Физика низких температур, 1997, т. 23, № 2, с. 233–255

Посвящается памяти И. М. Лифшица

Краткие сообщения

Исследование роли продольных длинноволновых фононов в кинетике диэлектриков

Р. Н. Гуржи, А. В. Яновский

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47
E-mail: gurzhi@kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 10 июля 1996 г.

Показано, что продольные длинноволновые фононы существенно влияют на характер процессов теплопереноса в большинстве известных кристаллов, несмотря на наличие в них симметрийного вырождения ветвей поперечных колебаний. Это связано с тем, что в этих кристаллах поперечные фононные моды имеют мало различающиеся фазовые скорости. Наиболее сильно данные эффекты проявляются в явлениях фононной гидродинамики и при распространении второго звука. Показано, что теплопроводность массивных образцов является немонотонной функцией параметра, характеризующего различие между скоростями поперечных мод.

Доведено, що поздовжні довгохвильові фонони суттєво впливають на характер процесів теплопереносу в більшості відомих кристалів, незважаючи на наявність в них симетрійного виродження гілок поперечних коливань. Це пов'язано з тим, що в цих кристалах поперечні фононні моди мають майже співпадаючі фазові швидкості. Найсильніше ці ефекти виявляють себе в явищах фононної гідродинаміки та в поширюванні другого звуку. Доведено, що теплопровідність масивних зразків є немонотонною функцією параметра, що характеризує різницю між фазовими швидкостями поперечних мод.

PACS: 63.20.Hp, 66.70.+f

1. Как известно, существуют два вида трехфононных процессов с участием хотя бы одного продольного партнера: а) столкновения $l+t \leftrightarrow l$, $l \leftrightarrow t+t$ (l — продольная, $t \equiv t_{1,2}$ — поперечные колебательные моды), для которых длина свободного пробега продольных длинноволновых фононов (ПДФ) растет с понижением их частоты ω как ω^{-4}, независимо от симметрии кристаллической решетки; б) столкновения $l + t_{1,2} \leftrightarrow t_{2,1}$, для которых длина свободного пробега ПДФ пропорциональна ω^{-n}. В зависимости от симметрии кристалла $n = 2, 3, 4$ [1]: $n = 2$ отвечает касанию поперечных ветвей в точке симметрийного вырождения, $n = 3$ — их пересечению, а $n = 4$ — отсутствию вырождения или, напротив, полному совпадению поперечных мод (модель изотропной упругой среды).

Процессы, относительно которых длина свободного пробега ПДФ $l(\omega)$ растет при $\omega \to 0$ как ω^{-n} с $n \geq 3$, сами по себе не могут обеспечить конечную теплопроводность. При этом коэффициент теплопроводности $\kappa \sim \int \omega^2 l(\omega)\, d\omega$ расходится (так называемая проблема Померанчука [2]). Не спасает положение и рэлеевское рассеяние на примесях, поскольку в этом случае $l(\omega) \sim \omega^{-4}$.

Однако большинство доступных экспериментальному исследованию кристаллов имеют симметрию (и упругие свойства), при которой процессы $l + t_{1,2} \leftrightarrow t_{2,1}$ разрешены, причем $n = 2$, и данная проблема, казалось бы, отсутствует. Обычно считают, что при низких температурах кинетические свойства диэлектриков (кроме очень грязных образцов) определяются в основном тепловыми фононами [3,4]. В связи с этим укажем на следующий факт, лежащий в основе всего дальнейшего рассмотрения. В большинстве кристаллов поперечные моды t_1 и t_2 мало различаются:

$$\delta = \max_{\mathbf{f}} \frac{|s_{t_1}(\mathbf{f}) - s_{t_2}(\mathbf{f})|}{s_{t_1,t_2}(\mathbf{f})} \ll 1 \ ,$$

© Р. Н. Гуржи, А. В. Яновский, 1997

где s_{t_1,t_2} — фазовые скорости соответствующих поперечных мод, зависящие от направления f волнового вектора. Эти вещества близки по своим свойствам к изотропной упругой среде (см. таблицу, металлы могут представлять интерес в сверхпроводящем состоянии).

Таблица

Значения параметра δ для некоторых веществ

	Вещество									
	^{4}He	NaF	LiF	H_2	D_2	CdS	Al	BaF_2	Некот. квазикристаллы	W
δ	1/5	1/7	1/8	0,1	0,1	0,1	<0,1	$5\cdot10^{-2}$	$2\cdot10^{-2}$	$2\cdot10^{-3}$

В подобных кристаллах энергия поперечных фононов, участвующих в процессах $l + t_{1,2} \leftrightarrow t_{2,1}$, существенно больше (в δ^{-1} раз) энергии продольных, это следует из законов сохранения: $\omega_{t_1} \sim \omega_{t_2} \sim \delta^{-1}\omega_l >> \omega_l$. Следовательно, механизм Херринга имеет порог со стороны высоких частот, так как при $\omega_l > \delta T$ число соответствующих поперечных фононов с энергией $\omega_{t_{1,2}} > T$ экспоненциально мало [5]. Обратное время релаксации ПДФ в этих процессах можно записать в виде ($x = \omega T^{-1}$)

$$\tau_H^{-1}(x) \equiv s_l\, l_H^{-1}(x) \sim \begin{cases} x^2\delta^{-1}, & x << \delta\,; \\ x^5\delta^{-4}\exp\{-x\delta^{-1}\}, & \delta << x \le 1\,. \end{cases} \tag{1}$$

При обычном рассмотрении фактически полагают $\delta \sim 1$ и поэтому $\tau_H^{-1}(x) \sim x^2$.

2. В массивных образцах процессы $l + t_{1,2} \leftrightarrow t_{2,1}$ устраняют расходимость теплопроводности, ограничивая область интегрирования (нижний предел) на частоте обрезания ω_0, которая находится из уравнения

$$l_H^{-1}(x_0) = (l_N^{-1} + l_i^{-1})x_0^4\,, \quad x_0 = \omega_0 T^{-1}\,.$$

Здесь $l_N \sim T^{-5}$; $l_i \sim T^{-4}$ — длины свободного пробега тепловых фононов относительно рассеяния друг на друге и на «примесях» соответственно*.

В условиях, когда преобладает вклад ПДФ и обрезание происходит выше порога для механизма Херринга, в приближении Каллуэя получаем

$$\kappa \approx Cs_l\,(l_N^{-1} + l_i^{-1})^{-1}x_0^{-1} \times$$

$$\times \left[1 - \frac{5}{4}(R_1^{-2} + R_2^{-2})\frac{\delta}{x_0} + \left(2 + \frac{l_i}{l_N}\right)x_0 + \ldots\right]\,;$$

$$x_0 \approx \delta \ln\left[\frac{el_H^{-1}(\delta)}{\delta^4(l_i^{-1} + l_N^{-1})}\right]\,; \tag{2}$$

$$5\delta << x_0 << \min\left(\frac{l_N}{l_i}\,, 1\right)\,. \tag{3}$$

Здесь $C \sim T^3$ — теплоемкость; $R_{1,2}$ — главные радиусы кривизны поверхности, которая определяется уравнением $\rho(\mathrm{f}) = \delta^{-1}s_t^{-1}|s_{t_1}(\mathrm{f}) - s_{t_2}(\mathrm{f})|$, в точке, соответствующей максимальному значению ρ (ρ — радиус в сферической системе координат, согласно определению δ, $\rho_{\max} = 1$).

Полученный результат легко понять: если основной вклад в теплопроводность дают фононы с частотой $\omega_0 << T$, то $\kappa \approx Cs_l\, l_{\mathrm{tr}}(x_0)x_0^3 \approx \approx Cs_l\,(l_N^{-1} + l_i^{-1})^{-1}x_0^{-1}$, где x_0^3 отражает статистический вес ПДФ. Отсюда видно, что при $\delta << 1$ коэффициент теплопроводности аномально велик ($x_0 << 1$) и необычным образом зависит от температуры T и концентрации точечных дефектов η. Для чистых образцов ($l_i >> l_N$) коэффициент теплопроводности $\kappa \sim T^{-2}$ (при обычном рассмотрении $\kappa \sim T^{-1}\eta^{-1}$ [3]), тогда как для грязных ($l_i << l_N$) имеем $\kappa^{-1} \sim T\eta \ln(T\eta\delta^{-3})$ (обычно $\kappa^{-1} \sim T^{3/2}\eta^{1/2}$ [8]). Отметим, что уже при $\delta = 1/5$ вклады тепловых фононов и ПДФ, вообще говоря, одного порядка.

Как следует из (1) и (2), с увеличением δ частота обрезания $\omega_0 = x_0(\delta)T$ растет медленнее, чем линейная функция этого параметра. В результате левое неравенство в (3) нарушается. Для грязных образцов это приводит к немонотонной зависимости теплопроводности κ от δ. Действительно, при

* Расходимость может быть устранена при учете конечности времени жизни продольных тепловых фононов — механизм Саймонса [6], который делает разрешенными процессы $l + l \leftrightarrow l$ с участием ПДФ. Однако, как показали расчеты [7], соответствующая длина свободного пробега l_S, по-видимому, слишком велика: в твердом водороде $l_S \approx 10^4 T^{-2} l_N$, в NaCl $l_S \approx 4\cdot10^6 T^{-2} l_N$, где T измеряется в градусах.

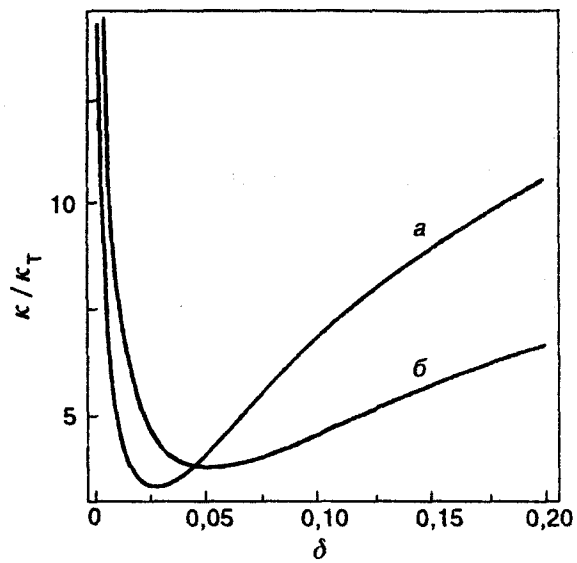

Рис. 1. Теплопроводность грязных образцов как функция параметра δ, отнесенная к вкладу тепловых фононов $\kappa_T = Cs_l l_i$, при $l_N/l_i = 1\,000$ (*а*) и 100 (*б*).

$x_0 >> \delta$, согласно (2), $\kappa^{-1} \sim \delta \ln(\delta^{-3})$, а при $x_0 < \delta$, как показывают расчеты, $\kappa \sim \delta^{1/2}$ (см. рис. 1).

3. Существенно иначе проявляют себя ПДФ при гидродинамическом переносе тепла в образцах ограниченного размера d: $l_N << d << \sqrt{l_N l_i}$.

а) В достаточно тонких образцах проявляется специфическая нелокальная гидродинамика. При этом взаимодействие между движущимися с различной скоростью слоями фононного газа осуществляется ПДФ, длина свободного пробега которых сравнима с размерами системы [5].

Приведем не исследовавшиеся ранее условия реализации этого эффекта, полученные из требования малости первых поправок к теплопроводности, которая определяется решением интегрального уравнения нелокальной гидродинамики (см. [5]) с учетом (1):

$$\left[dl^{-1}(x_0)\right]^{7/4} = \left[dl_N^{-1}x_0^4\right]^{7/4} << 1 , \qquad (4)$$

где

$$x_0 \cong \delta \ln\left[\frac{el_N}{\delta^4 l_H(\delta)}\right] , \quad l(x) = l_N x^{-4} .$$

б) В более толстых образцах при $1 < x_0^{-4} << dl_N^{-1}$ реализуется необычная локальная гидродинамика с коэффициентом вязкости $\mu = s_l l_{\text{eff}}$, где $l_{\text{eff}} \approx \approx x_0^3 l(x_0) = l_N x_0^{-1}$. Вязкость определяется ПДФ с длиной свободного пробега $l(x_0) >> l_N$ (множитель x_0^3 отражает количество таких фононов, $l(x_0) << d$). В результате при $\delta \le 1/5$ из экспериментов по исследованию пуазейлевского течения газа фононов определяется не l_N (как обычно считают), а бóльшая величина $l_{\text{eff}} \approx l_N x_0^{-1}$.

Подобные соображения применимы и к вопросу о затухании второго звука, длина волны которого в этом случае играет роль d.

Заметим, наконец, что нелокальная гидродинамика является наиболее приемлемой для наблюдения роли ПДФ, поскольку условие (4) содержит седьмую степень малого параметра x_0, а в условие (3) x_0 входит только в первой степени.

1. C. Herring, *Phys. Rev.* **95**, 954 (1954).
2. И. Я. Померанчук, *ЖЭТФ* **11**, 246 (1941).
3. Р. Берман, *Теплопроводность твердых тел*, Мир, Москва (1979).
4. Т. Н. Анцыгина, В. А. Слюсарев, *ФНТ* **19**, 494 (1993).
5. Р. Н. Гуржи, А. О. Максимов, *Письма в ЖЭТФ* **27**, 252 (1978); *ФНТ* **4**, 1321 (1978).
6. S. Simons, *Proc. Phys. Soc.* **82**, 401 (1963).
7. Р. Н. Гуржи, А. О. Максимов, *ФНТ* **3**, 356 (1977).
8. В. Л. Гуревич, *Кинетика фононных систем*, Наука, Москва (1980).

Study of the role of longwave longitudinal phonons in kinetics of dielectrics

R. N. Gurzhi and A. V. Yanovsky

It is shown that the longwave longitudinal phonons essentially affect the character of the heat transfer processes in the most of known crystals despite symmetry degeneration of the transverse oscillation branches. It is connected with a weak difference of the transverse modes' phase velocities. These effects are most pronounced in the phonon hydrodynamics and at the spreading of the second sound. It is shown that the thermoconductivity of bulk samples is a non-monotonous function of the parameter describing the difference between the velocities of transverse modes.