepsilon), \tilde{u}_m^{(1)}(t, \varepsilon), \dots, \tilde{u}_m^{(q-1)}(t, \varepsilon)],$$

$$V_m(t, \varepsilon) = [v_m^{(1)}(t, \varepsilon), \dots, v_m^{(p)}(t, \varepsilon), \tilde{v}_m^{(1)}(t, \varepsilon), \dots, \tilde{v}_m^{(q-1)}(t, \varepsilon)].$$

Неважко переконатися, що ці матриці неособливі при досить малих $\varepsilon > 0$. Виконавши в системі (9) заміну

$$x(t, \varepsilon) = Q(t, \varepsilon)z(t, \varepsilon) \quad (52)$$

та помноживши її зліва на матрицю $P(t, \varepsilon)$, дістанемо

$$\varepsilon^h PBQ \frac{dz}{dt} = PLQz, \quad (53)$$

де $L(t, \varepsilon) = A(t, \varepsilon) - \varepsilon^h B(t) \frac{d}{dt}$.

Згідно з (51)

$$PBQ = [V_m(t, \varepsilon); \tilde{\psi}(t)]^* B(t) [U_m(t, \varepsilon); \tilde{\phi}(t)] = \begin{pmatrix} V_m^* B U_m & V_m^* B \tilde{\phi} \\ \tilde{\psi}^* B U_m & \tilde{\psi}^* B \tilde{\phi} \end{pmatrix},$$

звідки, враховуючи, що $B\tilde{\phi} = 0, B^*\tilde{\psi} = 0$, отримуємо

$$PBQ = \begin{pmatrix} V_m^* B U_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, розбиваючи на блоки матрицю PLQ , систему (53) записуємо у вигляді

$$\varepsilon^h \begin{pmatrix} V_m^* B U_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} V_m^* L U_m & V_m^* L \tilde{\phi} \\ \tilde{\psi}^* L U_m & (L \tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \end{pmatrix} z. \quad (54)$$

Розглянемо матрицю $V_m^* B U_m$. Враховуючи структуру матриць V_m^*, U_m , маємо

$$V_m^* B U_m =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} (B u_m^{(1)}, v_m^{(1)}) & \dots & (B u_m^{(p)}, v_m^{(1)}) \\ \dots & I & \dots \\ (B u_m^{(1)}, v_m^{(p)}) & \dots & (B u_m^{(p)}, v_m^{(p)}) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (B \tilde{u}_m^{(1)}, v_m^{(1)}) & \dots & (B \tilde{u}_m^{(q-1)}, v_m^{(1)}) \\ \dots & II & \dots \\ (B \tilde{u}_m^{(1)}, v_m^{(p)}) & \dots & (B \tilde{u}_m^{(q-1)}, v_m^{(p)}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (B u_m^{(1)}, \tilde{v}_m^{(1)}) & \dots & (B u_m^{(p)}, \tilde{v}_m^{(1)}) \\ \dots & III & \dots \\ (B u_m^{(1)}, \tilde{v}_m^{(q-1)}) & \dots & (B u_m^{(p)}, \tilde{v}_m^{(q-1)}) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (B \tilde{u}_m^{(1)}, \tilde{v}_m^{(1)}) & \dots & (B \tilde{u}_m^{(q-1)}, \tilde{v}_m^{(1)}) \\ \dots & IV & \dots \\ (B \tilde{u}_m^{(1)}, \tilde{v}_m^{(q-1)}) & \dots & (B \tilde{u}_m^{(q-1)}, \tilde{v}_m^{(q-1)}) \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Отже, матриця $V_m^*BU_m$ розбивається на блоки, елементи кожного з яких визначаються окремими формулами.

Розглянемо перший блок. Його елементи мають вигляд

$$(V_m^*BU_m)_{ij} = (Bu_m^{(j)}(t, \varepsilon), v_m^{(i)}(t, \varepsilon)), \quad i, j = \overline{1, p}. \quad (55)$$

Підставляючи в (55) вирази (46), (49) та вирази (16), (21), (33), (34) для векторів $u_k^{(j)}$, $v_k^{(i)}$, $k = \overline{0, m}$, і беручи до уваги співвідношення (6), (7), дістаємо

$$(V_m^*BU_m)_{ij} = \mu^{p-1} \sum_{s=0}^{p-1} (-1)^s (\lambda_1^{(j)})^s (\bar{\eta}_1^{(i)})^{p-1-s} + O(\mu^p), \quad i, j = \overline{1, p}.$$

Звідси, враховуючи (43), одержуємо

$$(V_m^*BU_m)_{ij} = \mu^{p-1} (-1)^{p-1} \sum_{s=0}^{p-1} (\lambda_1^{(j)})^s (\lambda_1^{(i)})^{p-1-s} + O(\mu^p), \quad i, j = \overline{1, p}.$$

Якщо $i \neq j$, то

$$\sum_{s=0}^{p-1} (\lambda_1^{(j)})^s (\lambda_1^{(i)})^{p-1-s} = \frac{(\lambda_1^{(i)})^p - (\lambda_1^{(j)})^p}{\lambda_1^{(i)} - \lambda_1^{(j)}} = 0,$$

оскільки $(\lambda_1^{(i)})^p = (\lambda_1^{(j)})^p = (K\phi, \psi)$.

Якщо ж $i = j$, то

$$\sum_{s=0}^{p-1} (\lambda_1^{(j)})^s (\lambda_1^{(i)})^{p-1-s} = p(\lambda_1^{(j)})^{p-1}.$$

Отже, елементи блоку I визначаються за формулами

$$(V_m^*BU_m)_{ij} = \begin{cases} O(\mu^p) & \text{при } i \neq j; \\ \mu^{p-1} (-1)^p p (\lambda_1^{(i)})^{p-1} + O(\mu^p) & \text{при } i = j, \quad i = \overline{1, p}. \end{cases}$$

Розглянемо елементи четвертого блоку. Кожен елемент цього блоку можна подати у вигляді

$$(V_m^*BU_m)_{ij} = (B\tilde{u}_m^{(j)}(t, \varepsilon), \tilde{v}_m^{(i)}(t, \varepsilon)), \quad i, j = \overline{1, q-1}. \quad (56)$$

Підставляючи в (56) вирази (47), (50) для $\tilde{u}_m^{(j)}$, $\tilde{v}_m^{(i)}$ та формули (23), (24), (32), (40) для $\tilde{u}_k^{(j)}$, $\tilde{v}_k^{(i)}$, $k = \overline{0, m}$, маємо

$$(V_m^*BU_m)_{ij} = \nu^q \sum_{s=1}^{q-1} (-1)^s (\xi_0^{(j)})^s (\bar{\zeta}_0^{(i)})^{q-s} + O(\nu^{q+1}), \quad i, j = \overline{1, q-1}.$$

Враховуючи (44), знаходимо

$$(V_m^*BU_m)_{ij} = \nu^q \sum_{s=1}^{q-1} (\xi_0^{(j)})^s (\xi_0^{(i)})^{q-s} + O(\nu^{q+1}), \quad i, j = \overline{1, q-1}.$$

Якщо $i \neq j$, то

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{q-1} (\xi_0^{(j)})^s (\xi_0^{(i)})^{q-s} &= \frac{(\xi_0^{(j)})^{q+1} - (\xi_0^{(i)})^{q+1}}{\xi_0^{(j)} - \xi_0^{(i)}} - [(\xi_0^{(j)})^q + (\xi_0^{(i)})^q] = \\ &= \xi_0^{q-1} (\xi_0^{(j)} + \xi_0^{(i)}) - \xi_0^{q-1} (\xi_0^{(j)} + \xi_0^{(i)}) = 0, \end{aligned}$$

оскільки $(\xi_0^{(i)})^{q-1} = (\xi_0^{(j)})^{q-1} = (A_1 \tilde{\phi}, \tilde{\psi})$.

Якщо ж $i = j$, то

$$\sum_{s=1}^{q-1} (\xi_0^{(i)})^s (\xi_0^{(i)})^{q-s} = (q-1)(\xi_0^{(i)})^q.$$

Отже елементи блоку IV мають вигляд

$$(V_m^*BU_m)_{ij} = \begin{cases} O(\nu^{q+1}) & \text{при } i \neq j; \\ \nu^q (q-1)(\xi_0^{(i)})^q + O(\nu^{q+1}) & \text{при } i = j, \quad i = \overline{1, q-1}. \end{cases}$$

Розглянемо елементи блоку II, які визначаються за формулою

$$(V_m^*BU_m)_{ij} = (B\tilde{u}_m^{(j)}(t, \varepsilon), v_m^{(i)}(t, \varepsilon)), \quad j = \overline{1, q-1}, \quad i = \overline{1, p}.$$

Згідно з (46), (49), (23), (24), (33), (34)

$$(B\tilde{u}_m^{(j)}, v_m^{(i)}) = \sum_{k=1}^{q-1} \sum_{s=0}^{p-1} \nu^k \mu^s \sum_{r=1}^k \sum_{l=0}^s (-1)^l P_r^{k-r}(\xi^{(j)}) P_1^s(\eta^{(i)}) (B\tilde{\phi}_{j+1}, \psi_{i+1}) + O(\varepsilon\nu),$$

звідки, беручи до уваги співвідношення [3, с. 35]

$$(B\tilde{\phi}_j, \psi_i) = 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, q},$$

дістаємо

$$(V_m^*BU_m)_{ij} = O(\varepsilon\nu), \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, q-1}.$$

Аналогічний вираз одержуємо і для елементів третього блоку.

Таким чином, матриця $V_m^*BU_m$ набирає вигляду

$$V_m^*BU_m = \begin{pmatrix} \mu^{p-1} \begin{pmatrix} p(\lambda_1^{(1)})^{p-1} & \dots & O(\mu) \\ \dots & I & \dots \\ O(\mu) & \dots & p(\lambda_1^{(p)})^{p-1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} O(\varepsilon\nu) & \dots & O(\varepsilon\nu) \\ \dots & II & \dots \\ O(\varepsilon\nu) & \dots & O(\varepsilon\nu) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} O(\varepsilon\nu) & \dots & O(\varepsilon\nu) \\ \dots & III & \dots \\ O(\varepsilon\nu) & \dots & O(\varepsilon\nu) \end{pmatrix} & \nu^q \begin{pmatrix} (q-1)(\xi_0^{(1)})^q & \dots & O(\nu) \\ \dots & IV & \dots \\ O(\nu) & \dots & (q-1)(\xi_0^{(q-1)})^q \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Згідно з (18), (26) визначник цієї матриці відмінний від нуля при достатньо малих $\varepsilon > 0$.

Для спрощення подальших викладок введемо малий параметр $\tilde{\varepsilon}$, який дає можливість пов'язати між собою параметри μ та ν , поклавши

$$\tilde{\varepsilon}^{p(q-1)} = \varepsilon. \quad (57)$$

Тоді $\mu = \tilde{\varepsilon}^{q-1}$, $\nu = \tilde{\varepsilon}^p$. Матриця $V_m^*BU_m$ має полюс у точці $\tilde{\varepsilon} = 0$, порядок якого дорівнює pq .

Зазначимо, що згідно з (7) $(L\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = ((A(t, \varepsilon) - \varepsilon^h B(t))\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = (A(t, \varepsilon)\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = \varepsilon(A_1\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) + O(\varepsilon^2)$ і, отже, $(L\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \neq 0$ при досить малих $\varepsilon > 0$, а в точці $\varepsilon = 0$ має полюс порядку 1, який з урахуванням (57) для $\tilde{\varepsilon}$ дорівнює $p(q-1)$.

Помноживши систему рівнянь (54) на матрицю

$$\text{diag}\{(V_m^*BU_m)^{-1}, (L\tilde{\phi}, \tilde{\psi})^{-1}\},$$

дістанемо

$$\varepsilon^h \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} (V_m^*BU_m)^{-1}V_m^*LU_m & (V_m^*BU_m)^{-1}V_m^*L\tilde{\phi} \\ (L\tilde{\phi}, \tilde{\psi})^{-1}\tilde{\psi}^*LU_m & 1 \end{pmatrix} z. \quad (58)$$

Позначимо

$$z = \text{col}[z_1; z_2],$$

де z_1 — $(n-1)$ -вимірний вектор, координатами якого є перші $n-1$ координат вектора $z(t, \varepsilon)$; z_2 — остання n -та координата цього вектора. Система рівнянь (58) розпадається на два рівняння:

$$\begin{aligned} \varepsilon^h \frac{dz_1}{dt} &= ((V_m^*BU_m)^{-1}V_m^*LU_m)z_1 + ((V_m^*BU_m)^{-1}V_m^*L\tilde{\phi})z_2, \\ 0 &= ((L\tilde{\phi}, \tilde{\psi})^{-1}\tilde{\psi}^*LU_m)z_1 + z_2. \end{aligned} \quad (59)$$

Оскільки

$$\begin{aligned} Lu_m^{(i)}(t, \varepsilon) &= \lambda_m^{(i)}(t, \varepsilon)B(t)u_m^{(i)}(t, \varepsilon) + O(\mu^{m+1}), \quad i = \overline{1, p}, \\ B(t)\tilde{u}_m^{(j)}(t, \varepsilon) &= \xi_m^{(j)}(t, \varepsilon)L\tilde{u}_m^{(j)}(t, \varepsilon) + O(\nu^{m+1}), \quad j = \overline{1, q-1}, \end{aligned}$$

маємо

$$L(t, \varepsilon)U_m(t, \varepsilon) = B(t)U_m(t, \varepsilon)S_m(t, \varepsilon) + \tilde{\varepsilon}^{m+1}C_1(t, \varepsilon),$$

де

$$S_m(t, \varepsilon) = \text{diag} \{s_m^{(1)}(t, \varepsilon); \dots; s_m^{(n-1)}(t, \varepsilon)\} = \text{diag} \{\Lambda_m(t, \varepsilon); \Xi_m(t, \varepsilon)\},$$

$$\Lambda_m(t, \varepsilon) = \{\lambda_m^{(1)}; \lambda_m^{(2)}; \dots; \lambda_m^{(p)}\},$$

$$\Xi_m(t, \varepsilon) = \{(\nu\xi_m^{(1)})^{-1}; (\nu\xi_m^{(2)})^{-1}; \dots; (\nu\xi_m^{(q-1)})^{-1}\},$$

а $C_1(t, \varepsilon)$ — деяка $n \times (n-1)$ -вимірنا матриця, рівномірно обмежена на $[0; \omega]$. Беручи до уваги (57), отримуємо

$$(V_m^*BU_m)^{-1}V_m^*LU_m = S_m(t, \varepsilon) + \tilde{\varepsilon}^{m+1-pq}C_2(t, \varepsilon),$$

$$(L\tilde{\phi}, \tilde{\psi})^{-1}\tilde{\psi}^*LU_m = -\tilde{\varepsilon}^{m+1-p(q-1)}c(t, \varepsilon).$$

Тут $C_2(t, \varepsilon)$ — $(n-1) \times (n-1)$ -вимірна матриця, $c(t, \varepsilon)$ — вектор-рядок, складений з $n-1$ координат.

Після перетворень система (59) набере вигляду

$$\varepsilon^h \frac{dz_1}{dt} = [S_m + \tilde{\varepsilon}^{m+1-pq}C_2(t, \varepsilon)]z_1 + (V_m^*BU_m)^{-1}V_m^*L\phi z_2,$$

$$z_2 = \tilde{\varepsilon}^{m+1-p(q-1)}c(t, \varepsilon)z_1.$$

Підставляючи друге рівняння в перше, отримуємо

$$\varepsilon^h \frac{dz_1}{dt} = [S_m + \tilde{\varepsilon}^{m+1-pq}D(t, \varepsilon)]z_1, \tag{60}$$

де $D(t, \varepsilon)$ — квадратна матриця $(n-1)$ -го порядку, рівномірно обмежена на $[0; \omega]$.

Припустимо тепер, що функції $\text{Re}[s_m^{(j)}(t, \varepsilon) - s_m^{(i)}(t, \varepsilon)]$ не змінюють знак на $[0; \omega]$, де

$$s_m^{(j)}(t, \varepsilon) = \lambda_m^{(j)}(t, \varepsilon), \quad j = \overline{1, p},$$

$$s_m^{(j)}(t, \varepsilon) = (\nu\xi_m^{(j-p)}(t, \varepsilon))^{-1}, \quad j = \overline{p+1, n-1}.$$

Виконуючи в системі (60) заміну

$$z = \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t s_m(j)(t, \varepsilon) dt \right) w_j, \quad j = \overline{1, n-1}, \tag{61}$$

маємо

$$\varepsilon^h \frac{dw_j}{dt} = (S_m(t, \varepsilon) - s_m^{(j)}(t, \varepsilon)E_{n-1})w_j + \tilde{\varepsilon}^{m+1-pq}D(t, \varepsilon)w_j, \quad (62)$$

де E_{n-1} — одинична матриця $(n-1)$ -го порядку. Позначаючи

$$K_j(t, \tau, \varepsilon) = \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_{\tau}^t (S_m(s, \varepsilon) - s_m^{(j)}(s, \varepsilon)E_{n-1}) ds \right),$$

від системи (62) переходимо до системи інтегральних рівнянь

$$w_j(t, \varepsilon) = e_j + \tilde{\varepsilon}^{m+1-h'-pq} \int_{\alpha}^t K_j(t, \tau, \varepsilon) D(\tau, \varepsilon) w_j(\tau, \varepsilon) d\tau, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad (63)$$

у яких $h' = p(q-1)h$, e_j — $(n-1)$ -вимірний вектор, j -та координата якого дорівнює 1, а решта — нулі, $\alpha = \text{col}[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}]$, причому

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & \text{Re}[s_m^{(i)} - s_m^{(j)}] \leq 0; \\ \omega, & \text{Re}[s_m^{(i)} - s_m^{(j)}] > 0. \end{cases}$$

Так само, як і в [2], можна довести, що розв'язок системи (63) задовольняє систему (62) і що система інтегральних рівнянь (63) має сумісний розв'язок. Його можна знайти методом послідовних наближень, поклавши

$$w_j^{(0)}(t, \varepsilon) = 0,$$

$$w_j^{(k)}(t, \varepsilon) = e_j + \tilde{\varepsilon}^{m+1-h'-pq} \int_{\alpha}^t K_j(t, \tau, \varepsilon) D(\tau, \varepsilon) w_j^{(k-1)}(\tau, \varepsilon) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots \quad (64)$$

Переходячи в (64) до границі при $k \rightarrow \infty$ і беручи до уваги обмеженість наближень $w_j^{(k)}(t, \varepsilon)$, дістаємо

$$w_j(t, \varepsilon) = e_j + \tilde{\varepsilon}^{m+1-h'-pq} d_j(t, \varepsilon),$$

де $d_j(t, \varepsilon)$ — деяка рівномірно обмежена вектор-функція. Тоді згідно з (61) матимемо такі асимптотичні формули для $n-1$ лінійно незалежних розв'язків системи (60):

$$z_1^{(j)}(t, \varepsilon) = (e_j + \tilde{\varepsilon}^{m+1-h'-pq} d_j(t, \varepsilon)) \exp \left(\tilde{\varepsilon}^{-h'} \int_0^t s_m^{(j)}(\tau, \varepsilon) d\tau \right), \quad j = \overline{1, n-1}.$$

У свою чергу з (60) одержимо

$$z_2^{(j)}(t, \varepsilon) = \tilde{\varepsilon}^{m+1-p(q-1)} c(t, \varepsilon) z_1^{(j)}(t, \varepsilon), \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Склавши з вектор-стовпців $z_j(t, \varepsilon) = \text{col}[z_1^{(j)}(t, \varepsilon), z_2^{(j)}(t, \varepsilon)]$, $j = \overline{1, n-1}$, прямокутну матрицю розмірності $(n-1) \times n$ і врахувавши (51), (52), отримаємо асимптотичний вираз для фундаментальної матриці системи (9):

$$X(t, \varepsilon) = [U_m(t, \varepsilon) + O(\tilde{\varepsilon}^{m+1-h'-pq})] \exp \left(\tilde{\varepsilon}^{-h'} \int_0^t S_m(\tau, \varepsilon) d\tau \right). \quad (65)$$

Дослідивши аналогічним чином спряжену систему (10), знайдемо відповідну асимптотичну формулу і для її фундаментальної матриці:

$$Y(t, \varepsilon) = [V_m(t, \varepsilon) + O(\tilde{\varepsilon}^{m+1-h'-pq})] \exp \left(-\tilde{\varepsilon}^{-h'} \int_0^t \bar{S}_m(\tau, \varepsilon) d\tau \right). \quad (66)$$

Розглянемо тепер матрицю монодромії (8). Припустимо, що

$$\text{Re} [\lambda_m^{(i)}(t, \varepsilon)] \leq 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad \text{Re} [\xi_m^{(j)}(t, \varepsilon)] \leq 0, \quad j = \overline{1, q-1}.$$

Підставляючи у (8) вирази (65), (66) і використовуючи властивість оберненої матриці: якщо матриця A обмежена, то $[A + O(\varepsilon^k)]^{-1} = A^{-1} + O(\varepsilon^k)$, отримуємо

$$\begin{aligned} \Omega &= (V_m^*(0, \varepsilon) + O(\tilde{\varepsilon}^{m+1-h'-pq})) B(0) (U_m(\omega, \varepsilon) + \\ &+ O(\tilde{\varepsilon}^{m+1-h'-pq})) \left[\exp \left(\tilde{\varepsilon}^{-h'} \int_0^\omega S_m(t, \varepsilon) dt \right) \right] \times \\ &\times ((V_m^*(0, \varepsilon) + O(\tilde{\varepsilon}^{m+1-h'-pq})) B(0) (U_m(0, \varepsilon) + O(\tilde{\varepsilon}^{m+1-h'-pq})))^{-1}. \end{aligned}$$

Розкриваючи дужки та враховуючи, що $U_m(\omega, \varepsilon) = U_m(0, \varepsilon)$, маємо

$$\Omega = V_m^* B U_m \left[\exp \left(\tilde{\varepsilon}^{-h'} \int_0^\omega S_m(t, \varepsilon) dt \right) + O(\tilde{\varepsilon}^{m+1-h'-pq}) \right] (V_m^* B U_m)^{-1},$$

звідки випливає, що Ω подібна до матриці $\exp \left(\tilde{\varepsilon}^{-h'} \int_0^\omega S_m(t, \varepsilon) dt \right) + O(\tilde{\varepsilon}^{m+1-h'-pq})$. Звідси знаходимо асимптотичні формули для мультиплікаторів системи (9):

$$\rho_i = \exp \left(\tilde{\varepsilon}^{-h'} \int_0^\omega s_m^{(i)}(t, \varepsilon) dt \right) + O(\tilde{\varepsilon}^{m+1-h'-pq}), \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Основні результати. Підсумовуючи наведені дослідження та використовуючи результати роботи [3], одержуємо таку теорему.

Теорема 1. Нехай

$$(A_1\phi, \psi) - \delta_{h,1}(B\phi', \psi) \neq 0, \quad (A_1\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \neq 0, \quad \forall t \in [0; \omega]$$

і для деякого натурального $m > hp(q-1) + pq - 1$ та $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ виконуються такі умови:

1) функції

$$\operatorname{Re}[s_m^{(j)}(t, \varepsilon) - s_m^{(i)}(t, \varepsilon)], \quad i, j = \overline{1, n-1},$$

не змінюють знак на $[0, \omega]$;

$$2) \operatorname{Re}[\lambda_m^{(i)}(t, \varepsilon)] \leq 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad \operatorname{Re}[\xi_m^{(j)}(t, \varepsilon)] \leq 0, \quad j = \overline{1, q-1}.$$

Тоді якщо всі числа

$$\alpha_i = \int_0^\omega (s_m^{(i)}(t, \varepsilon)) dt, \quad i = \overline{1, n-1},$$

відмінні від нуля при $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$, то при досить малих ε система (9) не має ω -періодичного розв'язку, крім тривіального, а неоднорідна система (1) має єдиний ω -періодичний розв'язок.

Припустимо тепер, що виконуються всі умови теореми 1, і розглянемо питання про побудову асимптотики ω -періодичного розв'язку системи (1).

Справедлива така теорема.

Теорема 2. Якщо виконуються умови теореми 1 і власне значення λ_0 в'язки матриць $A_0(t) - \lambda B(t)$ відмінне від нуля при всіх $t \in R$, то система (1) має єдиний ω -періодичний розв'язок, який зображується у вигляді асимптотичного розвинення

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t). \quad (67)$$

Доведення. Підставляючи (67) у систему (1) прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε , дістаємо

$$A_0(t)x_k = b_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де

$$b_k(t) = -f_k - \sum_{i=1}^k A_i x_{k-i} + Bx'_{k-h}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (68)$$

Оскільки $\det A_0(t) \neq 0 \quad \forall t \in R$, а вираз (68) для вектора $b_k(t)$ містить тільки ті $x_i(t)$, індекси яких менші k , звідси одержуємо таку рекурентну формулу для визначення коефіцієнтів розвинення (67):

$$x_k = A_0^{-1}(t)b_k(t), \quad k = 0, 1, \dots \quad (69)$$

Завдяки періодичності вектор-функцій $f_k(t)$ та матричних функцій $A_k(t)$, $B(t)$ всі коефіцієнти розвинення (67), які визначаються за формулою (69), будуть ω -періодичними. Отже, розвинення (68) є формальним ω -періодичним розв'язком системи (1).

За допомогою методів, наведених у [7], можна показати, що виконання умови 2 теореми 1 забезпечує асимптотичний характер цього розв'язку. А саме, якщо $\tilde{x}(t, \varepsilon)$ — точний ω -періодичний розв'язок системи (1), існування якого стверджується в теоремі 1, а $x_m(t, \varepsilon)$ — m -те наближення, яке утворюється з розвинення (67) шляхом його обривання на m -му члені, то має місце асимптотична оцінка

$$\|\tilde{x}(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{m+1},$$

де c — деяка стала, що не залежить від ε . Теорему доведено.

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
2. Яковець Ф.Р., Акименко А.М. Про періодичні розв'язки вироджених сингулярно збурених лінійних систем диференціальних рівнянь// Наук. зап. НДПУ ім. М.В. Гоголя. Природничі та фіз.-мат. науки. — 1998. — С. 154–169.
3. Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
4. Яковець В.П. Деякі властивості вироджених лінійних систем// Укр. мат. журн. — 1997. — **49**, № 9. — С. 1278–1296.
5. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
6. Sibuya Y. Some global properties of matrixes of functions of one variable// Math. Ann. — 1965. — **161**, № 1. — P. 67–77.
7. Шкіль Н.И., Старун И.И., Яковець В.П. Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — Киев: Выща шк., 1991. — 207 с.

Одержано 17.01.2001