Физика низких температур, 1996, т. 22, № 7, с. 724–735

К теории явлений переноса в многокомпонентных квантовых системах

Е. А. Иванченко, В. В. Красильников, Ю. В. Слюсаренко

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»,
Украина, 310108, г. Харьков, ул. Академическая, 1

Статья поступила в редакцию 22 февраля 1996 г.

Развит метод для изучения явлений переноса в многокомпонентных квантовых системах с сохраняющимся квазиимпульсом. Получены общие выражения для коэффициентов вязкости, теплопроводности, диффузии квазичастиц. Рассмотрены колебания в таких системах. Показано, что затухание волн носит гидродинамический характер. В качестве приложения метода найдена температурная зависимость затухания второго звука в газе магнонов.

Розвинуто метод для вивчення явищ переносу в багатокомпонентних квантових системах, у яких зберігається квазіімпульс. Одержано загальні вирази для коефіцієнтів в'язкості, теплопровідності, дифузії квазічастинок. Розглянуто коливання у таких системах. Показано, що загасання хвиль носить гідродинамічний характер. Як застосування методу знайдено температурну залежність загасання другого звуку у газі магнонів.

Введение

Вычисление коэффициентов переноса является одной из центральных задач статистической механики. В настоящее время такое вычисление основывается в основном на знании операторов столкновений между частицами физической системы. Большой вклад в нахождение явного вида операторов столкновений внесен авторами работ [1–8]. В работе [9] показано, что знание лишь собственных векторов, соответствующих нулевым собственным значениям оператора столкновений L, достаточно для формального вычисления кинетических коэффициентов. Эти коэффициенты выражаются через матричные элементы оператора $(L - 0^+)^{-1}$.

В настоящей работе на основе общих свойств линеаризованного оператора столкновений (симметричность, отрицательная определенность, конечномерность ядра, соответствующего нулевым собственным значениям оператора L) развит метод сокращенного описания неравновесных процессов и вычисления кинетических коэффициентов в многокомпонентных квантовых системах в терминах обратного оператора столкновений.

1. Собственные функции и собственные значения линеаризованного оператора столкновений

Рассмотрим K-компонентную систему квазичастиц. С целью изучения явлений переноса в этой системе используем линеаризованное кинетическое уравнение для k-й компоненты (пусть для определенности компонента с $k = 1$ соответствует фермионам, а остальные компоненты — бозонам):

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial t} + i\Lambda_k\, \xi_k = L\xi_k \qquad (k = 1, 2, ..., K),$$

$$\Lambda_k = -\, i\, \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \mathbf{p}}\, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\ . \tag{1}$$

Здесь $\partial\varepsilon_k/\partial\mathbf{p} \equiv \mathbf{v}_k$ — групповая скорость частиц k-го сорта; $\varepsilon_k(\mathbf{p})$ — энергия частицы с импульсом $\mathbf{p}$; $f_k = -f_k^0(1 + \delta_k\, f_k^0)\xi_k$ — малые отклонения функции распределения от равновесной функции

$$f_k^0 = [\exp\,(\varepsilon_k - \mu_k) - \delta_k]^{-1}\ ,\quad \delta_k = \begin{cases} -1\,, & k = 1\ ; \\ \ \ 1\,, & k = 2, 3, ..., K\,, \end{cases}$$

$\mu_1 \equiv \mu$ — химический потенциал фермионов; $\mu_k = 0$ для $k = 2, 3, \ldots, K$; $\beta = T^{-1}$ — обратная температура. Линеаризованный оператор столкновений L определяется формулой

$$(L\xi)_k(\mathbf{p}) = \sum_{k'=1}^{K} \int d^3p' L_{kk'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\, \xi_{k'}(\mathbf{p}')$$

($L_{kk'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ — ядро линеаризованного оператора столкновений).

Оператор L эрмитов $(\xi^{(1)}, L\xi^{(2)}) = (L\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$ в скалярном произведении

$$(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) = \sum_{k=1}^{K} \int d^3p\, \xi_k^{(1)}(\mathbf{p})\xi_k^{(2)}(\mathbf{p}) f_k^0 (1 + \delta_k f_k^0)$$

и имеет полный набор собственных функций. Будем считать, что первые пять собственных функций оператора столкновений имеют нулевые собственные значения, так как имеется пять интегралов движения (число фермионов, энергия, импульс квазичастиц), обращающих интеграл столкновений в нуль. Остальные собственные значения, как можно показать с помощью H-теоремы Больцмана, отрицательны. Собственные функции χ^a и собственные значения λ^a оператора L подчиняются уравнению

$$L\chi^a = -\lambda^a \chi^a \ , \ \lambda^a > 0 \ .$$

Набор собственных функций можно выбрать ортонормированным во введенном скалярном произведении

$$(\chi^a, \chi^b) = \delta_{ab} \ ,$$

где δ_{ab} — символ Кронекера, $a = \alpha, q$; $\alpha =$ 0, 1, 2, 3, 4 и $q \geq 5$. Индексы 1, 2, 3 соответствуют закону сохранения импульса, 0 — закону сохранения энергии квазичастиц, 4 — сохранению числа фермионов.

Пусть закон дисперсии квазичастиц обладает такой симметрией, что $(p_i\ , p_k) = (1/3)\delta_{ik}(\mathbf{p}, \mathbf{p})$. Тогда ортонормированные векторы $\chi^\alpha(\mathbf{p})$ имеют следующий вид:

$$\chi^4 = (\delta, \delta)^{-1/2}\delta \ , \quad \chi^i = \sqrt{3}\,(\mathbf{p}, \mathbf{p})^{-1/2} p^i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

$$\chi^0 = \left\{ (\delta, \delta)\left[(\delta, \delta)(\varepsilon, \varepsilon) - (\delta, \varepsilon)^2\right]\right\}^{-1/2} \times$$

$$\times \left[(\delta, \delta)\varepsilon - (\varepsilon, \delta)\delta\right] \ ,$$

где p^i, δ, ε — векторы с компонентами p_k^i , δ_k , ε_k .

Чтобы учесть процессы переброса в системе квазичастиц, уравнение (1) запишем в виде [10]

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + i\Lambda\xi = L\xi + L^u \ , \tag{3}$$

где L^u — линеаризованный оператор столкновений, соответствующий процессам переброса. Нам удобнее переписать уравнение (3) в интегральной форме:

$$\xi(t) = \exp(Lt)\xi(0) -$$

$$- i \int_0^t d\tau \exp(L\tau)(\Lambda + iL^u)\xi(t - \tau) \ .$$

Отсюда, разлагая вектор ξ в ряд по собственным векторам χ^a, $\xi = \sum_a g_a(\mathbf{x}, t)\chi^a$, получаем систему уравнений для коэффициентов $g_a(\mathbf{x}, t)$:

$$g_a(\mathbf{x}, t) = g_a(\mathbf{x}, 0)\exp(-\lambda_a t) -$$

$$- i \int_0^t d\tau \sum_b (\chi^a, (\Lambda + iL^u)\chi^b) g_b(\mathbf{x}, t - \tau)\exp(-\lambda_a \tau). \tag{4}$$

В области больших времен $t >> \tau_r$ (τ_r — время релаксации системы)

$$g_a(t) \xrightarrow[t >> \tau_r]{} C_a(t) \ .$$

Функции $C_a(t)$ удовлетворяют, согласно выражению (4), уравнениям

$$C_q(t) = i\int_0^\infty d\tau \exp(-\lambda_q \tau)\left[\sum_{q'} (\Lambda_{qq'} + iL^u_{qq'})C_{q'}(t - \tau) + \right.$$

$$\left. + \sum_\alpha (\Lambda_{q\alpha} + iL^u_{q\alpha})C_\alpha(t - \tau)\right] \ , \tag{5}$$

$$\dot{C}_\alpha(t) = -i \sum_\beta (\Lambda_{\alpha\beta} + iL^u_{\alpha\beta})C_\beta(t) -$$

$$- i \sum_q (\Lambda_{\alpha q} + iL^u_{\alpha q})C_q(t) \ ,$$

$$L^u_{ab} \equiv (\chi^a, L^u\chi^b) \ , \quad \Lambda_{ab} \equiv (\chi^a, \Lambda\chi^b) \ .$$

Интегральные уравнения (5) удобны для итерирования по величине $\Lambda + iL^u$, содержащей градиент и учитывающей столкновения, обусловленные процессами переброса.

В дальнейшем будем считать характерные размеры пространственных неоднородностей большими по сравнению со средней длиной свободного пробега частиц (малые пространственные градиенты). В линейном приближении по указанному малому параметру, пренебрегая слагаемыми вида $(L^u\xi)^2$, $(\Lambda\xi)$, $(L^u\xi)$, имеем

$$C_q(t) = -i\,\lambda_q^{-1} \sum_\alpha (\Lambda_{q\alpha} + iL^u_{q\alpha})C_\alpha(t) \ . \tag{6}$$

Уравнения для C_α с точностью до третьего порядка по малым градиентам получаем, подставляя (6) во второе из уравнений (5):

$$\dot{C}_\alpha = \sum_\beta \left[(\chi^\alpha, \upsilon_i\, \chi^\beta)\, \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_{ij}^{\alpha\beta}\, \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} + L^u_{\alpha\beta} \right] C_\beta \ ,$$

$$\eta_{ij}^{\alpha\beta} \equiv - \lim_{\nu \to +0} \left(\chi^\alpha, \upsilon_i [(L - \nu)^{-1} + \nu^{-1} P_0] \upsilon_j\, \chi^\beta \right) , \tag{7}$$

где P_0 — оператор проектирования на подпространство функций с нулевыми собственными значениями. Величины $C_\alpha(\mathbf{x},\, t)$ связаны с отклонениями плотностей ζ_α ($\zeta_4 = n(\mathbf{x},\, t)$ — плотность фермионов, $\zeta_i = \pi_i(\mathbf{x},\, t)$ — плотность импульса и $\zeta_0 = = \varepsilon(\mathbf{x},\, t)$ — плотность энергии квазичастиц)

$$\zeta^1_\alpha = \sum_{k=1}^{K} \int d^3p\, f^0_k (1 + \delta_k f^0_k) \gamma^\alpha_k(\mathbf{p}) \ ,$$

($\gamma^0_k(\mathbf{p}) \equiv \varepsilon_k(\mathbf{p})$, $\gamma^i_k(\mathbf{p}) \equiv p^i_k$, $\gamma^4_k(\mathbf{p}) \equiv \delta_k$) от равновесных значений $\zeta_\alpha = \sum\limits_{k=1}^{K} \int d^3p\, f^0_k(\mathbf{p}) \gamma^\alpha_k(\mathbf{p})$ соотношениями

$$C_4(\mathbf{x}, t) = (\delta, \delta)^{-1/2} n^1(\mathbf{x}, t) \ ,$$

$$C_i(\mathbf{x}, t) = \sqrt{3}\, (\mathbf{p}, \mathbf{p})^{-1/2} \pi^1_i(\mathbf{x}, t) \ , \tag{8}$$

$$C_0(\mathbf{x}, t) = (\delta, \delta)^{-1/2} [b \varepsilon^1(\mathbf{x}, t) - a n^1(\mathbf{x}, t)] \ ,$$

где

$$a = (\delta, \varepsilon) \left[(\delta, \delta)(\varepsilon, \varepsilon) - (\delta, \varepsilon)^2 \right]^{-1/2} ,$$

$$b = (\delta, \delta) \left[(\delta, \delta)(\varepsilon, \varepsilon) - (\delta, \varepsilon)^2 \right]^{-1/2} .$$

Исследуем уравнения (7) в случае, когда процессы переброса играют существенную роль, т.е. температуры не очень низкие. Будем считать, что

$$\eta^{\alpha\beta} << R^2 l_u \ , \tag{8à}$$

где l_u — длина свободного пробега, соответствующая процессам переброса; R — характерные размеры пространственных неоднородностей. В уравнениях (7) можно пренебречь C_i и членами, содержащими $\eta^{\alpha\beta}_{ij}$, в результате чего получаем

$$\dot{C}_0 = - \frac{1}{9} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(L^0)^{-1} (\chi^0, \upsilon_j\, \chi^j)\, \frac{\partial C_0}{\partial x_k} + \right.$$

$$\left. + (L^0)^{-1} (\chi^0, \upsilon_j\, \chi^j)(\chi^4, \upsilon_j\, \chi^j)\, \frac{\partial C_4}{\partial x_k} \right] ,$$

$$\dot{C}_4 = - \frac{1}{9} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(L^0)^{-1} (\chi^4, \upsilon_j\, \chi^j)(\chi^0, \upsilon_j\, \chi^j)\, \frac{\partial C_0}{\partial x_k} + \right.$$

$$\left. + (L^0)^{-1} (\chi^4, \upsilon_j\, \chi^j)^2\, \frac{\partial C_4}{\partial x_k} \right] ,$$

$$C_k = - \frac{1}{3} (L^0)^{-1} \left[(\chi^j \upsilon_j\, , \chi^0)\, \frac{\partial C_0}{\partial x_k} + (\chi^4, \upsilon_j\, \chi^j)\, \frac{\partial C_4}{\partial x_k} \right] \tag{9}$$

(здесь $L^u_{ij} = L^0 \delta_{ij}$). Таким образом, в рассматриваемом приближении мы имеем только два уравнения — для C_0 и C_4 . Переходя с помощью формул (8) от величин C_α к плотности частиц n^1 и к плотности энергии ε^1, уравнения (9) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} n^1(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_k} j_k(\mathbf{x}, t) \ , \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^1(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_k} q_k(\mathbf{x}, t) \ . \tag{10}$$

Потоки j_i , q_i , выраженные через химический потенциал μ^1 и температуру T^1, определяются формулами

$$j_i = - D_\mu \frac{\partial}{\partial x_i} \mu^1 - D_T \frac{\partial}{\partial x_i} T^1 \ ,$$

$$q_i = - \kappa_\mu \frac{\partial}{\partial x_i} \mu^1 - \kappa_T \frac{\partial}{\partial x_i} T^1 \ ,$$

$$D_\mu = - \frac{\beta(\delta, \delta)}{9L^0} (\chi^4, \upsilon_j\, \chi^j)^2 \ ,$$

$$D_T = - \frac{\beta^2(\delta, \delta)}{9L^0 b} \times \tag{11}$$

$$\times \left[(a - \mu b)(\chi^4, \upsilon_j\, \chi^j) + (\chi^4, \upsilon_j\, \chi^j)(\chi^0, \upsilon_j\, \chi^j) \right] ,$$

$$\kappa_T = \frac{\beta^2(\delta, \delta)}{9L^0 b^2} \left[a(a - \mu b)(\chi^4, \upsilon_j\, \chi^j)^2 + \right.$$

$$\left. + (\chi^0, \upsilon_j\, \chi^j)^2 + (2a - \mu b)(\chi^0, \upsilon_j\, \chi^j)(\chi^4, \upsilon_j\, \chi^j) \right] ,$$

$$\kappa_\mu = - \frac{\beta(\delta, \delta)}{9L^0 b} \left[a(\chi^4, \upsilon_j\, \chi^j)^2 + (\chi^0, \upsilon_j\, \chi^j)(\chi^4, \upsilon_j\, \chi^j) \right] .$$

Заметим, что принцип симметрии Онзагера для введенных кинетических коэффициентов проявляется в том, что

$$\kappa_\mu = T D_T + \mu D_\mu \ , \tag{12}$$

(D_μ — коэффициент диффузии; D_T — коэффициент термодиффузии). Теплопроводность κ находится с помощью выражения $\kappa = \kappa_T - (D_T / D_\mu) \kappa_\mu$.

Из выражения (11) видно, что $\kappa = 0$. При получении этого результата существенную роль играло то обстоятельство, что в рассматриваемой системе присутствует компонента с химическим потенциалом μ, отличным от нуля. Для системы, состоящей только из бозонов, закон сохранения числа частиц не выполняется (химический потенциал равен нулю). Теплопроводность в бозонной системе будет отличной от нуля. Перейти к рассмотрению бозонной системы можно формально с помощью предельного перехода $\mu \to -\infty$ в общей многокомпонентной системе, состоящей из фермионов и бозонов. Однако такой переход должен быть выполнен до предельного перехода $L^u \to \infty$ (см. (8)). Если же сначала положить L^u большим, а затем перейти к пределу $\mu \to -\infty$, т.е. исходить из формул (11) при вычислении предела $\mu \to -\infty$, то ясно, что для бозонов получим теплопроводность $\kappa = 0$. Здесь существенна неперестановочность пределов $\mu \to -\infty$ и $L^u \to \infty$. Совершая предельный переход $\mu \to -\infty$, видим, что равновесная функция распределения фермионов $f^0 = 1/[\exp((\varepsilon - \mu)/T) + 1] \approx \approx \exp(\beta\mu)\exp(\beta\varepsilon)$ пропорциональна малому параметру $z = \exp(\beta\mu)$ (β фиксирована). В нулевом приближении по параметру z из системы уравнений (7) имеем

$$\dot{C}_i^B = \frac{1}{3}(\chi_B^0, \upsilon_j \chi_B^j)\frac{\partial C_0^B}{\partial x_i} + \eta_{kj}^{Bil}\frac{\partial^2 C_l^B}{\partial x_k \partial x_j} + L^0 C_i^B ,$$

$$\dot{C}_0^B = \frac{1}{3}(\chi_B^0, \upsilon_j \chi_B^j)\frac{\partial C_i^B}{\partial x_i} + \eta_{ij}^{B00}\frac{\partial^2 C_0^B}{\partial x_i \partial x_j} , \tag{13}$$

где

$$\chi_B^i = \left(\frac{3}{(\mathbf{p}, \mathbf{p})}\right)^{1/2} p_i , \quad \chi_B^0 = \left[(\varepsilon, \varepsilon)_B\right]^{-1/2}\varepsilon , \tag{14}$$

и, согласно (8), $C_0^B = [(\varepsilon, \varepsilon)_B]^{-1/2}\varepsilon^1$, $C_i^B = = (3/(\mathbf{p}, \mathbf{p}))^{1/2}\pi_i^1$. Индекс B у скалярного произведения означает, что оно берется с бозонными функциями распределения. Теперь, как и в случае общей системы, будем считать L^u большим, что соответствует переходу к пределу $L^u \to \infty$. Пренебрегая $\dot{C}_i$ и членами, обусловленными нормальными столкновениями, из выражения (13) получаем

$$C_i^B = -\frac{(\chi_B^0, \upsilon_j \chi^j)}{3L^0}\frac{\partial C_0^B}{\partial x_i} , \quad C_0^B = -\frac{(\chi_B^0, \upsilon_j \chi^j)}{3L^0}\frac{\partial C_i^B}{\partial x_i} .$$

Отсюда, переходя к уравнению для температуры T, найдем теплопроводность, обусловленную процессами переброса в системе бозонов:

$$\kappa = -\frac{(\varepsilon, \upsilon_j p_j)_B^2}{L^0(\varepsilon, \varepsilon)_B(\mathbf{p}, \mathbf{p})_B} c_V , \tag{15}$$

где c_V — удельная теплоемкость системы бозонов при постоянном объеме. Как известно [4], $-L^u \sim \exp(-\gamma T/\Theta_D)$ (γ — величина порядка единицы, Θ_D — температура Дебая). Поэтому теплопроводность в системе бозонов будет экспоненциально расти с понижением температуры. Так же будут вести себя, согласно (11), коэффициенты D_μ , D_T , κ_μ и в случае смешанной системы. Роль процессов переброса в затухании колебаний выясним ниже. Но прежде чем переходить к исследованию звуковых колебаний в системе, рассмотрим в следующем разделе процедуру нахождения кинетических коэффициентов в другом предельном случае, когда процессами переброса можно полностью пренебречь, в результате чего закон сохранения квазиимпульса будет выполняться.

2. Кинетические коэффициенты, обусловленные нормальными столкновениями

Перепишем уравнения (7) в терминах плотностей физических величин:

$$\frac{\partial}{\partial t} n^1(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} j_i(\mathbf{x}, t) , \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \pi_i^1(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{ij}(\mathbf{x}, t) + L_{ij}^u \pi_j(\mathbf{x}, t) ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^1(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} q_i(\mathbf{x}, t) ,$$

причем потоки j_i , Π_{ij} , q_i выражаются через n^1, π_i^1, ε^1 и их пространственные градиенты:

$$j_i(\mathbf{x}, t) = \frac{3(\delta, \upsilon_k p_k)}{(\mathbf{p}, \mathbf{p})}\pi_i^1(\mathbf{x}, t) -$$

$$-(\eta_{ij}^{44} - a\eta_{ij}^{40})\frac{\partial}{\partial x_j} n^1(\mathbf{x}, t) - b\eta_{ij}^{40}\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon^1(\mathbf{x}, t) , \tag{17}$$

$$\Pi_{ij}(\mathbf{x}, t) = (\delta, \delta)^{-1}[(1 + a^2)(\delta, \upsilon_j p_i) - ab(\varepsilon, \upsilon_j p_i)] \times$$

$$\times n^1(\mathbf{x}, t) + (\delta, \delta)^{-1} b[b(\varepsilon, \upsilon_j p_i) - a(\delta, \upsilon_j p_i)]\varepsilon^1(\mathbf{x}, t) - \eta_{jn}^{il}\frac{\partial}{\partial x_n}\pi_l^1(\mathbf{x}, t)$$

,

$$q_i(\mathbf{x}, t) = \frac{3}{(\mathbf{p}, \mathbf{p})} (\varepsilon, \upsilon_i p_j) \pi_j^1(\mathbf{x}, t) -$$

$$- (\eta_{ij}^{00} + a\eta_{ij}^{40}) \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon^1(\mathbf{x}, t) -$$

$$- b^{-1}[a(\eta_{ij}^{40} - \eta_{ij}^{00}) + (1 - a^2)\eta_{ij}^{40}] \frac{\partial}{\partial x_j} n^1(\mathbf{x}, t) \ ,$$

$$L_{ij}^u = L^0 \delta_{ij} \ .$$

Иногда используют другую форму записи плотностей потоков. С помощью локально равновесной функции распределения

$$\bar{f}_k(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \left[\exp\left(Y_\alpha(\mathbf{x}, t)\gamma_k^\alpha(\mathbf{p}) - \delta_k\right)\right]^{-1} \ , \qquad (18)$$

$$Y_\alpha(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \beta\ , & \alpha = 0\ ; \\ -\beta u_i\ , & \alpha = i\ ; \\ \beta\mu\ , & \alpha = 4\ , \end{cases}$$

(u_i — средняя дрейфовая скорость квазичастиц), определим локально равновесные плотности интегралов движения

$$\xi_\alpha(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{K} \int d^3p\, \gamma_k^\alpha(\mathbf{p}) \bar{f}_k(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \ .$$

Малые отклонения плотностей от равновесных значений $\zeta_\alpha^1(\mathbf{x},\ t) = \zeta_\alpha(\mathbf{x},\ t) - \zeta_\alpha$ выразим через изменения независимых параметров $Y_\alpha(\mathbf{x},\ t) = Y_\alpha + Y_\alpha^1(\mathbf{x},\ t)$:

$$\zeta_\alpha^1(\mathbf{x}, t) = -(\gamma_\alpha, \gamma_\beta) Y_\beta^1(\mathbf{x}, t) \ . \qquad (19)$$

Тогда выражения для потоков будут иметь вид

$$j_i = -(\delta, \upsilon_i p_j) Y_j^1 + (\delta, \delta)\eta_{ij}^{44} \frac{\partial}{\partial x_j} Y_4^1 +$$

$$+ (\delta, \delta) b^{-1}\left(a\eta_{ij}^{44} + \eta_{ij}^{40} \frac{\partial}{\partial x_j} Y_0^1\right) ,$$

$$\Pi_{ij} = -(\delta, \upsilon_i p_j) Y_4^1 - (\varepsilon, p_i \upsilon_j) Y_0^1 + \frac{1}{3} (\mathbf{p}, \mathbf{p}) \eta_{jm}^{in} \frac{\partial}{\partial x_m} Y_n^1 , \qquad (20)$$

$$q_i = -(\varepsilon, \upsilon_i p_j) Y_j^1 + (\delta, \delta) b^{-1}(a\eta_{ij}^{44} + \eta_{ij}^{40}) \frac{\partial}{\partial x_j} Y_4^1 +$$

$$+ (\delta, \delta)^2 b^{-2}(a^2\eta_{ij}^{44} + 2a\eta_{ij}^{40} + \eta_{ij}^{00}) \frac{\partial}{\partial x_j} Y_0^1 \ .$$

Определим поток термодинамического потенциала формулой

$$\Omega_i = \sum_{k=1}^{K} \int d^3p\, \delta_k \upsilon_i^k \ln\left(1 - \delta_k \exp(-Y_\alpha \gamma_k^\alpha)\right) \ . \qquad (21)$$

Так как

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial Y_\alpha} = \sum_{k=1}^{K} \int d^3p\, \gamma_k^\alpha(\mathbf{p}) \upsilon_i^k \bar{f}_k \ ,$$

то

$$\left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial Y_\alpha}\right)^1 = -(\gamma^\alpha, \upsilon_i \gamma^\beta) Y_\beta^1 \ , \qquad (22)$$

что совпадает с членами нулевого порядка по градиентам в (20). Если ограничиться первым порядком по малым градиентам, то без учета процессов переброса уравнения (16) принимают вид уравнений гидродинамики идеальной жидкости

$$\frac{\partial}{\partial t} \zeta_\alpha^1(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial Y_\alpha}\right)^1 \ . \qquad (23)$$

Если температуры настолько низкие, что главную роль играют нормальные столкновения, то уравнения (7) принимают вид уравнений диссипативной гидродинамики, причем градиентные члены в плотностях потоков (20) определяют диссипацию. Чтобы выписать кинетические коэффициенты в этом предельном случае ($l_N\, l_u >> R^2$, l_N — длина свободного пробега, соответствующая нормальным столкновениям), заметим, что в силу изотропии импульсного пространства для величин $\eta_{ij}^{\alpha\beta}$ имеем

$$\eta_{ij}^{00} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \eta_{ll}^{00} \ , \quad \eta_{ij}^{40} = \eta_{ij}^{04} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \eta_{ll}^{40} \ ,$$

$$\eta_{ij}^{44} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \eta_{ll}^{44} \ .$$

Поскольку мы предполагали, что закон дисперсии квазичастиц обладает свойством $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(-\mathbf{p})$, замечая, что $\eta_{ij}^{ln} = \eta_{lj}^{in}$, имеем

$$\eta_{ij}^{ln} = e\delta_{li}\, \delta_{nj} + d\left(\delta_{lj}\, \delta_{in} + \delta_{ji}\, \delta_{ln} - \frac{2}{3} \delta_{li}\, \delta_{nj}\right) ,$$

$$e = \tfrac{1}{9}\, \eta_{il}^{il}\ , \quad d = \tfrac{1}{30}\, (3\eta_{ll}^{ii} - \eta_{il}^{il}) \ .$$

В соответствии с этим, используя (22), плотности потоков (20) представим в виде

$$j_i = \left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial Y_4}\right)^1 - D_\mu \frac{\partial}{\partial x_i}\mu^1 - D_T \frac{\partial}{\partial x_i} T^1 ,$$

$$\Pi_{ij} = \left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial Y_j}\right)^1 -$$

$$- \eta\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u_j + \frac{\partial}{\partial x_j}u_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_l}u_l\right) - \zeta\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_l}u_l ,$$

$$q_i = \left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial Y_0}\right)^1 - \kappa_\mu \frac{\partial}{\partial x_i}\mu^1 - \kappa_T \frac{\partial}{\partial x_i} T^1 ,$$

где кинетические коэффициенты определяются выражениями

$$D_\mu = \frac{\beta(\delta,\delta)}{3}\eta_{ll}^{44} , \quad D_T = \frac{\beta^2(\delta,\delta)}{3b}[\eta_{ll}^{44}(a - \mu b) + \eta_{ll}^{40}] ,$$

$$\eta = \frac{\beta(\mathbf{p},\mathbf{p})}{90}(3\eta_{ll}^{ii} - \eta_{li}^{li}) , \quad \zeta = \frac{\beta(\mathbf{p},\mathbf{p})}{27}\eta_{li}^{li} , \qquad (24)$$

$$\kappa_T = \frac{\beta(\delta,\delta)}{3b^2}[\eta_{ll}^{00} + (2a - \mu b)\eta_{ll}^{40} + a(a - \mu b)\eta_{ll}^{44}] ,$$

$$\kappa_\mu = \frac{\beta(\delta,\delta)}{3b^2}(a\eta_{ll}^{44} + \eta_{ll}^{40}) .$$

По-прежнему для этих кинетических коэффициентов выполняется соотношение (12) как следствие принципа симметрии Онзагера. Отличие от кинетических коэффициентов (11) состоит в том, что теперь они определяются только нормальными столкновениями. В силу того что в данном случае имеется закон сохранения квазиимпульса, появилось уравнение баланса квазиимпульса и соответственно два новых коэффициента; η и ζ — первая и вторая вязкости.

Заметим, однако, что при наличии Галилеевой инвариантности, или когда квазичастицы имеют квадратичный по импульсу закон дисперсии, в уравнении для n^1 пропадают диссипативные члены, вторая вязкость ζ обращается в нуль, упрощаются также другие кинетические коэффициенты. Действительно, если $\varepsilon_k(\mathbf{p}) = \alpha_{ij}^k p_i p_j$, то, согласно выражениям (2), (7), $\eta_{ij}^{4\beta} = 0$, $\eta_{il}^{il} = 0$ и поэтому из (24) следует, что $\kappa_\mu = 0$, $D_\mu = 0$, $D_T = 0$, $\zeta = 0$. Величины κ_T и η приобретают вид

$$\kappa_T = \kappa = \frac{\beta^2}{3b^2}(\delta,\delta)\eta_{ll}^{00} ,$$

$$\eta = \beta\frac{(\mathbf{p},\mathbf{p})}{30}\eta_{ll}^{ii} . \qquad (25)$$

3. Затухание второго звука

Решения уравнений (7) будем искать в виде

$$C_\alpha(\mathbf{x}, t) \sim A_\alpha \exp(-i\omega t + i\mathbf{kx})$$

(ω — частота колебаний, $\mathbf{k}$ — волновой вектор), поэтому уравнения (7) дают систему уравнений для амплитуд A_α :

$$\left[\omega\delta_{\alpha\beta} + (\chi^\alpha, \upsilon_i\chi^\beta)k_i - \eta_{ij}^{\alpha\beta}k_i k_j + iL_{\alpha\beta}^u\right]A_\beta = 0 . \qquad (26)$$

Система (26) распадается на систему трех однородных уравнений для трех неизвестных A_0 , A_4 и $A^{\|}$ ($A^{\|}$ — продольная составляющая вектора A_i относительно волнового вектора k), и одно уравнение для поперечной составляющей $A^{\perp}$ (относительно k) вектора A_i:

$$(3\omega + i\eta_{ll}^{44}k^2)A_4 + \left(\chi^4, \upsilon_j\chi_j\right)kA^{\|} - i\eta_{ll}^{00}k^2A_0 = 0 , \qquad (27)$$

$$(\chi^4, \upsilon_j\chi^j)kA_4 + 3\left[\omega + \frac{3i}{\beta(\mathbf{p},\mathbf{p})}(\zeta + \frac{4}{3}\eta)k^2 - iL^0\right]A^{\|} +$$

$$+ (\chi^0, \upsilon_j\chi^j)kA_0 = 0,$$

$$(\chi^0, \upsilon_j\chi^j)kA_4 + i\eta_{ll}^{40}k^2A^{\|} + (3\omega + i\eta^{00}k^2)A_0 = 0 ,$$

$$\left(\omega + \frac{3i\eta}{\beta(\mathbf{p},\mathbf{p})}k^2 - iL^0\right)A^{\perp} = 0 . \qquad (28)$$

Нетривиальное решение системы (27) найдем, приравняв к нулю ее определитель и получив таким образом дисперсионное уравнение для частот. Последнее является алгебраическим уравнением третьего порядка относительно ω. Его решение ищем в приближенной форме: $\omega = \omega^0 + \omega^1$, где $\omega^0 \sim k$, $\omega^1 \sim k^2$. В главном приближении получаем

$$\omega_{1,2}^0 = \pm uk , \quad \omega_3^0 = 0 ,$$

где

$$u = \left[\frac{(\varepsilon,\varepsilon)(\upsilon_j p_j, \delta)^2 - 2(\varepsilon,\delta)(\upsilon_j p_j, \delta)(\upsilon_j p_j, \varepsilon) + (\delta,\delta)(\upsilon_j p_j, \varepsilon)^2}{3(\mathbf{p},\mathbf{p})[(\delta,\delta)(\varepsilon,\varepsilon) - (\delta,\varepsilon)^2]}\right]^{1/2} \qquad (29)$$

— скорость второго звука, распространяющегося в ферми-бозонной системе; $\omega_{1,2}^0$ соответствует колебаниям плотности числа частиц, продольной составляющей импульса, плотности энергии (или температуры). Частота $\omega_3^0 = 0$ соответствует пространственному изменению плотности числа частиц и энергии (или температуры). При этом плотность импульса не изменяется.

Легко найти затухание эвуковых колебаний, выражающееся поправкой $\omega_{1,2}^1$ к частотам $\omega_{1,2}^0$:

$$\omega_{1,2}^1 = -\frac{ik^2}{2\beta}\left\{3\,\frac{\zeta + 4/3\,\eta}{(\mathbf{p},\mathbf{p})} + \frac{b^2}{(\delta,\delta)^2}\left[(\varepsilon,\varepsilon)D_\mu - 2(\delta,\varepsilon)\kappa_\mu + (\delta,\delta)(T\kappa_T + \mu\kappa_\mu) - \frac{1}{3(\mathbf{p},\mathbf{p})u^2}\Big((\varepsilon,\upsilon_j p_j)^2 D_\mu - \right.\right.$$
$$\left.\left. - 2(\delta,\upsilon_i p_i)(\varepsilon,\upsilon_j p_j)\kappa_\mu + (\delta,\upsilon_j p_j)^2(T\kappa_T + \mu\kappa_\mu)\Big)\right]\right\} + \frac{i}{2}L^0 . \quad (30)$$

Поправка ω_3^1 к $\omega_3^0 = 0$ определяется формулой

$$\omega_3^1 = -\frac{iabTk^2}{3(\mathbf{p},\mathbf{p})(\delta,\delta)(\varepsilon,\varepsilon)u}\,[(\varepsilon,\upsilon_j p_j)^2 D_\mu - 2(\delta,\upsilon_i p_i)(\varepsilon,\upsilon_j p_j)\kappa_\mu + (\delta,\upsilon_j p_j)^2(T\kappa_T + \mu\kappa_\mu)] . \quad (31)$$

Эта мода является чисто диссипативной. Поперечная составляющая плотности импульса $A^{\perp}$, как следует из (28), также является чисто диссипативной:

$$\omega^1 = -3i\,\frac{k^2}{\beta(\mathbf{p},\mathbf{p})}\,\eta + iL^0 . \quad (32)$$

Для однокомпонентной жидкости, состоящей только из фермионов, величину затухания звука можно записать в виде

$$\omega_{1,2}^1 = -\frac{ik^2}{2}\left\{\rho_m^{-1}\left[\left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p}\right)\left(\beta\left(\frac{a}{b} - \mu\right)\left(\frac{a}{b}D_\mu - \kappa_\mu\right) + \kappa_T - \frac{1}{b}D_T + \zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\right] - \right.$$
$$\left. -\left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p}\right)^{1/2}\left(\frac{\sqrt{\beta}mu}{\rho_m}\frac{c_p}{c_V} + \left(\sqrt{\beta}mu(\delta,\delta)\right)^{-1}\right)\left(\frac{a}{b}D_\mu - \kappa_\mu\right) + \frac{c_V}{c_p\,\beta(\delta,\delta)}D_\mu\right\} + \frac{1}{2}L^0 , \quad (33)$$

где введены следующие обозначения (изотропный случай):

$$\rho = \int d^3p\, f^0 , \quad m = \frac{(\mathbf{p},\mathbf{p})}{(p_i\upsilon_i,\delta)} = \beta\,\frac{(\mathbf{p},\mathbf{p})}{3\rho} ,$$
$$\rho_m = \beta\,\frac{(\mathbf{p},\mathbf{p})}{3} , \quad (34)$$

$$c_V = \beta^2\,\frac{(\delta,\delta)}{b^2\rho_m} , \quad c_p = \beta^2\,\frac{(\delta,\delta)}{\rho_m}\left[\left(\frac{a}{b} - \frac{(p_j\upsilon_j,\varepsilon)}{(p_i,\upsilon_i)}\right)^2 + b^{-2}\right] . \quad (35)$$

Поскольку, согласно (34), величина ρ представляет собой плотность числа квазичастиц фермионной системы, а m и ρ_m соответственно массу одной квазичастицы и массовую плотность (в случае квадратичного закона дисперсии $\varepsilon = p^2/2m$ это проверяется непосредственно: $\rho_m = \int d^3p\, p^2(\partial f^0/\partial\varepsilon) = m\rho$), то величины c_V и c_p являются удельными теплоемкостями при постоянном объеме и постоянном давлении, отнесенными к единице массы, которые можно вычислить, используя выражение для плотности комбинаторной энтропии

$$s = -\int d^3p\,[f_0 \ln f^0 - (1-f^0)\ln(1-f^0)] ,$$

по известным термодинамическим формулам:

$$c_V = \frac{T}{\rho_m}\left[\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{\mu,V} - \frac{(\partial p/\partial T)^2_{\mu,V}}{(\partial p/\partial\mu)_{T,V}}\right] ,$$

$$c_p - c_V = \frac{T}{\rho_m^2}\,\frac{(\partial p/\partial T)^2_\rho}{(\partial p/\partial\rho_m)_T} , \quad (36)$$

где $p = (1/3)\int d^3p\, p_j\,\upsilon_j\, f^0$ — гидростатическое давление, определяемое ($p = -\Omega$) фермионным термодинамическим потенциалом

$$\Omega = -T\int d^3p\,\ln(1 + \exp(-\beta(\varepsilon - \mu))) .$$

Заметим, что скорость звука, соответствующая выражению (29), может быть получена по известной формуле: $u^2 = (c_p/c_V)(\partial p/\partial\rho_m)_T$ (в области низких температур $u = \upsilon_F/\sqrt{3}$, где υ_F — фермиевская скорость).

Из выражений для кинетических коэффициентов (24), (25) в случае квадратичного закона дисперсии видно, что затухание звука (33) приобретает известный вид [4], определяемый теплопроводностью κ и вязкостью η:

$$\omega^1_{1,2} = -\frac{ik^2}{2\rho_m}\left[\left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p}\right)\kappa + \frac{4}{3}\eta\right] + \frac{i}{2}L^0 \ . \qquad (37)$$

Если физическая система состоит только из бозонов, то скорость звука и затухание можно получить из общих выражений (29) и (31) с помощью того же предельного перехода $\mu \to -\infty$, что и в разд. 2. При этом для скорости распространения звука в бозонной системе получаем

$$u_B = \frac{(\mathbf{pv}, \varepsilon)_B}{[3(\varepsilon, \varepsilon)_B(\mathbf{p}, \mathbf{p})_B]^{1/2}} \ . \qquad (38)$$

Соответственно для затухания звука имеем

$$\omega^1_B = -\frac{3}{2}ik^2\frac{T}{(\mathbf{p}, \mathbf{p})_B}\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta + \frac{\kappa}{c_V}\right) + \frac{i}{2}L^0 \ , \qquad (39)$$

где $\kappa = (1/3)c_V\eta^{00}_{ll}$ — теплопроводность, $c_V = \beta^2(\varepsilon, \varepsilon)_B$ — удельная теплоемкость, а коэффициенты вязкости ζ и η определяются формулами (24).

Заметим, что из полученных выражений для затухания звуковых колебаний (31), (33), (39) следует, что оно определяется вязкостями и теплопроводностью, обусловленными нормальными столкновениями. Влияние же процессов переброса в области низких температур на затухание экспоненциально мало, несмотря на то что кинетические коэффициенты (11), (15), обусловленные процессами переброса, экспоненциально растут с понижением температуры.

Рассмотрим в качестве бозонной системы газ фононов. Эта система является трехкомпонентной, так как существуют три фононные колебательные ветви — две поперечные и одна продольная. Звуковые колебания, распространяющиеся в такой системе, называются вторым звуком. Используя закон дисперсии для фононов $\varepsilon_k = s_k p^k$, будем считать, что скорости поперечных фононов равны s_t, а продольных фононов s_l. Вычислим скорость распространения второго звука u_f. Согласно (18), $f^0 = [\exp(Y_0 s_k p^k) - 1]^{-1}$ и

$$(\mathbf{p}, \mathbf{p})_B = \frac{16}{15}\pi^5 T^5(s_l^{-5} + 2s_t^{-5}) \ ,$$

$$(p_l \upsilon_l, \varepsilon)_B = (\varepsilon, \varepsilon)_B = \frac{16}{15}\pi^5 T^5(s_l^{-3} + 2s_t^{-3}) \ . \qquad (40)$$

Подставив найденные выражения в (38), для скорости рапространения второго звука получаем

$$u_{\text{ph}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1 + \frac{1}{2}(s_t/s_l)^3}{1 + \frac{1}{2}(s_t/s_l)^5}\right]s_t \ , \qquad (41)$$

что совпадает с результатами, полученными ранее в [11,12].

Получим выражение для скорости второго звука в системе магнонов. Закон дисперсии для магнонов имеет вид

$$\varepsilon = \theta p^2 \ .$$

Легко видеть, что в этом случае

$$(\mathbf{p}, \mathbf{p})_B = \frac{3}{2}\pi^{3/2}\zeta(3/2)\left(\frac{T}{\theta}\right)^{5/2} \ ,$$

$$\frac{1}{2}(p_l \upsilon_l, \varepsilon)_B = (\varepsilon, \varepsilon)_B = \frac{15}{4}\pi^{3/2}\theta^{-3/2}T^{7/2}\zeta(5/2) \ , \qquad (42)$$

где $\zeta(x) = (1/\Gamma(x))\int dz\, z^{x-1}/(e^z - 1)$ — ζ-функция Римана. Подстановка найденных выражений в формулу (38) приводит к известному [13,14] результату для скорости распространения второго звука в системе магнонов:

$$u_M = \frac{10}{3}\left[\frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)}\right]^{1/2}(\theta T)^{1/2} \ . \qquad (43)$$

4. Оценка кинетических коэффициентов и затухания звуковых колебаний

Для оценки кинетических коэффициентов используем известное неравенство Коши—Буняковского

$$(h, h)^2 \le (h, \hat{A}h)(h, \hat{A}^{-1}h)$$

для положительно определенного оператора A [10]. В качестве оператора A возьмем оператор $-[(L - \nu)^{-1} + \nu^{-1}P_0]$, определяющий коэффициенты $\eta^{\alpha\beta}_{ij}$ (см. (7)). В силу линейности L представим $L = \Sigma_a \lambda_a P_a$, где $P_a = |\chi^a\rangle\langle\chi^a|$ — проекционный оператор на собственное состояние $|\chi^a\rangle$, соответствующее собственному значению λ_a. Поэтому $LP_a = 0$ и

$$(L - \nu)^{-1} + \nu^{-1}P_0 = (L - \nu)^{-1}(1 + \nu^{-1}LP_0 - P_0) =$$
$$= (L - \nu)^{-1}(1 - P_0) \ .$$

Выбирая $h = \sqrt{1 - P_0}\,x$ для симметрического оператора $(L - \nu)^{-1}$ имеем

$$\left(\sqrt{1-P_0}x\,,\sqrt{1-P_0}x\right)^2 \le \left(\sqrt{1-P_0}x\,, -(L-\nu)^{-1}\sqrt{1-P_0}x\right)\left(\sqrt{1-P_0}x\,, -(L-\nu)\sqrt{1-P_0}x\right),$$

или (так как P_0 коммутирует с L)

$$(x, -[(L-\nu)^{-1} + \frac{1}{\nu}P_0]x) \ge \frac{(x, (1-P_0)x)^2}{(x, -(L-\nu(1-P_0))x)}.$$

Отсюда видно, что для диагональных матричных элементов η^{ii}_{jj} справедливо неравенство (при фиксировании i и j)

$$\eta^{ii}_{jj} \ge \frac{(\upsilon_j\chi^i, (1-P_0)\upsilon_j\chi^i)}{(\upsilon_j\chi^i, -(L-\nu(1-P_0))\upsilon_j\chi^i)} \ .$$

Аналогичное неравенство справедливо и для η^{ki}_{kj}. Далее легко видеть, что для любых чисел $a_i > 0$, $b_i > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_i a_i / \sum_i b_i \le \sum_i a_i / b_i \, .$$

Поэтому можно записать

$$\sum_{ji} \eta^{ll}_{jj} \ge \frac{\sum_{jl} (\upsilon_j\chi^l, (1-P_0)\upsilon_j\chi^l)^2}{\sum_{in} (\upsilon_i\chi^n, -(L-\nu(1-P_0))\upsilon_i\chi^n)} \ .$$

В силу неравенства $\left(\sum_{i=1}^{3} a_i b_i\right)^2 \le \sum a_i^2 \sum b_j^2$, полагая $b_j = 1$, имеем: $\sum a_i^2 \ge (1/3)\left(\sum_i a_i\right)^2$. В результате находим

$$\eta^{ll}_{jj} \ge \frac{1}{9}\frac{(\sum_{jl} (\upsilon_j\chi^l, (1-P_0)\upsilon_j\chi^l))^2}{\sum_{in} (\upsilon_i\chi^n, -(L-\nu(1-P_0))\upsilon_i\chi^n)} \ .$$

Слагаемое, содержащее ν в правой части последнего неравества, можно опустить, так как во многих представляющих интерес случаях $L|\upsilon_i\chi^l> \ne 0$ (см. ниже). Таким образом, окончательно получаем

$$\eta^{ll}_{ii} \ge \frac{1}{9}\frac{(\upsilon_i\chi^l, (1-P_0)\upsilon_i\chi^l)^2}{(\upsilon_j\chi^n, -L\upsilon_j\chi^n)} \ ,$$
$$\eta^{00}_{ll} \ge \frac{1}{3}\frac{(\upsilon_i\chi^0, (1-P_0)\upsilon_i\chi^0)^2}{(\upsilon_j\chi^n, -L\upsilon_j\chi^n)} \ . \tag{44}$$

Эти неравенства можно использовать для оценки кинетических коэффициентов.

Найдем зависимость кинетических коэффициентов от температуры в системе магнонов, обладающих законом дисперсии $\varepsilon = \theta p^2$. Нужно учесть только трехмагнонные процессы распада и слияния, так как четырехмагнонные процессы (взаимодействия и релятивистского рассеяния) при низких температурах являются процессами более высокого порядка по температуре. Тогда интеграл столкновений для магнонов можно записать в виде [15]

$$L_M(n) = -8\pi\sum_{123}|\psi(123)|^2 f_1^0 f_2^0(1+f_3^0)(\xi_1+\xi_2-\xi_3)\times$$
$$\times\,\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3)\Delta(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3)(\Delta_{n1}+\Delta_{n2}-\Delta_{n3}) \ , \tag{45}$$

где

$$\psi_M(123) = \frac{\mu_0 M_0}{\sqrt{N}}\varphi_M(123) \ , \ \varphi_M(123) \sim 1 \ ,$$

N — число ячеек в образце; $\mu_0 = |e|\hbar/2mc$ — магнетон Бора; $M_0 = 2S\mu_0/\upsilon_0$, S — величина спина; υ_0 — объем элементарной ячейки. Система магнонов является однокомпонентной. В соответсвии с (14) для магнонов $\upsilon_i\chi^0 = (2\theta\varepsilon/\sqrt{(\varepsilon,\varepsilon)_M})p_i$. Поэтому матричный элемент $(\upsilon_i\chi^0, -L_M\upsilon_i\chi^0)$ оператора столкновений (45) имеет вид (при этом полагаем $\varphi_M(123) = 1$)

$$(\upsilon_i\chi^0, -L_M\upsilon_i\chi^0) = \frac{4\theta^2\mu_0^2 M_0^2 V}{\pi^2(\varepsilon,\varepsilon)_M N}\int d^3p\int d^3p_1\int d^3p_2\, p^2[2f^0 f_1^0(1+f_2^0)\times$$
$$\times(p^4 + p_1^2(\mathbf{pp}_1) - p_2^2(\mathbf{pp}_2))\delta(\varepsilon+\varepsilon_1-\varepsilon_2)\delta(\mathbf{p}+\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2) + (1+f^0)f_1^0 f_2^0\times$$
$$\times(p^4 - p_1^2(\mathbf{pp}_1) - p_2^2(\mathbf{pp}_2))\delta(\varepsilon-\varepsilon_1-\varepsilon_2)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)] = \frac{32I}{5\pi^{3/2}\zeta(3/2)}\frac{\mu_0^2M_0^2a_0^3T^{3/2}}{\theta^{1/2}} \ ,$$

где a_0 — постоянная решетки кристалла и

$$I = \int\limits_0^\infty dx\, x^2 f(x) \int\limits_0^\infty dy\, y f(y)[\,+ f(x+y)]\ , \ f(x) = \frac{1}{e^x - 1}\ .$$

Вычисление величины $(\upsilon_i\, \chi^0,\, (1 - P_0)\upsilon_i\, \chi^0)$ с помощью (14) приводит к результату

$$(\upsilon_i\, \chi^0, (1 - P_0)\upsilon_i\, \chi^0) = 2\left(7\, \frac{\zeta(7/2)}{\zeta(5/2)} - 5\, \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)}\right)\theta T\ .$$

Найдя удельную теплоемкость c_{VM} газа магнонов

$$c_{VM} = \beta^2(\varepsilon, \varepsilon)_M = \frac{15}{4}\, \pi^{3/2}\zeta(5/2)\theta^{-3/2}T^{3/2}$$

(которая, естественно, пропорциональна $T^{3/2}$ [8]) и подставляя найденные выражения для величин $(\upsilon_i\, \chi^0,\, -L_M\, \upsilon_i\, \chi^0)$ и $(\upsilon_i\, \chi^0,\, (1 - P_0)\upsilon_i\, \chi^0)$ в неравенство (44), имеем для магнонной теплопроводности следующую оценку:

$$\kappa_M \geq \frac{25}{96}\, \frac{\pi^3}{I\zeta^2(3/2)}\, [7\zeta(7/2)\zeta(3/2) - 5\zeta^2(5/2)]^2 \times$$

$$\times \frac{\theta T^2}{\mu_0^2 M_0^2 a_0^3}\ . \tag{46}$$

Как и в случае фононов, объемная вязкость $\zeta = 0$, так как $\eta^{li}_{li} = 0$. Оценим коэффициент первой вязкости η для магнонов. Для этого необходимо оценить величину η^{ll}_{ii} (см. (7)). Квадратичный закон дисперсии магнонов $\varepsilon = \theta p^2$ дает в соответствии с (14)

$$\upsilon_j\, \chi^i = 2\theta \left(\frac{3}{(\mathbf{p}, \mathbf{p})_M}\right)^{1/2} p_i\, p_j\ .$$

Тогда, согласно (45), имеем

$$(\upsilon_j\, \chi^i, -L_M\, \upsilon_j\, \chi^i) = \frac{4\theta^2\mu_0^2 M_0^2 V}{\pi^2(\mathbf{p}, \mathbf{p})_M N} \int d^3p \int d^3p_1 \int d^3p_2\, [2f^0 f_1^0(1 + f_2^0)\, (p^4 + (\mathbf{p}\mathbf{p}_1)^2 - (\mathbf{p}\mathbf{p}_2)^2)\delta(\varepsilon + \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \times$$

$$\times\, \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) + (1 + f^0) f_1^0 f_2^0\, (p^4 - (\mathbf{p}\mathbf{p}_1)^2 - (\mathbf{p}\mathbf{p}_2)^2)\delta(\varepsilon - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)] = 8I_1\, \frac{\mu_0^2 M_0^2}{(\mathbf{p}, \mathbf{p})_M}\, T^4\ ,$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^\infty dx\, x f(x) \int\limits_0^\infty dy\, y f(y)[1 + f(x+y)]\ .$$

Вычисление величины $(\upsilon_j\, \chi^i,\, (1 - P_0)\upsilon_j\, \chi^i)$ с помощью (14) приводит к результату

$$(\upsilon_j\, \chi^i, (1 - P_0)\upsilon_j\, \chi^i) = \frac{20}{\zeta(3/2)}\, \theta T\zeta(5/2)\ .$$

Поэтому, согласно (44),

$$\eta_M = \beta\, \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{p})_M}{30}\, \eta^{ii}_{ll} \geq \frac{5\pi^3}{36}\, \frac{\zeta^2(5/2)}{\mu_0^2 M_0^2 a_0^3 I_1}\ . \tag{47}$$

Оценка затухания вторичных колебаний в системе магнонов в соответствии с неравенствами (46), (47) имеет вид (см. также [16])

$$\omega^1_M \geq \frac{5\pi^{3/2}}{6\zeta(3/2)} \left[\frac{(7\zeta(7/2)\zeta(3/2) - 5\zeta^2(5/2))^2}{8\zeta(5/2)\zeta(3/2)I} + \frac{2}{9}\, \frac{\zeta^2(5/2)}{I_1}\right] \frac{k^2 T^{1/2}\theta^{5/2}}{\mu_0^2 M_0^2 a_0^3}\ . \tag{48}$$

5. Производство энтропии

Запишем уравнения гидродинамики с учетом диссипативных членов в общем виде [4]:

$$\frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial \zeta_{\alpha k}}{\partial x_k}\ ,\ \zeta_{\alpha k} = \zeta^{(0)}_{\alpha k} + \zeta^{(1)}_{\alpha k}\ , \tag{49}$$

где $\zeta^{(0)}_{\alpha k}$ — недиссипативные плотности потоков; $\zeta^{(1)}_{\alpha k}$ — члены, содержащие первые градиенты плотностей. В отсутствие градиентов справедливы соотношения

$$s = -\Omega + Y_\alpha \zeta_\alpha\ ,\quad s_k = -\Omega_k + Y_\alpha \zeta^{(0)}_{\alpha k}\ , \tag{50}$$

где s — плотность энтропии; s_k — плотность потока энтропии; Ω — плотность термодинамического потенциала; Ω_k — плотность потока термодинамического потенциала. Дифференцируя по времени первое соотношение (50), находим с помощью (49)

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -Y_\alpha \frac{\partial \zeta^{(0)}_{\alpha k}}{\partial x_k} - Y_\alpha \frac{\partial \zeta^{(1)}_{\alpha k}}{\partial x_k}\ . \tag{51}$$

Так как $\partial\Omega_k / \partial Y_\alpha = \zeta^{(0)}_{\alpha k}$, то из второго соотношения (50) следует, что

$$\frac{\partial s_k}{\partial x_k} = Y_\alpha \frac{\partial \zeta^{(0)}_{\alpha k}}{\partial x_k}\ .$$

Подставляя последнее соотношение в (51), имеем для производства энтропии

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s'_k}{\partial x_k} = \frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_k} \zeta^{(1)}_{\alpha k}\ , \tag{52}$$

где $s'_k \equiv s_k + Y_\alpha \zeta^{(1)}_{\alpha k}$. Из выражений (20) и (24) следует, что

$$\zeta^{(1)}_{ij} = T\left[\zeta \frac{\partial Y_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} + \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial Y_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)\right]\ ,$$
$$(i, j = 1, 2, 3)$$

$$\begin{aligned} \zeta^{(1)}_{0i} &= T\kappa_\mu \frac{\partial Y_4}{\partial x_i} + T(\mu\kappa_\mu + T\kappa_T)\frac{\partial Y_0}{\partial x_i}\ , \\ \zeta^{(1)}_{4i} &= TD_\mu \frac{\partial Y_4}{\partial x_i} + T(\mu D_\mu + TD_T)\frac{\partial Y_0}{\partial x_i}\ . \end{aligned} \tag{53}$$

Покажем, что производство энтропии в рассматриваемой системе положительно $\dot{s} \geq 0$. Используя первое из выражений (53), легко видеть, что

$$\frac{\partial Y_i}{\partial x_j}\zeta^{(1)}_{ij} =$$

$$= T\left[\zeta\left(\frac{\partial Y_k}{\partial x_k}\right)^2 + \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} + \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial Y_k}{\partial x_k}\right)^2\right] \geq 0\ .$$

С помощью второго и третьего выражений (53) имеем

$$\frac{\partial Y_0}{\partial x_i}\zeta^{(1)}_{0i} + \frac{\partial Y_4}{\partial x_i}\zeta^{(1)}_{4i} = TD_\mu\left[\left(\frac{\partial Y_4}{\partial x_i} + \frac{\kappa_\mu}{D_\mu}\frac{\partial Y_0}{\partial x_i}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{T}{D_\mu^2}(\kappa_T D_\mu - \kappa_\mu D_T)\left(\frac{\partial Y_0}{\partial x_i}\right)^2\right]\ .$$

Формулы (24) для кинетических коэффициетов дают

$$\kappa_t D_\mu - \kappa_\mu D_T = \beta^2 \frac{(\delta, \delta)^2}{9B^2}\left(\eta^{44}_{ii}\eta^{00}_{ll} - (\eta^{40}_{ll})^2\right) \geq 0\ ,$$

так как легко показать, что

$$(\eta^{40}_{ll})^2 \leq \eta^{44}_{ii}\eta^{00}_{ll}\ .$$

Очевидно также, что $D_\mu \geq 0$. Таким образом, окончательно получаем

$$\dot{s} = \frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_k}\zeta^{(1)}_{\alpha k} \geq 0\ .$$

Заключение

Мы рассмотрели K-компонентную систему частиц из фермионов и бозонов, в которой наряду с нормальными столкновениями возможны процессы переброса. Разработан достаточно общий микроскопический подход, основанный на использовании собственных функций и собственных значений линеаризованного оператора столкновений, к решению линеаризованных кинетических уравнений в гидродинамическом приближении. Исходя из кинетических уравнений в таком подходе получены линеаризованные уравнения гидродинамики. Найдены кинетические коэффициенты в случае, когда процессы переброса в многокомпонентной системе квазичастиц играют существенную роль.

При достаточно низких температурах, когда главную роль играют нормальные столкновения, уравнения принимают вид уравнений диссипативной гидродинамики. В этом случае кинетические коэффициенты определяются только нормальными столкновениями. Показано, что в таком случае появляются коэффициенты первой и второй вязкости.

На основе гидродинамических уравнений исследовано распространение второго звука в ферми-бозонной системе. Показано, что затухание второго звука определяется вязкостью и теплопроводностью, обусловленными нормальными столкновениями. Отметим, что сходные вопросы применительно к газодинамике квазичастиц рассматривались в работе [16].

Благодарим С. В. Пелетминского за постоянное внимание к работе и ценные обсуждения.

1. Н. Н. Боголюбов, *Проблемы динамической теории в статистической физике*, Гостехиздат, Москва (1946).
2. Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику*, Наука, Москва (1977).
3. И. Пригожин, *Неравновесная статистическая механика*, Мир, Москва (1964).
4. А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, *Методы статистической физики*, Наука, Москва (1977).
5. Д. Н. Зубарев, *Неравновесная статистическая термодинамика*, Наука, Москва (1971).
6. W. Kohn and J. M. Luttinger, *Phys. Rev.* **108**, 590 (1957).
7. З. Балеску, *Равновесная и неравновесная статистическая механика*, Мир, Москва (1978).
8. П. Резибуа, М. Де Леннер, *Классическая кинетическая теория жидкостей и газов*, Мир, Москва (1980).
9. P. Resibois, *Phys. Lett.* **A30**, 465 (1969).
10. Е. А. Иванченко, В. В. Красильников, С. В. Пелетминский, *ФТТ* **22**, 2266 (1980).
11. J. C. Ward and J. Wilks, *Philos. Mag.* **43**, 48 (1952).
12. R. B. Dingle, *Proc. Phys. Soc. London* **65**, 1044 (1952).
13. Р. Н. Гуржи, *ФТТ* **7**, 3516 (1965).
14. Ю. В. Гуляев, *Письма в ЖЭТФ* **2**, 3 (1965).
15. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).
16. А. И. Ахиезер, В. Ф. Алексин, В. Д. Ходусов, *ФНТ* **20**, 1199 (1994); **21**, 3 (1995).

On theory of transport phenomena in many-component quantum systems

E. A. Ivanchenko, V. V. Krasil'nikov, and Yu. V. Slusarenko

The method of study the transport phenomena in many-component systems with a conserving momentum is developed. The general expressions are obtained for viscosity, thermoconductivity and diffusion coefficients of quasiparticles. The oscillations are also considered in such systems. The damped waves are shown to be of the hydrodynamic nature. The method devised was used to obtain the temperature dependence of attenuation of the second sound in a magnon gas.