

Управляемый током многотерминальный СКВИД в нестационарном режиме

Е. Д. Вол, А. Н. Омелянчук

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины,
Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47
E-mail: omelyanchouk@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 26 декабря 1995 г.

Изучено нестационарное поведение многотерминального СКВИДа — сверхпроводящей микроструктуры специальной конфигурации. Рассчитаны зависимости напряжения в токовом канале от приложенного магнитного поля, а также полного магнитного потока, создаваемого СКВИДом, от времени. Показано, что в определенной области параметров многотерминальный СКВИД работает в режиме генератора квазипрямоугольных импульсов магнитного потока с перестраиваемой частотой.

Вивчено нестационарну поведінку багатотермінального СКВІДа — надпровідної микроструктури спеціальної конфігурації. Розраховано залежності напруги в струмовому каналі від прикладеного магнітного поля, а також повного магнітного потоку, створеного СКВІДом, від часу. Показано, що в певній області параметрів багатотермінальний СКВІД працює в режимі генератора квазіпрямокутних імпульсів магнітного потоку з перестроюваною частотою.

Статья посвящена изучению нестационарных режимов управляемого током многотерминального СКВИДа (МТСКВИД) [1], представляющего собой систему из двух связанных (имеющих общий центр) джозефсоновских микромостиков (рис. 1). В его токовом канале AOB протекает заданный транспортный ток I_e , а магнитный контур COD пронизывается внешним магнитным потоком Φ_e . МТСКВИД является частным случаем так называемых джозефсоновских многополюсников [2] — нелинейных параметрических элементов, управляемых токами и магнитным полем.

В работе [1] были изучены стационарные состояния МТСКВИДа и определена область в пространстве управляющих параметров (I_e, Φ_e) , где такие состояния реализуются. Целью настоящей работы является исследование динамического поведения МТСКВИДа, возникающего в случае, когда управляющий ток I_e превышает критическое значение $I_c(\Phi_e)$. При этом, как показано ниже, МТСКВИД представляет собой генератор автоколебаний магнитного потока, амплитудой, частотой и формой которых можно плавно управлять.

Состояние МТСКВИДа описывается динамическими переменными фазами φ_i ($i = 1, \dots, 4$) сверхпроводящего параметра порядка в i -м терми-

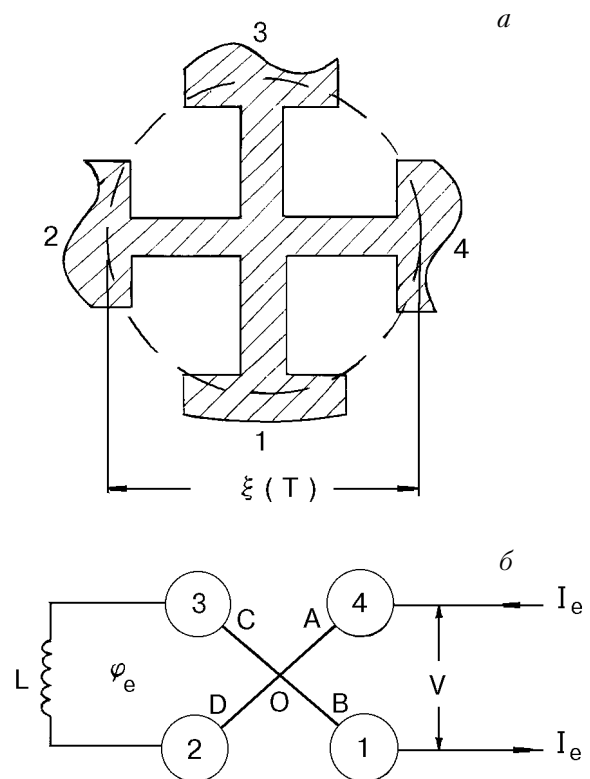


Рис. 1. Джозефсоновский многополюсник (а). Схематическое изображение МТСКВИДа (б).

нале. Система уравнений, описывающая эволюцию состояния МТСКВИДа в обозначениях работы [1], имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= J - \frac{k}{1+k} \sin \theta - \frac{2}{1+k} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \chi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\varphi_e - \varphi}{l} - \frac{\sin \varphi}{1+k} - \frac{2k}{1+k} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \chi, \\ \frac{d\chi}{dt} &= -\sin \chi \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\theta = \varphi_1 - \varphi_4$; $\varphi = \varphi_2 - \varphi_3$; $\chi = (\varphi_1 + \varphi_4)/2 - (\varphi_2 + \varphi_3)/2$; ток $J = I_e/I_{c1}$ нормирован на критический ток джозефсоновского перехода 1-4; $l = 2eLI_{c2}/\hbar$ — безразмерная индуктивность контура COD; параметр k равен отношению критических токов I_{c1}/I_{c2} и определяет силу связи между двумя джозефсоновскими микромостиками. Фазы φ и φ_e в (1) представляют собой соответственно полный и внешний магнитные потоки в контуре COD в единицах $\Phi_0/2\pi$ (Φ_0 — квант магнитного потока).

Система уравнений (1) содержит три нелинейных дифференциальных уравнения и не имеет явных интегралов движения. В общем случае такие модели обладают нетривиальной динамикой и в определенных областях значений параметров демонстрируют хаотическое поведение [3]. Однако система (1) обладает двумя специальными свойствами, вследствие которых хаотические режимы в данном случае отсутствуют, а все установившиеся режимы являются периодическими во времени.

Первое из этих свойств — градиентность системы (1), благодаря которой существует функция Ляпунова $U(\theta, \varphi, \chi)$ (см. [1]), ограниченная снизу по φ и θ и строго убывающая вдоль любой из траекторий системы (1):

$$\begin{aligned} U &= \frac{(\varphi - \varphi_e)^2}{2l(1+k)} - \frac{k\theta}{1+k} - \frac{\cos \varphi}{(1+k)^2} - \\ &- \frac{k^2 \cos \theta}{(1+k)^2} - \frac{4k \cos(\theta/2) \cos(\varphi/2) \cos \chi}{(1+k)^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Вторым свойством системы (1) является наличие у функции Ляпунова (2) двух экстремальных поверхностей $\chi = 0$ и $\chi = \pi$ (отвечающих $\partial U/\partial \chi = 0$), что приводит к существованию при всех значениях параметров двух классов частных решений $(\theta(t), \varphi(t), \chi)$ с $\chi = 0, \pi$. Теперь сформулируем два утверждения относительно поведения траекторий системы (1).

1. Все частные решения с $\chi = 0, \pi$ асимптотически выходят на периодические режимы (предельные циклы), характеристики которых (амплитуда, период и форма) не зависят от начального состояния (θ_0, φ_0) .

2. Другие решения системы (1) с $\chi \neq 0, \pi$ для всех значений параметров, кроме некоторых выделенных, притягиваются к одному из частных решений.

Отсюда следует, что МТСКВИД в нестационарном режиме после ряда переходных процессов, зависящих от его начального состояния, выходит на установившийся автоколебательный режим, характеристики которого определяются управляющими параметрами I_e и φ_e , а также значениями l и k . Исключения составляют предельные значения параметров, для которых могут существовать особые установившиеся решения (с $\chi(t) \neq 0, \pi$). Один пример особого решения будет рассмотрен ниже.

Перейдем теперь к доказательству высказанных утверждений. Прежде всего отметим, что решения с $\chi = 0, \pi$ однозначно соответствуют друг другу, поскольку система (1) обладает симметрией относительно замены переменных: $\theta \rightarrow \theta + 2\pi, \varphi \rightarrow \varphi, \chi \rightarrow \pi - \chi$. Из этой симметрии следует, что соответствующие решения двух классов одновременно устойчивы или неустойчивы. Поэтому в дальнейшем рассматриваем только частные решения с $\chi = 0$. Величины θ и φ для решений этого класса удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= J - \frac{k}{1+k} \sin \theta - \frac{2}{1+k} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\varphi_e - \varphi}{l} - \frac{\sin \varphi}{1+k} - \frac{2k}{1+k} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \quad (3)$$

которую можно записать в виде одного дифференциального уравнения с периодической по θ правой частью:

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\frac{\varphi_e - \varphi}{l} - \frac{\sin \varphi}{1+k} - \frac{2k}{1+k} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{J - \frac{k}{1+k} \sin \theta - \frac{2}{1+k} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} \quad (4)$$

(поскольку в нестационарном режиме $\dot{\theta} > 0$, знаменатель в (4) всегда положителен).

При изучении решений уравнений (4) можно, не ограничивая общности, считать значения φ_e находящимися в интервале $0 \leq \varphi_e \leq 2\pi$. При этом фазовое пространство уравнения (4) представляет собой цилиндр ($0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta < \infty$). Так как на границах цилиндра ($\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$) поле

скоростей $d\varphi/d\theta$ направлено внутрь области, где нет особых точек, из теории Пуанкаре-Бендиксона [4] следует, что при любых начальных условиях решение (4) выходит на устойчивое периодическое решение (предельный цикл) $\varphi(t + \tau) = \varphi(t)$, $\theta(t + \tau) = \theta(t) + 4\pi$. Физические характеристики устанавливающихся при этом автоколебаний (их период, амплитуда и форма) зависят от значений управляющих параметров J и φ_e , а также величин l и k . Что касается устойчивости данного предельного цикла в полном фазовом пространстве (θ, φ, χ) , то она, как это видно из уравнений (1), определяется знаком интеграла

$$i = \oint \cos \frac{\theta(t)}{2} \cos \frac{\varphi(t)}{2} dt,$$

взятого по указанному циклу: при $i > 0$ периодические решения с $\chi = 0$ устойчивы, а при $i < 0$ неустойчивы. Нетрудно установить устойчивость предельного цикла $\varphi(\theta)$ для тех значений параметров системы (1), при которых его форма известна, например для $\varphi_e = 0$. Рассмотрим интеграл, определяющий устойчивость цикла $\varphi = 0$:

$$i = \int_0^{4\pi} \frac{\cos \frac{\theta}{2} d\theta}{J - \frac{k}{1+k} \sin \theta - \frac{2}{1+k} \sin \frac{\theta}{2}}.$$

Представим его в виде ряда

$$i = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{4\pi} d\theta \frac{\cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{k \sin \theta}{1+k} + \frac{2 \sin \theta/2}{1+k} \right)^n}{J^{n+1}}.$$

Все слагаемые ряда с нечетными n обращаются в нуль, а слагаемые с четными n положительны (при $k > 0$). Следовательно, при $\varphi_e = 0$ предельный цикл $\varphi = 0$ устойчив. В силу непрерывности функции $i(\varphi_e, J)$ по φ_e ясно, что цикл останется устойчивым, лишь немного деформируясь, и при достаточно малых φ_e . Таким же образом доказывается устойчивость цикла при $\varphi_e = 2\pi$, а также в ситуации, когда функция $\varphi(\theta)$ медленно меняется за период колебаний. Однако в общем случае форма предельного цикла явно не известна и использовать прямой метод доказательства устойчивости не представляется возможным. Поэтому приведем аргумент, показывающий причину устойчивости частных решений и исключительность решений особых. Для этого запишем точное соотношение, следующее из (1):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left[\ln \frac{\sin^2 \theta/2}{(\sin \chi)^{2/(1+k)}} \right] &= \\ &= \frac{\text{ctg } \theta/2 (J - k \sin \theta/(1+k))}{d\theta/dt} \equiv F. \end{aligned} \quad (5)$$

При фиксированных начальных условиях функция F в (5) является заданной функцией t , а следовательно, и θ (поскольку $\dot{\theta} > 0$, между θ и t существует однозначное соответствие). Теперь предположим, что существует плотность вероятности $p(\theta) \geq 0$, $p(\theta + 4\pi) = p(\theta)$, определяющая распределение различных значений θ . Усредним соотношение (5) по θ :

$$\left\langle \frac{d}{d\theta} \ln \frac{\sin^2 \theta/2}{(\sin \chi)^{2/(1+k)}} \right\rangle_{\theta} \equiv \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} p(\theta) F(\theta) d\theta \equiv a. \quad (6)$$

Из (6) следует, что поведение типичной траектории системы (1) определяется знаком a . Случай $a < 0$ для конкретного вида системы (1) реализоваться не может, так как при этом функция $\sin^2(\theta/2)/(\sin \chi)^{2/(1+k)}$ должна стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$, что, очевидно, не возможно. Если $a > 0$, то из (6) с необходимостью следует, что $\sin \chi \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. данная траектория асимптотически приближается к частному решению. И наконец, существует вероятность случая $a = 0$, отвечающая особому решению. Однако ввиду отсутствия решений с $a < 0$ ясно, что такая ситуация может реализоваться лишь при некоторых предельных значениях параметров системы. Например, рассмотрим случай слабой связи $k \ll 1$. В пределе $k = 0$ система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= J - 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \chi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\varphi_e - \varphi}{l} - \sin \varphi, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = -\sin \chi \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2}.$$

В (7) фаза φ автономна и удовлетворяет такому же уравнению, как для обычного СКВИДа. Решения этого уравнения хорошо известны (см., например, [5]): при $t > l$, $\varphi \rightarrow \varphi(\varphi_e)$, где $\varphi(\varphi_e)$ — решение стационарного уравнения

$$\frac{\varphi_e - \varphi}{l} - \sin \varphi = 0. \quad (8)$$

При $l < 1$ функция $\varphi(\varphi_e)$ однозначна, а при $l > 1$ уравнение (8) в определенном интервале значений φ_e имеет три решения: $\varphi_1(\varphi_e) \leq \varphi_2(\varphi_e) \leq \varphi_3(\varphi_e)$. Решения φ_1 и φ_3 устойчивы (отвечают минимуму магнитной энергии $U = (\varphi - \varphi_e)^2/2l - \cos \varphi$), а одно неустойчиво. Реализация в контуре COD одного из устойчивых решений φ_1 или φ_3 при $l > 1$ в отсутствие флуктуаций определяется начальным значением φ_0 . Подставляя соответствующее предельное значение $\varphi(\varphi_e)$ в (7), для фаз θ и χ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= J - 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi(\varphi_e)}{2} \cos \chi, \\ \frac{d\chi}{dt} &= -\sin \chi \cos \frac{\varphi(\varphi_e)}{2} \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

В переменных $\alpha = \theta/2 + \chi$ и $\beta = \theta/2 - \chi$ система (9) разделяется:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{J}{2} - \sin \alpha \cos \frac{\varphi(\varphi_e)}{2}, \\ \frac{d\beta}{dt} &= \frac{J}{2} - \sin \beta \cos \frac{\varphi(\varphi_e)}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) следует, что в нестационарном режиме при $J > 2 \cos(\varphi(\varphi_e)/2)$ фазы $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, а следовательно, θ и χ зависят от времени с периодом

$$T = 2\pi \left[\frac{J^2}{4} - \cos^2 \frac{\varphi(\varphi_e)}{2} \right]^{-1/2}.$$

Экспериментально наблюдаемой величиной для МТСКВИДа является среднее по времени напряжение в токовом канале $V = \langle \dot{\varphi} \rangle / 2e$. Зависимость напряжения V (в единицах $\pi\Delta^2/(4eT_c)$) от приложенного магнитного потока φ_e при $k=0$ дается выражением

$$\begin{aligned} V &= \left\langle \frac{d\theta}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle + \left\langle \frac{d\beta}{dt} \right\rangle = \\ &= 2 \left(\frac{J^2}{4} - \cos^2 \frac{\varphi(\varphi_e)}{2} \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (11)$$

которое с учетом двузначности $\varphi(\varphi_e)$ при $l > 1$ показывает, что зависимость напряжения в токовом канале МТСКВИДа от внешнего магнитного потока φ_e в определенном интервале значений φ_e является двузначной функцией. Реально это означает, что при медленном изменении φ_e и $l > 1$ в системе наблюдается гистерезис, т. е. при увеличении магнитного потока от 0 до 2π при значении $\varphi_e^{(1)}$ происходит скачок напряжения с ветви 1 на ветвь 2, а при уменьшении φ_e от 2π до 0 при

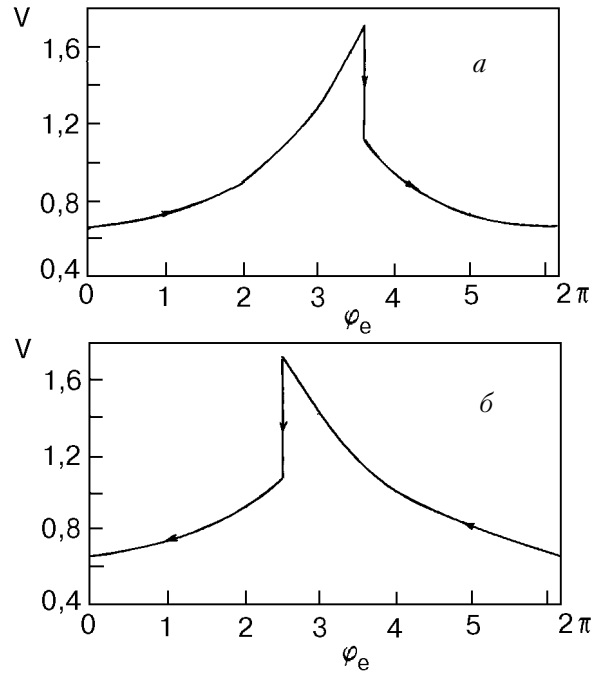


Рис. 2. Зависимость напряжения V (в единицах $\pi\Delta^2/(4eT_c)$) от приложенного магнитного потока φ_e (в единицах $\varphi_0/2\pi$) при увеличении φ_e от 0 до 2π (а) и при уменьшении φ_e от 2π до 0 (б), $J_e = 2,1$; $l = 2$; $k = 0$.

значении $\varphi_e^{(2)}$ — обратный скачок с ветви 2 на ветвь 1. Значения $\varphi_e^{(1),(2)}$ определяются из условия $(d\varphi/d\varphi_e)^{-1} = 0$ и даются выражением

$$\varphi_e^{(1),(2)} = \pi \pm \arccos \frac{1}{l^{\pm}} \sqrt{l^2 - 1}. \quad (12)$$

На рис. 2 представлены две ветви зависимости напряжения V в (11) от внешнего магнитного потока φ_e соответственно при увеличении (а) и уменьшении (б) внешнего магнитного поля. Напомним, что напряжение V является 2π -периодической функцией φ_e .

Далее по причинам, изложенным выше, будем рассматривать только установившиеся режимы МТСКВИДа, отвечающие частным решениям с $\chi = 0$. Следует, однако, подчеркнуть, что, хотя практически все решения уравнений (1) выходят на установившийся режим автоколебаний, во многих конкретных случаях величина константы a в (6) может быть достаточно малой и, следовательно, скорость релаксации фазы χ к «равновесному» значению будет очень медленной. В связи с этим переходные режимы в МТСКВИДе представляют самостоятельный интерес и заслуживают отдельного рассмотрения.

Что касается установившихся автоколебаний (с $\chi = 0$), то их характеристики (период, амплитуда и форма) определяются управляющими парамет-

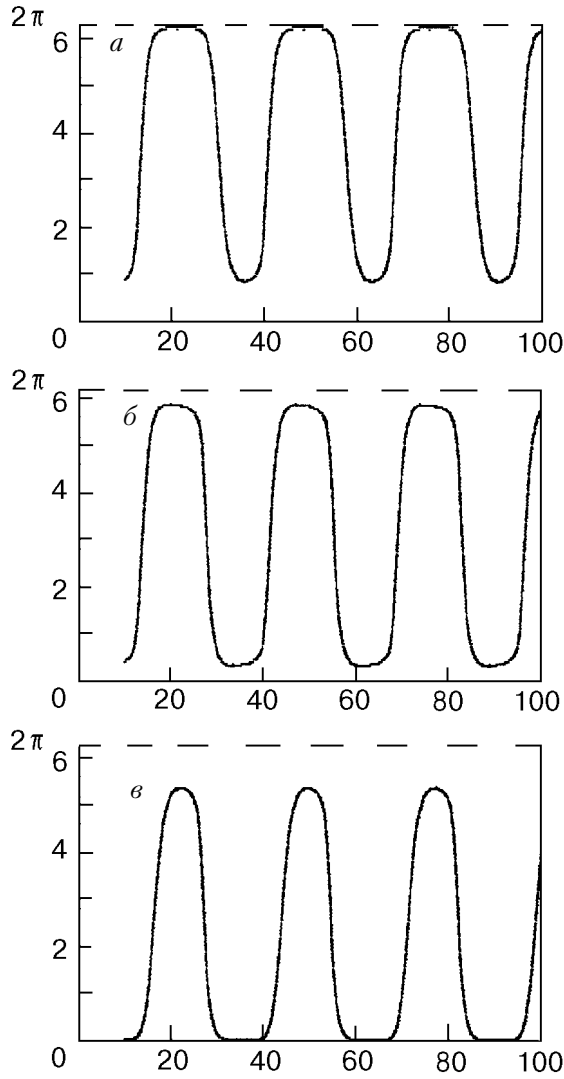


Рис. 3. Зависимость полного магнитного потока φ (в единицах $\varphi_0/2\pi$) от времени t (в единицах $2\hbar^- T_c/\pi\Delta^2$) при $J_e = 1,1$; $l = 10$; $k = \infty$ и различных значениях приложенного магнитного потока φ_e : $1,9\pi$ (а); π (б); $0,1\pi$ (в).

рами J и φ_e , а также значениями k и l . Период автоколебаний T (при не очень малых k) в основном зависит от величины транспортного тока J , а их форма и амплитуда — от соотношения между двумя характерными временами $t_1 = l$ и $t_2 = T$. Особенно наглядно это проявляется в случае сильной связи ($k \gg 1$), когда система (1) в нулевом приближении принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= J - \sin \theta, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\varphi_e - \varphi}{l} - 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

В данном случае сильной связи фаза θ автономна и совершает периодические колебания с периодом $T = 2\pi/(J^2 - 1)^{1/2}$. Напряжение в токовом

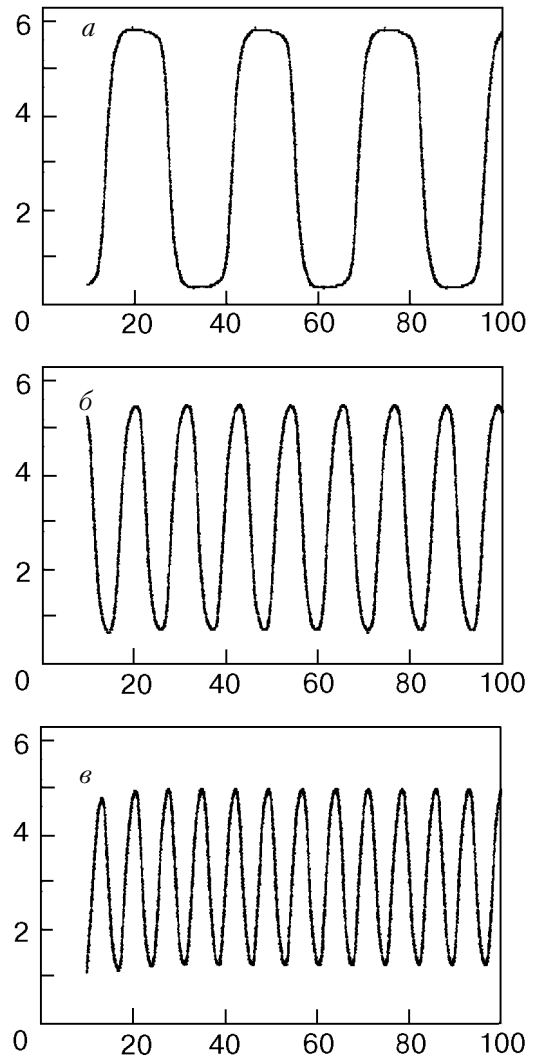


Рис. 4. Зависимость полного магнитного потока φ (в единицах $\varphi_0/2\pi$) от времени t (в единицах $2\hbar^- T_c/\pi\Delta^2$) при $\varphi_e = \pi$, $l = 10$; $k = \infty$ и различных значениях нормированного транспортного тока J_e : $1,1$ (а); $1,5$ (б); 2 (в).

канале $V = (\hbar^- / 2e)(J^2 - 1)^{1/2}$ не зависит от величины внешнего магнитного потока φ_e , а фаза φ колеблется с периодом $2T$, который и является периодом автоколебаний. Форма и амплитуда колебаний магнитного потока $\varphi(t)$ резко различаются в двух предельных случаях: $T \gg l$ и $T \ll l$.

При выполнении неравенства $T \gg l$ фаза φ является быстрой переменной и подстраивается к локальному значению θ . В этом случае форма предельного цикла $\varphi(\theta)$ может быть приближенно установлена из решения «замороженного» уравнения

$$\frac{\varphi_e - \varphi(\theta)}{l} - 2 \sin \frac{\varphi(\theta)}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 0. \quad (14)$$

Если $l < 1$, то имеется только одно решение уравнения (14) $\varphi(t) = \varphi(\theta(t))$. При $l > 1$ возникают два устойчивых решения φ_1 и φ_2 и при определенных значениях t происходят быстрые переключения с одной ветви $\varphi(t)$ на другую, они проявляются в виде характерных изломов на зависимости магнитного потока в кольце от времени. При выполнении двойного неравенства $T \gg l \gg 1$ эта зависимость приобретает особенно простой вид. В таком случае $\varphi_1 \approx 0$ и $\varphi_2 \approx 2\pi$ и магнитный поток попеременно принимает эти два значения, переключаясь в моменты времени, когда $\cos(\theta/2)$ обращается в нуль. Автоколебания МТСКВИДа при $T \gg l \gg 1$ имеют типичный релаксационный характер. Существенно, что форма возникающих автоколебаний почти не зависит от φ_e и сохраняется при $\varphi_e \rightarrow 0$. МТСКВИД работает при этом в режиме генератора квазипрямоугольных импульсов магнитного потока (с перестраиваемой частотой). В качестве иллюстрации приводим результаты численного решения системы уравнений (13) для различных значений внешнего магнитного потока φ_e (рис. 3) и транспортного тока J (рис. 4). Генерация релаксационных колебаний энергией транспортного тока представляется нам наиболее интересным эффектом с точки зрения возможного практического применения МТСКВИДа.

Если же между T и l выполняется обратное соотношение $T \ll l$, то существенного изменения

магнитного потока за период автоколебаний не происходит. При $l < 1$ величина $\varphi(t)$ осциллирует с малой амплитудой вокруг значения $\varphi = \varphi_e$, а при соотношении времен $T \ll 1 \ll l$ гистерезис существует, но выражен менее резко, поскольку фаза φ не успевает достигнуть своих «равновесных» значений.

1. R. de Bruyn Ouboter, A. N. Omelyanchouk, and E. D. Vol, *Physica* **B205**, 153 (1995).
2. Е. Д. Вол, А. Н. Омелянчук, *ФНТ* **20**, 107 (1994).
3. А. Лихтенберг, М. Либман, *Регулярная и стохастическая динамика*, Мир, Москва (1984).
4. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, *Теория колебаний*, Наука, Москва (1981).
5. К. К. Лихарев, *Введение в динамику джозефсоновских переходов*, Наука, Москва (1985).

The nonstationary behavior of a multi-terminal SQUID controlled by the transport current

E. D. Vol and A. N. Omelyanchouk

The nonstationary behavior of a multi-terminal SQUID (MTS) which is the superconducting microstructure of special configuration, has been studied. Dependence of the voltage in current channel on the applied magnetic field as well as that of the total magnetic flux in the ring on time, have been calculated. It is shown that within the specific domain of the controlling parameters the MTS behaves as a quasisquare wave form oscillator with a changeable frequency.