

# Квантовые уровни и квазилокальные состояния в *SINIS*-структурах

Г. А. Гогодзе, А. М. Косевич

*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины,  
Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47  
E-mail: gogadze@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 15 июля 1997 г., после переработки 16 февраля 1998 г.

В рамках уравнений Боголюбова–де Жена исследованы квантовые состояния системы сверхпроводник–диэлектрик–нормальный металл–диэлектрик–сверхпроводник (*SINIS*-структура). Для энергий  $E < \Delta$  ( $\Delta$  – щель сверхпроводника) получено дисперсионное уравнение для спектра квазичастиц при учете как процессов андреевского рассеяния, так и обычного отражения электронов на фазовых границах *SINIS*-структуры. Спектр позволяет рассчитать ток Джозефсона в системе. Для энергий непрерывного спектра рассчитан коэффициент прозрачности системы и найдены квазилокальные состояния («резонансные уровни» прозрачности) для структуры.

У рамках рівнянь Боголюбова–де Жена досліджено квантові становища системи надпровідник–діелектрик–нормальний метал–діелектрик–надпровідник (*SINIS*-структура). Для енергій  $E < \Delta$  ( $\Delta$  – щілина надпровідника) одержано дисперсійне рівняння для спектру квазічастиць з врахуванням як процесів андріївського розсіяння, так і звичайного відбиття електронів від фазових границь *SINIS*-структури. Спектр дозволяє розрахувати струм Джозефсона у системі. Для енергій неперервного спектру розраховано коефіцієнт прозорості системи і знайдено квазілокальні становища («резонансні рівні» прозорості) для структури.

PACS: 74.80.Fr, 79.80.+w

## 1. Введение

Как известно, при движении электрона в поле пространственно меняющегося потенциала существенно проявляются его волновые свойства, если потенциал заметно изменяется на расстояниях порядка де-бройлевской длины волны электрона. В физике туннельного прохождения электронов через потенциальные барьеры это приводит к явлению резонансного туннелирования квазичастиц. В частности, оно реализуется в интересном с физической и прикладной точек зрения случае двухбарьерной структуры и характеризуется резким возрастанием коэффициента прозрачности всей системы. Впервые подобная задача в физике твердого тела исследовалась в работе [1], где были сформулированы условия, при которых прозрачность системы для электронов возрастает от произведения прозрачностей отдельных барьеров до единицы.

Ясно, что для существования эффекта требуются высокая степень зеркальности отражения квазичастиц от границ пленок и большая (по сравнению с толщиной пленки) длина свободного пробега электронов. В этих условиях в потенциальной яме между диэлектрическими барьерами возникают квазилокальные уровни, соответствующие метастабильным связанным состояниям квазичастиц. Если энергия туннелирующего электрона совпадает с одним из квазилокальных уровней системы, создаются предпосылки для резонансного туннелирования через структуру.

В ряде теоретических работ идея резонансного туннелирования с успехом использовалась для объяснения аномально большой проводимости туннельных барьеров, содержащих «ловушки» [2], и при исследовании сверхрешеток [3].

Из экспериментальных работ по резонансному туннелированию в нормальных

(несверхпроводящих) структурах отметим публикации [4,5].

Исследование структур, содержащих контакты нормальных и сверхпроводящих металлов, привело к обнаружению новых явлений и породило поток теоретических и экспериментальных работ, посвященных этой проблеме. Среди них выделим работу [6], в которой теоретически предсказан принципиально новый механизм своеобразного отражения электронов от границы раздела нормального ( $N$ ) и сверхпроводящего ( $S$ ) металлов — так называемое андреевское отражение. При андреевском отражении квазиимпульс электрона практически не меняется, а групповая скорость меняет знак на обратный [6]. Последнее свойство отличает андреевское рассеяние от обычного зеркального отражения электрона, при котором меняет знак лишь компонента скорости, перпендикулярная плоскости границы раздела фаз. Процесс андреевского отражения сопровождается протеканием тока через границу [7].

Механизм андреевского рассеяния наиболее эффективен, когда электрон движется вдоль нормали к  $NS$ -границе. При отклонении направления движения от этой нормали вероятность андреевского рассеяния уменьшается [8,9]. В работе [8] показано, что возбуждения, сталкивающиеся с  $NS$ -границей под малыми углами, испытывают обычное зеркальное отражение с вероятностью порядка единицы. Была найдена граница в импульсном пространстве, разделяющая области андреевского и зеркального отражений. Оказалось, что обычное зеркальное рассеяние реализуется для малых углов падения  $\sim (kT/\zeta)^{1/2}$ .

Процесс андреевского рассеяния играет существенную роль в объяснении избыточных токов слабых связей [10]. Надбарьерное отражение вблизи  $NS$ -границы порождает интерференцию электроноподобной и дырочноподобной волн в сверхпроводнике, лежащую в основе объяснения природы эффекта Томаша [11,12].

Андреев показал [6], что если пленка нормального металла контактирует с двух сторон со сверхпроводниками и энергия квазичастиц не превышает  $\Delta$ , то спектр элементарных возбуждений  $SNS$ -контакта квантован. Существование дискретного спектра одночастичных возбуждений оказалось тесно связанным с когерентностью фазы параметра порядка. Спектр андреевских уровней для чистого  $SNS$ -контакта определяется выражением

$$E_n^{(0)} = \frac{\pi \hbar v_z}{L} \left( n + \frac{1}{\pi} \arccos \frac{E}{\Delta} \pm \frac{\Phi}{2\pi} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где  $v_z$  — скорость возбуждений вдоль нормали к границе пленки;  $L$  — толщина нормального слоя;  $\Phi$  — разность фаз параметров порядка двух сверхпроводников. Формула (1) с учетом разности фаз  $\Phi$  была получена Куликом [13]. Имеются две системы андреевских уровней, которые вырождены в случае  $\Phi = 0$ . Существенно, что положение уровней зависит от фазы  $\Phi$ . Изменение  $\Phi$  на  $2\pi$  возвращает уровни Андреева в исходное состояние. С помощью спектра (1) была построена микроскопическая теория стационарного эффекта Джозефсона для беспримесных  $SNS$ -контактов [13–16].

Эффект надбарьерного отражения квазичастиц может вызвать интерференционные эффекты в  $SNS$ -структуре. Они проявляются в осцилляциях коэффициента прозрачности системы при изменении энергии квазичастицы или фазы параметра порядка  $\Phi$  [17,18].

Кроме андреевского рассеяния электрон может испытывать на границах сэндвича также обычное зеркальное отражение из-за изгиба зон, наличия на границе примесей либо в результате различия значений фермиевских волновых векторов контактирующих сред. Процессы обычного рассеяния на барьерах, как правило, моделируются  $\delta$ -образным потенциалом  $V(z) = H\delta(z)$ . Интенсивность рассеяния  $H$  пропорциональна безразмерному параметру  $Z = H/\hbar v_z$ . В работе [19] проанализирован переход от случая идеального металлического контакта ( $Z = 0$ ) к туннельному режиму для микросужений типа нормальный металл — сверхпроводник.

В данной работе исследованы квантовые состояния системы сверхпроводник — диэлектрик — нормальный металл — диэлектрик — сверхпроводник ( $SINIS$ -структура). Слоистые системы (сэндвичи) изучались на предмет выяснения квантовых состояний электронов в них во многих работах. Из последних работ наиболее близкими к теме настоящей статьи мы считаем публикации [20,21]. Однако в работе [20] изучается иная физическая система, не имеющая предельного перехода к  $SINIS$ -сэндвичу, а потому приводит к иному спектру электронов. По поводу работы [21] мы сделаем замечание в соответствующем месте основного текста.

Рассмотрение в данной работе проводится в рамках уравнений Боголюбова — де Жена [22]. Для энергий не превышающих  $\Delta$  получено дисперсионное уравнение для спектра

квазичастиц при учете как процессов андреевского рассеяния, так и обычных процессов отражения на границах структуры. Для энергий непрерывного спектра рассчитан

коэффициент прозрачности *SINIS*-структуры и показано существование в ней квазилокальных состояний.

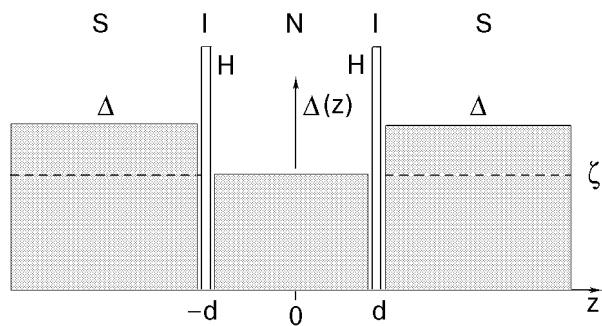


Рис. 1. Схематический вид *SINIS*-контакта:  $\Delta$  — параметр порядка сверхпроводника;  $\zeta$  — химический потенциал металлов;  $H$  — интенсивность  $\delta$ -функционального потенциального барьера;  $L = 2d$  — ширина нормального

## 2. Модель

Для описания электронных процессов в *SINIS*-контакте будем исходить из уравнений Боголюбова—де Жена для двухкомпонентной волновой функции квазичастиц  $\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix}$  [22]:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r}) & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & -\hat{\mathbf{H}}_0^*(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(\mathbf{r}) \\ \varphi(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi(\mathbf{r}) \\ \varphi(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $\hat{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r}) = \hat{T} + V(\mathbf{r})$ ;  $\hat{T} = (1/2m)[\hat{\mathbf{p}} - (e/c)\mathbf{A}]^2 - \zeta$  — оператор кинетической энергии;  $m$  — масса электрона;  $\zeta$  — энергия Ферми;  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал. Энергии Ферми нормального и сверхпроводящего металлов считаются одинаковыми. Потенциал  $V(\mathbf{r})$  описывает процессы обычного рассеяния квазичастиц на границах. Металлические пленки предполагаются чистыми. Мы моделируем потенциал  $V$  и недиагональный потенциал  $\Delta$  следующими выражениями (см. рис. 1):

$$V(z) = H [\delta(z-d) + \delta(z+d)] \quad (3)$$

( $L = 2d$  — ширина нормального слоя; ось  $z$  направлена перпендикулярно плоскости *NS*-границы, вдоль которой структура принимается трансляционно периодической);

$$\Delta(z) = \begin{cases} \Delta \exp(i\Phi_+), & z > d; \\ \Delta \exp(i\Phi_-), & z < -d; \\ 0, & |z| \leq d. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $\Phi_+$ ,  $\Phi_-$  — фазы параметра порядка двух сверхпроводящих «берегов». Для планарной геометрии задача сводится к одномерной с помощью подстановки  $\begin{pmatrix} \psi(\mathbf{r}) \\ \varphi(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \exp(iq_x x) \begin{pmatrix} \psi(z) \\ \varphi(z) \end{pmatrix}$ , где для простоты тангенциальная компонента квазиимпульса электрона выбрана в виде  $\mathbf{q}(q_x, 0, 0)$ . Как видно из (4), рассматривается модель скачкообразного изменения параметра порядка на границах слоев, что предполагает пренебрежение эффектом близости. Модель работает тем лучше, чем интенсивнее рассеяние электронов на диэлектрическом барьере. Последовательный учет эффекта близости в туннельных *SNINS*- и *SNIS*-структурах с конечной прозрачностью *SN*-границ проведен в работе [23].

## 3. Уровни Андреева

Решим уравнения Боголюбова—де Жена во всех областях контакта, считая магнитное поле в *N*-слое равным нулю. Рассмотрим токовые состояния квазичастиц, энергии которых не превышают  $\Delta$ . Решения уравнений (2) имеют вид ( $\hbar \equiv 1$ )

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} = e^{iqx} \left\{ \left( A_+ e^{ik_0 z} + A_- e^{-ik_0 z} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left( B_+ e^{ik_1 z} + B_- e^{-ik_1 z} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad |z| \leq d, \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} = e^{iqx} \left\{ C_+ e^{i\lambda(z-d)} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_+ \end{pmatrix} + D_+ e^{-i\mu(z-d)} \begin{pmatrix} \delta_+ \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad z > d, \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} = e^{iqx} \left\{ C_- e^{-i\lambda(z+d)} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_- \end{pmatrix} + D_- e^{i\mu(z+d)} \begin{pmatrix} \delta_- \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad z < -d. \quad (7)$$

Здесь введены обозначения:

$$\lambda^2 = \frac{k_0^2 + k_1^2}{2} + 2mi\sqrt{\Delta^2 - E^2}, \quad (8)$$

$$\mu^2 = \frac{k_0^2 + k_1^2}{2} - 2mi\sqrt{\Delta^2 - E^2}$$

( $\text{Re } \lambda > 0, \text{Im } \lambda > 0; \text{Re } \mu > 0; \text{Im } \mu < 0$ ), где  $k_0$ ,  $k_1$  — волновые векторы частицы и дырки соответственно. Амплитуда вероятности андреевского рассеяния определяется коэффициентами

$$\gamma_{\pm} = \frac{\Delta e^{-i\Phi_{\pm}}}{E + i(\Delta^2 - E^2)^{1/2}}; \quad \delta_{\pm} = \frac{\Delta e^{+i\Phi_{\pm}}}{E + i(\Delta^2 - E^2)^{1/2}}. \quad (9)$$

Проведем сшивку найденных решений на границах сред, используя требование непрерывности двухкомпонентных волновых функций в точках  $z = \pm d$  и условие

$$\frac{d\Psi(\mp d + 0)}{dz} - \frac{d\Psi(\mp d - 0)}{dz} = 2mH\Psi(\mp d). \quad (10)$$

В результате получим систему однородных уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов задачи. Из требования обращения в нуль определителя этой системы находится дисперсионное уравнение для спектра квазичастиц *SINIS*-контакта:

$$D_0 \cos \Phi + \text{Re} \left( D_1 e^{2i(k_0 + k_1)d} \right) -$$

$$- \operatorname{Re} \left( D_2 e^{2i(k_0 - k_1)d} \right) = 0. \quad (11)$$

Величина  $\Phi = \Phi_+ - \Phi_-$  есть разность фаз параметров порядка сверхпроводников. Коэффициенты  $D_0$ ,  $D_1$  и  $D_2$  имеют вид

$$\begin{aligned} D_0 &= (\kappa_0 - \kappa_0^*)(\kappa_1 - \kappa_1^*) (2i \operatorname{Im} \Lambda)^2, \\ D_1 &= \left[ \gamma^*(\kappa_0 - \Lambda)(\kappa_1 - \Lambda^*) - \gamma(\kappa_0 - \Lambda^*)(\kappa_1 - \Lambda) \right]^2, \\ D_2 &= \left[ \gamma^*(\kappa_0 - \Lambda)(\kappa_1^* - \Lambda^*) - \gamma(\kappa_0 - \Lambda^*)(\kappa_1^* - \Lambda) \right]^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Они сложным образом зависят от энергии возбуждения  $E$ :

$$\kappa_0 = H + \frac{ik_0}{2m}, \quad \kappa_1 = H + \frac{ik_1}{2m}, \quad k_{0,1} = \sqrt{2m(\tilde{\zeta} \pm E)},$$

$$\Lambda = i\lambda/2m$$

$$\left( \tilde{\zeta} = \zeta - \frac{q^2}{2m}, \quad \lambda = \pm \sqrt{2m\tilde{\zeta} + i2m(\Delta^2 - E^2)^{1/2}} \right),$$

$$\gamma = \exp(-i \arccos(E/\Delta)).$$

Легко видеть, что параметр  $Z = H/\hbar v_z$ , характеризующий интенсивность потенциального барьера, выпадает из коэффициента  $D_0$ . Первое слагаемое дисперсионного уравнения (11) не подвержено влиянию процессов обычного рассеяния квазичастиц. Второе слагаемое в (11) описывает осцилляции фриделевского типа, вызванные интерференцией квазичастичных волн при процессах рассеяния частица–частица или дырка–дырка. Эти процессы сопровождаются большим изменением квазиимпульса ( $\Delta k \sim k_F$ ), что порождает в плотности состояний быстрые осцилляции  $\sim \cos(2k_F L)$  при изменении толщины нормальной пленки  $L = 2d$ .

Третье слагаемое дисперсионного уравнения содержит осцилляции вида  $\cos[(k_0 - k_1)L]$ , период которых велик из-за малого изменения квазиимпульса в процессе андреевского рассеяния. С ним связаны процессы интерференции, наблюдавшиеся в туннельных экспериментах [13,24]. В работе [25] изучались токовые состояния в  $SN$  металлических контактах с учетом обоих типов рассеяния на границах пленок. Влияние неидеальности границы вблизи сужения сверхпроводящего точечного контакта на его ток-фазовые характеристики исследовано в работе [26].

Возвращаясь к дисперсионному уравнению, видим, что коэффициенты  $D_1$  и  $D_2$  зависят от параметра  $Z$ . Проведем разложение всех входящих в уравнение (11) величин в ряд по

степеням малого параметра  $\Delta/\zeta \ll 1$  ( $E/\zeta \ll 1$ ) и ограничимся учетом лишь членов нулевого порядка (андреевское приближение). В работе [27] показано, что использование андреевского приближения для чистых  $SN$ - и  $SNS$ -переходов с небольшим поперечным сечением слабо влияет на их локальную плотность состояний. В отсутствие процессов обычного рассеяния ( $Z = 0$ ) и в нулевом порядке по параметру  $\Delta/\zeta$  уравнение (11) дает спектр квантованных уровней (1), полученный Куликом для токового состояния  $SNS$ -контакта [15].

При конечном  $Z$  вновь ограничимся в уравнении (11) учетом андреевского приближения. В полученном разложении слагаемые различаются степенями параметра  $Z$ . Рассмотрим сначала случай  $Z \gg 1$ . Тогда первое слагаемое (11), содержащее  $\cos \Phi$ , можно опустить из-за условия  $|\cos \Phi| \ll Z^4$ , и уравнение (11) дает квантованный в «ящике» спектр частиц и дырок:

$$\pm E = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mL^2} + \frac{q^2}{2m} - \zeta. \quad (13)$$

В другом предельном случае  $Z \ll 1$  сохраним среди членов нулевого порядка по  $\Delta/\zeta$  слагаемые второго порядка малости по параметру  $Z$ . Уравнение для спектра (11) при учете как процессов андреевского, так и обычного рассеяния квазичастиц принимает вид ( $\zeta \sim \tilde{\zeta}$ )

$$F(E) + Z^2 \chi(E) = 0, \quad (14)$$

$$F(E) = \cos \Phi - \operatorname{Re} \left\{ \gamma^2(E) e^{i[k_0(E) - k_1(E)]L} \right\}. \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \chi(E) &= 4 [1 - (E/\Delta)^2] \cos [(k_0(E) + k_1(E)) L] - \\ &- 2 \operatorname{Re} \left\{ (\gamma^2(E) - 1) \exp [(k_0(E) - k_1(E)) L] \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Легко проверить, что решением уравнения (15) (в нулевом порядке по параметру  $Z \ll 1$ ) является спектр Кулика (1). Подставляя разложение для энергии

$$E = E_n^{(0)} + Z^2 \xi$$

в уравнение (15), находим с требуемой точностью

$$\xi = -\chi(E_n^0)/F'(E_n^0). \quad (17)$$

Это дает для спектра квазичастиц (невыврожденный случай  $\Phi \neq 0, \pi$ ):

$$\varepsilon = \varepsilon_n^{(0)} \pm \frac{Z^2 t(\varepsilon^{(0)}) \delta \varepsilon^{(0)} \{2t^2(\varepsilon^{(0)}) \cos [(k_0 + k_1)L] + \cos [(k_0 - k_1)L] - \cos \Phi\}}{(\delta \varepsilon^{(0)} + \pi t(\varepsilon^{(0)})) \sin \Phi} \quad (18)$$

Здесь введены следующие (безразмерные) переменные: энергия  $\varepsilon = E/\Delta$ ; расстояние между уровнями Андреева  $\delta \varepsilon = \delta E_n / \Delta$  ( $\delta E_n = \pi \hbar v_z / L$ ) и функция  $t(\varepsilon^{(0)}) = (1 - \varepsilon_n^{(0)2})^{1/2}$ .

При выводе формулы (18) не накладывалось жестких ограничений на длину слабой связи (мостика). Поэтому она справедлива как для коротких, так и для длинных мостиков, однако при условии  $Z \ll 1$ . В работе [21] изучены короткие мостики, но без жесткого ограничения на  $Z$ . Естественно сравнить результаты, вытекающие из (18) в предельном случае короткого мостика, с результатами работы [21] при  $Z \ll 1$ . Переход в (18) к предельному случаю короткого мостика соответствует в размерных единицах условиям  $mv_z L \ll \hbar$  и  $\pi \hbar v_z \gg \Delta$ . В этом случае спектр квазичастиц в андреевском приближении принимает вид (состояния  $v_z \geq 0$ ,  $\tilde{k}_F \approx k_F$ ,  $\cos \Phi/2 > Z$ )

$$\frac{E^{(0)}}{\Delta} \equiv \varepsilon_n^{(0)} = \pm \cos \frac{\Phi}{2} \pm Z^2 [1 + \cos (2\tilde{k}_F L)] \frac{\sin^2 \Phi/2}{\cos \Phi/2} \quad (19)$$

Обратимся теперь к формуле (7) в работе [21]:

$$E = \pm \Delta \sqrt{1 - D \sin^2 \Phi/2},$$

где  $D$  — проницаемость всей структуры. Если отражение от границы является слабым ( $Z \ll 1$ ), можно записать разложение коэффициента  $D$  в ряд по степеням этого параметра. Получающаяся при этом зависимость спектра квазичастиц от фазы параметра порядка совпадает с (19).

Вырожденный случай также легко вычисляется, но соответствующий спектр здесь не приводится.

Уже отмечалось, что использование андреевского приближения часто оказывается достаточным для описания тока в слабых связях. Однако при создании различных слабых связей с использованием высокотемпературных сверхпроводников параметр  $\Delta/\zeta$  может оказаться равным не  $10^{-3}$ – $10^{-4}$  (обычные сверхпроводники), а порядка  $10^{-1}$  [28]. В работе [29] теоретически изучен ток Джозефсона в сверхпроводящем баллистическом точечном

контакте для таких больших значений параметра  $\Delta/\zeta$ . Мы также исследовали случай чистого SNS-контакта и рассчитали спектр Андреева с учетом поправок порядка  $(\Delta/\zeta)^2$ . Более подробно этот вопрос будет изложен в другой публикации.

Включение магнитного поля, параллельного NS-границам, сильно усложняет картину уровней SNS-контакта. Локальная зависимость положения андреевских уровней от разности фаз  $\Phi$  сохраняется, однако сама эта разность меняется вдоль NS-границы. Это служит причиной «исчезновения» этих уровней при расчете плотности состояний SNS-контакта в присутствии магнитного поля [30].

#### 4. Квазилокальные состояния

Перейдем к рассмотрению состояний непрерывного спектра, когда энергия квазичастицы превышает  $\Delta$ . Необходимо рассчитать коэффициент прозрачности для квазичастиц, падающих слева на SINIS-структуру. В качестве решений уравнений (2) воспользуемся волновыми функциями рассеяния задачи:

$$\begin{pmatrix} \Psi(z) \\ \Phi(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_+ e^{ik_0 z} + A_- e^{-ik_0 z} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_+ e^{ik_1 z} + B_- e^{-ik_1 z} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |z| \leq d; \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} \Psi(z) \\ \Phi(z) \end{pmatrix} = C_+ e^{i\lambda_1(z+d)} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_- \end{pmatrix} + D_- e^{-i\lambda_1(z+d)} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_- \end{pmatrix} + D_+ e^{i\lambda_2(z+d)} \begin{pmatrix} \delta_- \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z < -d; \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} \Psi(z) \\ \Phi(z) \end{pmatrix} = E_+ e^{i\lambda_1(z-d)} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_+ \end{pmatrix} + F_- e^{-i\lambda_2(z-d)} \begin{pmatrix} \delta_+ \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z > d, \quad (22)$$

где  $\gamma_{\pm} = \gamma e^{-i\Phi_{\pm}}$ ,  $\delta_{\pm} = \gamma e^{i\Phi_{\pm}}$ ,  $\gamma = \Delta/[E + (E^2 - \Delta^2)^{1/2}]$  и сохранено прежнее определение величин  $k_0, k_1$  и  $\tilde{\zeta}$ , а  $\lambda_{1,2} = [2m\tilde{\zeta} \pm 2m(E^2 - \Delta^2)^{1/2}]^{1/2}$ .

Для сшивки решений используем условие непрерывности волновых функций на границах

сред и условие (10). В результате получим неоднородную систему из восьми уравнений для определения неизвестных коэффициентов, позволяющих рассчитать коэффициент прохождения квазичастиц через двухбарьерную структуру:

$$W_{SINIS} = \frac{1 + |\tilde{F}_-|^2}{|\tilde{C}_+|^2}, \quad (23)$$

где  $\tilde{F}_- = F_-/E_+$ ,  $\tilde{C}_+ = C_+/E_+$ ,  $\tilde{C}_+ = M_2/M_0$ ,  $\tilde{F}_- = M_1/M_0$ , а  $M_0, M_1, M_2$  — определители, выражения для которых приведены в Приложении. С их помощью запишем формулу (23)

$$W_{SINIS} = \frac{|M_0|^2 + |M_1|^2}{|M_2|^2}. \quad (24)$$

Подставляя выражения (П.1)–(П.3) из Приложения для числителя (24) получаем

$$\begin{aligned} |M_0|^2 + |M_1|^2 = & 256 [1 - \gamma^2(x)]^2 \left\{ (1 + \gamma^4(x)) [1 + 2S(1 + S)] + 4\gamma^2(x) S(1 + S) + \right. \\ & + 2(1 + \gamma^2(x)) S(1 - S) (\gamma^2(x) \cos 2k_0L + \cos 2k_1L) - 2\gamma^2(x)(1 + 2S) \cos [(k_0 - k_1)L + \Phi r] + \\ & + 4(1 + \gamma^2(x)) S^{3/2} (\gamma^2(x) \sin 2k_0L + \sin 2k_1L) - \\ & \left. - 4\gamma^2(x) S \cos \Phi \left\{ 2(1 - S) \cos [(k_0 + k_1)L] + (1 + 2S) \cos [(k_0 - k_1)L] + 4S^{1/2} \sin [(k_0 + k_1)L] \right\} \right\}. \quad (25) \end{aligned}$$

Знаменатель (24) равен

$$\begin{aligned} |M_2|^2 = & 256 \left\{ 2 [1 - \gamma^2(x)]^4 S^2(1 + S^2)^2 + \alpha^2(x) + \beta^2(x) + 2\alpha(x)\beta(x) \cos [2(k_0 - k_1)L] + \right. \\ & + 2 [1 - \gamma^2(x)]^4 S^2 \left\{ (1 + S^2 - 6S) \cos [2(k_0 + k_1)L] + 4S^{1/2}(1 - S) \sin [2(k_0 + k_1)L] \right\} + \\ & + 2 [\alpha(x) + \beta(x)] [1 - \gamma^2(x)]^2 S(1 - S)(\cos 2k_0L + \cos 2k_1L) + S^{3/2} [\alpha(x) + \beta(x)] [1 - \gamma^2(x)]^2 (\sin 2k_0L + \\ & + \sin 2k_1L) + 4\gamma^2(x) \cos^2 \Phi - 4\gamma^2(x) \cos \Phi \{ [\alpha(x) + \beta(x)] \cos [(k_0 - k_1)L] + \\ & \left. + 2[1 - \gamma^2(x)]^2 S(1 - S) \cos [(k_0 + k_1)L] + 4 [1 - \gamma^2(x)]^2 S^{3/2} \sin [(k_0 + k_1)L] \right\} \right\}, \quad (26) \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\alpha(x) = [\gamma^2(x) - (1 - \gamma^2(x))S]^2, \quad S = Z^2/(1 - Q^2), \quad \beta(x) = [1 + (1 - \gamma^2(x))S]^2, \quad Q = q/k_F.$$

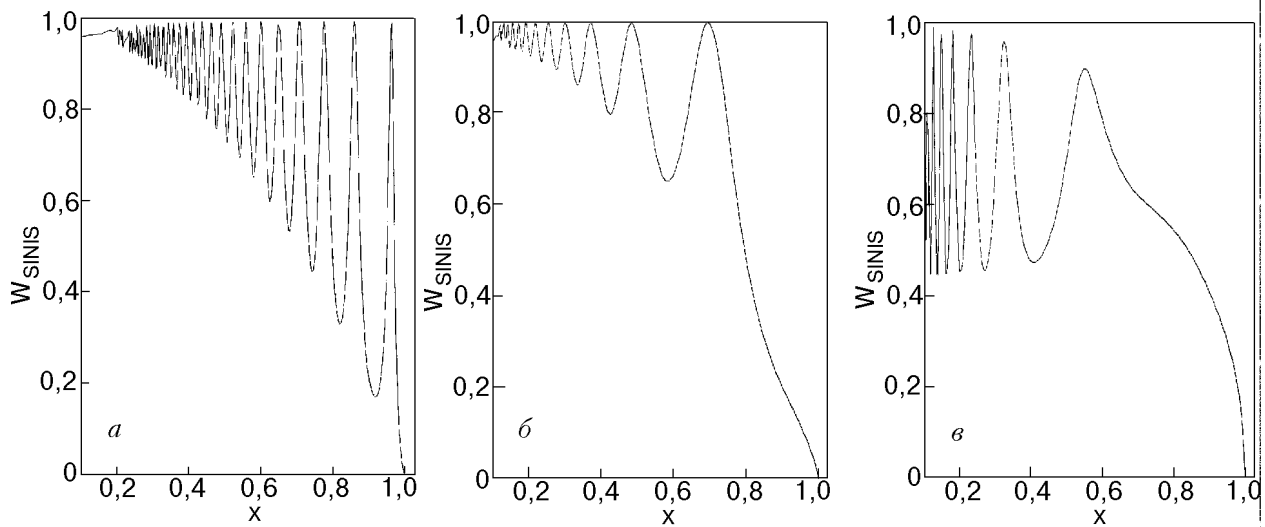


Рис. 2. Численный расчет коэффициента прозрачности  $W_{SINIS}$  как функции  $x = \Delta/E$ . Выбраны значения параметров:  $\Phi = \pi/3$ ,  $Q = 0,1$ ,  $Z = 0,1$ ,  $\Delta/\zeta = 5 \cdot 10^{-3}$  (а);  $Z = 0,1$ ,  $\Delta/\zeta = 10^{-3}$  (б);  $Z = 0,5$ ,  $\Delta/\zeta = 5 \cdot 10^{-4}$  (в).

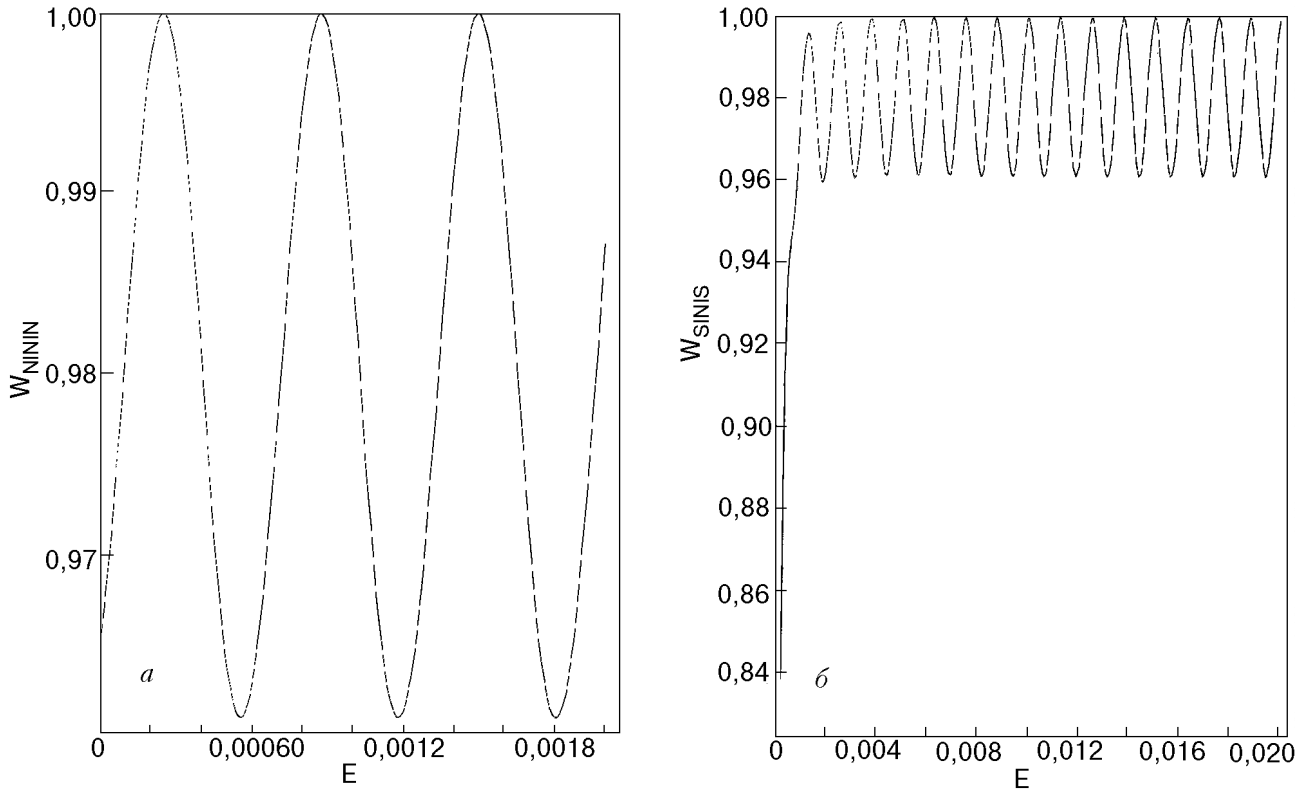


Рис. 3. Зависимость коэффициента прозрачности от энергии  $E$  при  $Z = 0,1$ ,  $\zeta = 1$  эВ при различных  $\Delta$ , эВ; 0 (а);  $10^{-4}$  (б).

Для состояний рассеяния энергия удовлетворяет условию  $2E \gg \Delta$ , т.е. параметр  $\gamma \ll 1$ . Поэтому можно записать разложения числителя и знаменателя в (24) по этому малому параметру. Сохраняя лишь члены порядка  $\gamma^2$ , получаем

$$W_{SINIS} = \frac{f_0 + \gamma^2 f_1}{f_2 + \gamma^2 f_3}, \quad (27)$$

где

$$f_0 = 1 + 2S(1 + S) + 2S(1 - S) \cos 2k_1 L + 4S^{3/2} \sin 2k_1 L;$$

$$f_1 = -2 + 2S(1 - S)(\cos 2k_0 L - \cos 2k_1 L) - 2(1 + 2S) \cos [(k_0 - k_1)L + \Phi] + 4S^{3/2}(\sin 2k_0 L - \sin 2k_1 L) - 4S \cos \Phi \left\{ 2(1 - S) \cos [(k_0 + k_1)L] + (1 + 2S) \cos [(k_0 - k_1)L] + 4S^{1/2} \sin [(k_0 + k_1)L] \right\};$$

$$f_2 = S^4 + (1 + S)^4 + 4S^2(1 + S)^2 \cos^2 [(k_0 - k_1)L] + 2S^2 \left\{ [1 + S^2 - 6S] \cos [2(k_0 + k_1)L] + 4S^{1/2}(1 - S) \sin [2(k_0 + k_1)L] \right\} + 2S(1 - S) [S^2 + (1 + S)^2] (\cos 2k_0 L + \cos 2k_1 L) + 4S^{3/2} [S^2 + (1 + S)^2] (\sin 2k_0 L + \sin 2k_1 L);$$

$$f_3 = -8S^2(1 + S)^2 - 4S^3(1 + S) - 4S(1 + S)^3 - 4S(1 + S) [(1 + S)^2 + S^2] \cos [2(k_0 - k_1)L] - 8S^2 \left\{ [1 + S^2 - 6S] \cos [2(k_0 + k_1)L] + 4S^{1/2}(1 - S) \sin [2(k_0 + k_1)L] \right\} - 8S^2(1 - S^2)(\cos 2k_0 L + \cos 2k_1 L) - 4S(1 - S) [S^2 + (1 + S)^2] (\cos 2k_0 L + \cos 2k_1 L) - 16S^{5/2}(1 + S)(\sin 2k_0 L + \sin 2k_1 L) -$$



$$-8S^{3/2} [S^2 + (1+S)^2] (\sin 2k_0L + \sin 2k_1L) - 4 \cos \Phi \left\{ [S^2 + (1+S)^2] \cos [(k_0 - k_1)L] + \right. \\ \left. + 2S(1-S) \cos [(k_0 + k_1)L] + 4S^{3/2} \sin [(k_0 + k_1)L] \right\}.$$

Значение  $\gamma = 0$  определяет положение резонансных уровней для полностью нормальной структуры. Видно, что после того, как «берега» сэндвича перейдут в сверхпроводящее состояние, относительное смещение этих уровней будет определяться малым параметром  $\gamma^2$ .

С помощью выражения (24) численно построена зависимость коэффициента прозрачности *SINIS*-структуры от обратной энергии  $x = \Delta/E$  ( $x \leq 1$ ) для значений параметров  $\Phi = \pi/3$ ,  $Q = 0,1$ ,  $Z = 0,1$ ,  $\Delta/\zeta = 5 \cdot 10^{-3}$  (рис. 2,а);  $Z = 0,1$ ,  $\Delta/\zeta = 10^{-3}$  (рис. 2,б);  $Z = 0,5$ ,  $\Delta/\zeta = 5 \cdot 10^{-4}$  (рис. 2,в). Видно, что при определенных значениях энергии (резонансных уровнях прозрачности двухбарьерной системы) коэффициент прозрачности *SINIS*-структуры обращается в единицу.

Для сравнения показаны также картины резонансных всплесков в зависимости от энергии  $E$  для случая нулевой энергетической щели  $\Delta = 0$  (рис. 3,а) и конечной щели  $\Delta = 10^{-4}$  эВ (рис. 3,б) при одинаковых значениях других параметров структуры (в частности, здесь выбраны значения  $Z = 0,1$ ,  $\zeta = 1$  эВ). Видно, что при появлении конечной щели период осцилляций возрастает.

Рассмотрим различные частные случаи для выражения (24).

1. Пусть  $Z = 0$  (*SNS*-контакт). Тогда  $\kappa = \kappa^* = 1$  и (24) переходит в выражение [19,31]

$$W_{SNS} = \left\{ 1 + \frac{4\gamma^2}{(1-\gamma^2)^2} \sin^2 \left[ (k_0 - k_1)L/2 - \Phi/2 \right] \right\}^{-1}. \quad (28)$$

Здесь резонансные всплески возникают за счет надбарьерного отражения квазичастиц от края щели.

2. Положим  $\Delta = 0$  ( $\gamma = 0$ ) (*NININ*-структура). В этом случае коэффициент прозрачности равен [32,33]

$$W_{NININ} = \left\{ 1 + 4 \left( \frac{mH}{k_0} \right)^2 \left[ \cos k_0L + \frac{mH}{k_0} \sin k_0L \right]^2 \right\}^{-1}. \quad (29)$$

«Квазилокальные уровни» определяются уравнением

$$\operatorname{tg} k_0L = -k_0 \hbar^2 / mH.$$

Значения энергий структуры равны  $E = \hbar^2 k_0^2 / 2m$ .

3. Наконец, положим  $d = 0$  (*SIS*-структура). В этом случае потенциал  $V(z)$  в уравнении (3) принимает вид  $2H\delta(z)$ . В результате коэффициент прозрачности системы оказывается равным

$$W_{SIS} = - \frac{1 + 4Z^2 + 2\gamma^2(1 - \cos \Phi)(1 + 8Z^2)(1 - \gamma^2)^{-2}}{[1 + 4Z^2 + 2\gamma^2(1 - \cos \Phi)/(1 - \gamma^2)^2]^2}. \quad (30)$$

В рассматриваемом случае квазилокальные состояния отсутствуют, однако существует зависимость прозрачности системы от фазы параметра порядка.

## 5. Заключение

Проведено исследование электронных квантовых состояний сэндвича сверхпроводник — диэлектрик — нормальный металл — диэлектрик — сверхпроводник (*SINIS*-структура). Металлические пленки предполагались чистыми. Рассмотрение проводилось в рамках уравнений Боголюбова — де Жена. Использована модель скачкообразного изменения параметра порядка на границах пленок, что означает пренебрежение эффектом близости. Модель работает тем лучше, чем интенсивнее рассеяние электронов на диэлектрическом барьере.

Основной результат работы связан с выводом дисперсионного уравнения (11) для спектра квазичастиц *SINIS*-сэндвича, энергия которых не превышает энергетическую щель сверхпроводника  $\Delta$ . Это уравнение описывает интерференционные эффекты, вызванные как андреевским рассеянием, так и обычным отражением квазичастиц на границах контактирующих сред. Коэффициенты  $D_0$ ,  $D_1$  и  $D_2$  сложным образом зависят от энергии возбуждений. При наличии тока через структуру разность фаз  $\Phi$  параметров порядка входит лишь в первое слагаемое уравнения. Коэффициент  $D_0$  при этом слагаемом не зависит от параметра  $Z$ , характеризующего интенсивность потенциального барьера, т.е. процессы обычного рассеяния не влияют на его величину. Второе слагаемое дисперсионного уравнения (11) описывает

быстрые осцилляции фриделевского типа, возникающие при процессах рассеяния частица — частица (или дырка — дырка). Третье слагаемое (11) описывает осцилляции с большим периодом, которые связаны с андреевским механизмом рассеяния.

Если в уравнении (11) ограничиться учетом лишь андреевского приближения и предположить отсутствие процессов обычного рассеяния ( $Z = 0$ ), то его решение даст спектр квантованных уровней Кулика для токового состояния SNS-контакта. Найдено аналитическое выражение для спектра квазичастиц для случая малого  $Z \ll 1$ . Обращено внимание на то, что дисперсионное уравнение (11) позволяет выйти за рамки андреевского приближения и рассчитать спектр квазичастиц с учетом поправок порядка  $(\Delta/\zeta)^2$ , что важно для высокотемпературных сверхпроводников.

Исследованы также состояния непрерывного спектра квазичастиц, для которых рассчитан коэффициент прозрачности  $W_{SINIS}$  для SINIS-сэндвича как функция энергии  $E$ . Численно получен вид  $W_{SINIS}$  для разных значений параметров задачи. Из построенных зависимостей видно, что при определенных значениях энергии (резонансных уровнях прозрачности двухбарьерной системы) коэффициент прозрачности SINIS-структуры обращается в единицу.

Авторы выражают благодарность А. Н. Омелянчуку за полезное обсуждение работы, Д. В. Абраимову за помощь в проведении численных расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины, грант № 2.4/165.

### Приложение

$$M_0 = -4(1 - \gamma^2) \left\{ e^{ik_1 L} (1 + \kappa)^2 \left[ 1 - e^{i(k_0 - k_1)L} \gamma^2 e^{i\Phi} \right] + e^{-ik_1 L} (1 - \kappa)(1 - \kappa^*) \left[ 1 - e^{-i(k_0 - k_1)L} \gamma^2 e^{i\Phi} \right] \right\}; \quad (\text{П.1})$$

$$M_1 = 4(1 - \gamma^2) \gamma_+(1 - \kappa^*) \left\{ e^{ik_1 L} (1 + \kappa) \left[ 1 - e^{i(k_0 - k_1)L} e^{i\Phi} \right] + e^{-ik_1 L} (1 + \kappa^*) \left[ 1 - e^{-i(k_0 - k_1)L} e^{i\Phi} \right] \right\}; \quad (\text{П.2})$$

$$\begin{aligned} M_2 = & 32\gamma^2 \cos \Phi - e^{i(k_0 + k_1)L} (1 - \gamma^2)^2 (1 - \kappa^2)(1 - \kappa^*)(1 + \kappa) - e^{-i(k_0 + k_1)L} (1 - \gamma^2)^2 (1 - \kappa^2)(1 + \kappa^*)(1 - \kappa) - \\ & - 2e^{i(k_0 - k_1)L} \gamma^2 (1 + \gamma^2)(1 + \kappa)(1 + \kappa^*) + 2e^{-i(k_0 - k_1)L} \gamma^2 (1 + \gamma^2)(1 - \kappa)(1 - \kappa^*) + 2e^{i(k_0 - k_1)L} (1 + \gamma^2)(1 - \kappa^*)(1 - \kappa) - \\ & - 2e^{-i(k_0 - k_1)L} (1 + \gamma^2)(1 + \kappa^*)(1 + \kappa) + e^{-i(k_0 - k_1)L} \gamma^2 (1 - \gamma^2)(1 + |\kappa|^2)(1 - \kappa)(1 - \kappa^*) + \\ & + e^{i(k_0 - k_1)L} \gamma^2 (1 - \gamma^2)(1 + |\kappa|^2)(1 + \kappa)(1 + \kappa^*) - e^{i(k_0 - k_1)L} (1 - \gamma^2)(1 + |\kappa|^2)(1 - \kappa^*)(1 - \kappa) - \\ & - e^{-i(k_0 - k_1)L} (1 - \gamma^2)(1 + |\kappa|^2)(1 + \kappa^*)(1 + \kappa). \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Здесь  $\kappa = 1 - i2Z$ .

1. Л. В. Иогансен, *ЖЭТФ* **45**, 207 (1963).
2. J. C. Penley, *Phys. Rev.* **128**, 596 (1962).
3. R. Tsu and L. Esaki, *Appl. Phys. Lett.* **22**, 562 (1973).
4. L. L. Chang and L. Esaki, *Appl. Phys. Lett.* **24**, 593 (1974).
5. А. Г. Алексанян, Е. М. Беленов, И. Н. Компанец, Ю. М. Попов, И. А. Полуэктов, С. И. Сачитов, Е. М. Соболева, А. Г. Соболев, А. В. Усков, В. Г. Цуканов, *ЖЭТФ* **83**, 1389 (1982).
6. А. Ф. Андреев, *ЖЭТФ* **46**, 1823 (1964).
7. R. Kummel, *Z. Phys.* **218**, 472 (1969).
8. Ю. К. Джикаев, *ЖЭТФ* **68**, 295 (1975).
9. R. Kummel, *Phys. Rev.* **B16**, 1979 (1977).
10. С. Н. Артеменко, А. Ф. Волков, А. В. Зайцев, *Письма в ЖЭТФ* **76**, 1816 (1978).
11. W. J. Tomasch, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 16 (1966).
12. W. J. McMillan and P. W. Anderson, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 85 (1966).

13. И. О. Кулик, *ЖЭТФ* **57**, 1745 (1969).
14. C. Ishii, *Progr. Theor. Phys. (Japan)* **44**, 1525 (1970).
15. J. Bardeen and J. L. Johnson, *Phys. Rev.* **B5**, 72 (1972).
16. A. V. Svidzinsky, T. N. Antsygina, and E. N. Bratus, *J. Low Temp. Phys.* **10**, 131 (1973).
17. J. Demers and J. Griffin, *Can J. Phys.* **49**, 285 (1971).
18. A. Griffin and J. Demers, *Phys. Rev.* **B4**, 2202 (1971).
19. G. E. Blonder, M. Tinkham, and T. M. Klapwijk, *Phys. Rev.* **B25**, 4515 (1982).
20. C. Beenakker, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3876 (1991).
21. G. Wendin and V. Shumeiko, *Superlattices and Microstructures* **20**, 569 (1996).
22. P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*, Benjamin, New York (1966).
23. А. А. Голубов, М. Ю. Куприянов, *ЖЭТФ* **96**, 1420 (1989).
24. J. M. Rowell and W. J. McMillan, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 453 (1966).
25. A. Hahn, *Phys. Rev. Lett.* **B31**, 2816 (1985).

- 
26. A. N. Omelyanchouk, R. de Bruyn Ouboter, and C. J. Muller, *ФНТ* **20**, 501 (1994).
  27. M. Blaauboer, R. T. W. Koperdraad, A. Lodder, and D. Lenstra, *Phys. Rev.* **B54**, 4283 (1996).
  28. K. Karrai, E. J. Choi, F. Dunmore, S. Liu, H. D. Drew, Qi. Li, D. B. Fenner, Y. D. Zhu, and Fu-Chun Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 152 (1992).
  29. M. Hurd and G. Wendin, *Phys. Rev.* **B49**, 15258 (1994).
  30. Г. А. Гогадзе, И. О. Кулик, *ЖЭТФ* **60**, 1819 (1971).
  31. Г. А. Гогадзе, *ФНТ* **12**, 1102 (1986).
  32. Д. Бом, *Квантовая теория*, Изд-во физ.-мат. лит., Москва (1961).
  33. В. М. Галицкий, Б. М. Карнаков, В. И. Коган, *Задачи по квантовой механике*, Наука, Москва (1981).

## Quantum levels and quasi-local states of SINIS-structures

G. A. Gogadze and A. M. Kosevich

Quantum states of a superconductor-insulator-normal metal-insulator-superconductor sandwich (the SINIS-structure) are investigated in terms of the Bogoliubov-de Gennes equations. A dispersion equation for the quasi-particle spectrum at energies  $E < \Delta$  ( $\Delta$  is the energy gap in the superconductor) is obtained with taking into consideration the Andreev and the conventional electron scattering by the interfaces of the SINIS-structure. The spectrum allows one to calculate the Josephson current in the system. The transparency coefficient for the electrons of the continuous energy spectrum and the quasi-local states («resonance levels») in the structure under consideration are calculated.