УДК 517.9

КОНТРПРИМЕРЫ К ГИПОТЕЗЕ ЛЮБИЧА О ГЛАДКОМ ОТОБРАЖЕНИИ

В.Е. Слюсарчук

Укр. акад. водн. хоз-ва,
Украина, 266000, Ривнэ, ул. Соборная, 11

We construct the differentable mappings $T_k : X \to X$, $k = \overline{1,2}$, where X is compact convex supset $\mathbb{R}^2$, such that $\rho(T_k'(x)) < 1$, $k = \overline{1,2}$, for all $x \in X$ and sequences $\{T_k^n x_0\}_{n \geq 1}$, $k = \overline{1,2}$ diverge for some $x_0 \in X$.

Побудовані гладкі відображення $T_k : X \to X$, $k = \overline{1,2}$, де X — компактна опукла підмножина $\mathbb{R}^2$, для яких $\rho(T_k'(x)) < 1$, $k = \overline{1,2}$, для всіх $x \in X$ і послідовності $\{T_k^n x_0\}_{n \geq 1}$, $k = \overline{1,2}$, розбігаються для деяких $x_0 \in X$.

Пусть X — выпуклый компакт в конечномерном банаховом пространстве E, $T : X \to$ $\to X$ — непрерывно дифференцируемое отображение, $T'(x)$ — производная отображения T в точке $x \in X$ и $\rho(T'(x))$ — ее спектральный радиус.

В [1, с. 35] выдвинута следующая **гипотеза**:

если $\max\limits_{x \in X} \rho(T'(x)) < 1$, то неподвижная точка отображения T единственна и итерационный процесс $x_{k+1} = Tx_k$, $k = 0, 1, \ldots$, сходится к ней при любом $x_0 \in X$.

Приведем контрпримеры, опровергающие эту гипотезу.

Контрпример 1. В качестве E возьмем пространство матриц-столбцов

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

где x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$, с нормой $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Рассмотрим нильпотентные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что для каждого $\delta \in [0, 1]$ спектр матрицы $\delta A + (1 - \delta)B$ есть множество $\{i\sqrt{\delta - \delta^2}, -i\sqrt{\delta - \delta^2}\}$. Поэтому

$$\max_{0 \leq \delta \leq 1} \rho(\delta A + (1 - \delta)B) = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Возьмем такое число $\mu \in (1, 4)$, чтобы

$$\mu \sin^4 \frac{\pi\sqrt{\mu}}{2} = 1. \tag{2}$$

На основании теоремы Больцано – Коши [2, с. 171] множество таких чисел непусто, поскольку непрерывно дифференцируемая на [1, 4] функция $f(t) = t \sin^4 \dfrac{\pi\sqrt{t}}{2}$ удовлетворяет условиям $f(1) = 1$, $f(4) = 0$ и $f'(1) > 0$.

Определим отображение $T : E \to E$ равенством

$$T(x) = C_m(x)x,$$

в котором

$$C_m(x) = \begin{cases} \sqrt{\mu} t_m(x) B, & \text{если} \quad \|x\| < \mu^m; \\ \sqrt{\mu} u_m(x)(v(x)A + w(x)B), & \text{если} \quad \mu^m \le \|x\| \le 2\mu^m; \\ 0, & \text{если} \quad \|x\| > 2\mu^m, \end{cases}$$

где

$$t_m(x) = \begin{cases} \cos^2 \dfrac{\pi\|x\|}{\mu^m}, & \text{если} \quad \dfrac{\mu^m}{2} \le \|x\| < \mu^m; \\ 0, & \text{если} \quad \|x\| < \frac{\mu^m}{2}, \end{cases}$$

$$u_m(x) = \sin^4 \frac{\pi\|x\|}{2\mu^m}, \; v(x) = \sin^2 \frac{\pi \ln \|x\|}{\ln \mu} \quad \text{и} \quad w(x) = 1 - v(x).$$

Это отображение, очевидно, является C^1-отображением и для него выполняется соотношение

$$\max_{x \in E} \rho(C_m(x)) = \frac{\sqrt{\mu}}{2} < 1$$

для каждого $m \in \mathbb{N}$ (на основании (1)).

Пусть $\gamma \in \left(\dfrac{\sqrt{\mu}}{2}, 1\right)$. Поскольку множество $\{C_m(x) : m \ge 1, \; x \in E\}$ компактно, то найдется такое число $\varepsilon > 0$, что если для матрицы M в некоторых $m \ge 1$, $x \in E$ выполняется неравенство $\|M - C_m(x)\| \le \varepsilon$, то $\rho(M) \le \gamma$.

Из определения T следует

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{x \in E} \|C_m(x) - T'(x)\| = 0.$$

Поэтому

$$\max_{x \in E} \rho(T'(x)) \le \gamma \tag{3}$$

для достаточно большого m.

Предположим, что соотношение (3) выполняется при $m = m_0$.

Рассмотрим выпуклый компакт $X = \{x \in E : \|x\| \le 4\mu^{m_0}\}$ и отображение T при $m = m_0$. Тогда $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ — неподвижная и притягивающая точка отображения T, принадлежащая X, и итерационный процесс $x_{k+1} = Tx_k$, $k = 0, 1, \ldots$, сходится к 0 не для каждого $x_0 \in X$. Действительно, если

$$x_0 = \mu^{m_0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то

$$x_1 = \mu^{m_0+\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и согласно (2) $x_2 = x_0$, т.е. $\{x_0, x_1\}$ — цикл отображения $T : X \to X$. Поэтому последовательность $x_{k+1} = Tx_k$, $k = 0, 1, \ldots$, нефундаментальна, если

$$x_0 \in \left\{ \mu^{m_0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mu^{m_0+\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Аналогично нефундаментальной является последовательность $x_{k+1} = Tx_k$, $k = 0,\ 1, \ldots$, если

$$x_0 \in \left\{ \mu^{m_0} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mu^{m_0+\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

поскольку $\left\{ \mu^{m_0} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mu^{m_0+\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ — также цикл отображения $T : X \to X$.

Заметим, что в общем случае число циклов отображения T может быть больше произвольного числа $p \in \mathbb{N}$.

Это подтверждается примером отображения, рассмотренным в следующем контрпримере.

Контрпример 2. Рассмотрим последовательность натуральных чисел $m_1,\ m_2, \ldots$ $\ldots, m_n, \ldots$, для которой

$$\begin{aligned} &8\mu^{m_0} < \mu^{m_1}, \\ &8\mu^{m_1} < \mu^{m_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &8\mu^{m_n} < \mu^{m_{n+1}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4}$$

где m_0 и μ — те же числа, что и в предыдущем контпримере. Определим отображение $T : E \to E$ с помощью равенств

$$T(x) = C_{m_0}(x)x, \quad \text{если} \quad 0 \le \|x\| \le 4\mu^{m_0},$$

$$T(x) = C_{m_k}(x)x, \quad \text{если} \quad 4\mu^{m_{k-1}} \le \|x\| \le 4\mu^{m_k},\ k \ge 1.$$

Из (4) и определения $C_m(x)$ вытекает, что

$$\|T(x)\| = 0, \tag{5}$$

если $2\mu^{m_k} \le \|x\| \le 4\mu^{m_k}$, $k \in \mathbb{N}$, и отображение T является C^1-отображением. Согласно (3)

$$\sup_{x \in E} \rho(T'(x)) < 1,$$

а согласно (5) выполняется включение

$$TS_k \subset S_k$$

для каждого выпуклого компакта $S_k = \{x \in E : \|x\| \leq 4\mu^{m_k}\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Как и в предыдущем контрпримере, точка $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ является притягивающей для отображения T. Однако итерационный процесс $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, \ldots$, сходится к 0 не для каждого $x_0 \in E$.

Нетрудно проверить, что $\left\{\mu^{m_k}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu^{m_k+\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\mu^{m_k}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu^{m_k+\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$, $k \in N$, — циклы отображения T.

Итак, приведенные примеры отображений T опровергают рассмотренную гипотезу.

В заключение заметим, что рассмотренная гипотеза верна в случае выполнения следующего дополнительного условия: величина

$$\max_{x \in X} \|T'(T(x)) - T'(x)\|$$

является достаточно малой (см. теорему 1 [3]).

1. *Белицкий Г.Р., Любич Ю.И.* Нормы матриц и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1984. – 158 с.
2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.: Наука, 1966. – Т. 1. – 608 с.
3. *Слюсарчук В.Е.* Нелинейные разностные уравнения с асимптотически устойчивыми решениями //Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 7. – С. 970–980.

Получено 11.03.98