Физика низких температур, 1997, т. 23, № 7, с. 663–675

Поля и токи вихрей Абрикосова–Джозефсона в тонкой пленке

А. С. Малишевский

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Россия, 117924, г. Москва, Ленинский пр., 53
E-mail: malish@sci.lpi.ac.ru

Статья поступила в редакцию 27 ноября 1996 г.

Рассмотрены поля и токи, обусловленные вихревыми структурами джозефсоновского перехода в тонкой сверхпроводящей пленке. Получены простые асимптотические закономерности, описывающие поля и токи уединенных вихрей Абрикосова — Джозефсона и периодических цепочек таких вихрей. Эти закономерности применены к конкретным нелинейным мелкомасштабным состояниям.

Розглянуто поля і струми, обумовлені вихоровими структурами джозефсонівського переходу в тонкій надпровідній плівці. Одержано прості асимптотичні закономірності, що описують поля і струми відокремлених вихорів Абрикосова — Джозефсона і періодичних ланцюжків таких вихорів. Ці закономірності застосовано до конкретних нелінійних дрібномасштабних станів.

PACS: **74.50.+r**, **74.76.–w**

1. Введение

В 1975 г. Лихаревым с сотрудниками [1] высказаны важные утверждения и получены первые результаты в области нелокальной джозефсоновской электродинамики структур типа мостика переменной толщины, расположенного над сверхпроводящим экраном. В 1990 г. работами Иванченко и Соболевой [2] заложены основы нелокальной электродинамики джозефсоновского перехода в тонкой сверхпроводящей пленке, когда ее толщина D оказывается много меньше лондоновской глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник λ. С другой стороны, в 1992 г. была начата систематическая разработка нелокальной джозефсоновской электродинамики переходов между массивными сверхпроводниками [3,4]. В этих работах установлено, что нелокальное описание необходимо тогда, когда критическая плотность тока Джозефсона j_c оказывается достаточно большой:

$$j_c > j_0 \equiv c\phi_0 / (16\pi^2\lambda^3) \,, \qquad (1)$$

где $\phi_0 \equiv \pi\hbar c/|e| = 2{,}05{\cdot}10^{-7}$ Э$\cdot$ см^2 — квант магнитного потока. Для переходов между массивными сверхпроводниками в условиях (1) получен набор точных решений, описывающих вихревые структуры [1,4–11]. Сейчас ясно, что результаты работ [1,4–11] могут быть использованы в электродинамике Иванченко и Соболевой для переходов, критическая плотность Джозефсона которых удовлетворяет условию

$$j_c > \frac{D}{\lambda}\, j_0 \,, \qquad (2)$$

поскольку в таком случае основное уравнение электродинамики в [2] принимает аналитическую форму, совпадающую с основным уравнением одномерной нелокальной электродинамики джозефсоновских переходов между массивными сверхпроводниками в условиях (1) [1,4,12–15]. Полученные в работах [1,4–11] решения нелокального интегро-дифференциального уравнения для разности фаз φ куперовских пар по разные стороны джозефсоновского перехода позволяют определить магнитные и электрические поля и токи. Если при переходах между массивными сверхпроводниками распределение магнитного поля изучено в [4–11], то исследования подобного рода в электродинамике джозефсоновского перехода в тонкой пленке содержатся лишь в [12,13], где рассматривалась структура магнитного поля на основе работ [1,4], в которых для разности фаз куперовских пар получено решение в виде покоящегося 2π-кинка, а также в нашем предварительном сообщении [14], где изложены результаты, относящиеся к статическим периодическим структурам. В настоящем сообщении на основе богатого набора решений в работах [1,4,6–10] для разности фаз φ изучена структура электромагнитного поля при различных вихревых состояниях туннельного перехода в тонкой сверхпроводящей пленке в условиях (2).

В разд. 2 настоящего сообщения найдены ядра нелокальных операторов, связывающих магнитное и электрическое поля с производной разности фаз. В следующем разделе перечислены все известные на сегодняшний день плосковолновые решения уравнения sin-Гильберта.

Четвертый раздел посвящен изучению полей и токов одиночных вихрей. Характеристики периодических состояний (как со средним магнитным полем, так и без него) рассматриваются в разд. 5. В заключении кратко суммируются основные результаты.

2. Магнитные и электрические поля. Поверхностный ток

Получены выражения для тока и вихревых магнитного и электрического полей, созданных разностью фаз на джозефсоновском переходе в тонкой сверхпроводящей пленке ($D << \lambda$), которая расположена в плоскости $y = 0$. Будем исходить из выражения для плотности сверхпроводящего тока

$$\mathbf{j}_s(x, z, t) = -\frac{c}{4\pi\lambda^2}\left[\frac{\phi_0}{2\pi}\nabla\phi(x, z, t) + \mathbf{A}(x, 0, z, t)\right] \qquad (3)$$

и из уравнений Максвелла во всем пространстве

$$-\Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial V(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \qquad (4)$$

$$\Delta V(\mathbf{r}, t) = 0\ , \qquad (5)$$

где V и $\mathbf{A}$ — соответственно скалярный и векторный потенциалы (выбрана калибровка $\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0$), $\phi(x, z, t) = \theta(-x-d)\phi_1(x, z, t) + \theta(x-d)\phi_2(x, z, t)$; ϕ_1 и ϕ_2 — фазы волновых функций куперовских пар слева и справа от туннельного перехода, который расположен симметрично относительно прямой $x = 0$ и имеет ширину $2d$.

Считая переход бесконечно тонким, следуя [16] и используя (3), запишем плотность тока во всем пространстве:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{I}(x, z, t)\delta(y) = \mathbf{j}_s(x, z, t)D\delta(y) = -\frac{c\delta(y)}{4\pi\lambda_e}\left[\mathbf{S}(x, z, t) + \mathbf{A}(x, 0, z, t)\right], \qquad (6)$$

где $\mathbf{I}$ — ток, протекающий по сверхпроводящей пленке; $\mathbf{S}(x, z, t) = (\phi_0/2\pi)\nabla\phi(x, z, t)$; $\lambda_e = \lambda^2/D$ — эффективная лондоновская глубина проникновения. Подставляя (6) в уравнение Максвелла (4), получаем

$$\Delta\mathbf{A} = \frac{1}{\lambda_e}\left[\mathbf{S} + \mathbf{A}(x, 0, z, t)\right]\delta(y) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial V}{\partial t}. \qquad (7)$$

Выясним, при каких условиях в этом уравнении можно пренебречь током смещения. Как видно из (7), ток смещения в вакууме мал по сравнению со сверхпроводящим током, если характерные частоты ω достаточно малы ($\omega^2/c^2 << \lambda^2$). С другой стороны, как мы увидим ниже, плотность тока смещения в диэлектрической щели можно оценить как $\omega^2\omega_j^{-2}j_c\,\varphi$, где $\omega_j = 4\pi[dcj_c/(\varepsilon\phi_0)]^{1/2}$ — джозефсоновская частота, а ε — диэлектрическая проницаемость перехода. Учитывая, что плотность тока Джозефсона имеет оценку $j_c\,\varphi$, можно утверждать, что ток смещения в диэлектрической щели существен при $\omega \sim \omega_j$ (при таких частотах возможно излучение вихря в вакуум. Такой эффект мал в меру малости отношения скорости движения вихря к скорости света). Поэтому током смещения в вакууме можно пренебречь, если $\omega_j^2/c^2 << \lambda^{-2}$, т.е. ширина перехода достаточно мала:

$$2d << \frac{\varepsilon c\phi_0}{8\pi^2 j_c\,\lambda^2}\ .$$

В этом случае уравнение (7) принимает вид

$$\Delta\mathbf{A} = \lambda_e^{-1}\left[\mathbf{S} + \mathbf{A}(x, 0, z, t)\right]\delta(y)\ .$$

Переходя здесь к образам Фурье, получаем

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}, t) = -\frac{2\sqrt{q_x^2 + q_z^2}}{q^2\left(1 + 2\lambda_e\sqrt{q_x^2 + q_z^2}\right)}\,\mathbf{S}(q_x, q_z, t)\ . \qquad (8)$$

Из (3) следует, что $\nabla\mathbf{S}(x, z, t) = 0$. Это означает, что $\mathbf{S}(q_x, q_z, t)$ можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{S}(q_x, q_z, t) = \frac{q_z S_x - q_x S_z}{q_x^2 + q_z^2}\,[\mathbf{e}_y, \mathbf{q}]\ .$$

Последняя формула позволяет переписать выражение (8) для векторного потенциала в форме

$$\mathbf{A}(\mathbf{q},\,t) = 2i\,\frac{i(q_z S_x - q_x S_z)}{q^2 \sqrt{q_x^2 + q_z^2}\,(1 + 2\lambda_e \sqrt{q_x^2 + q_z^2})}\,[\mathbf{e}_y\,,\,\mathbf{q}]. \tag{9}$$

Входящая в (9) комбинация $i(q_z S_x - q_x S_z)$ есть образ Фурье от $\mathrm{rot}_y\,\mathbf{S}(x,\,z,\,t) = (\phi_0/2\pi)\,\mathrm{rot}_y\,\nabla\varphi$. Поскольку функция $\phi(x,\,z,\,t)$ терпит скачок при $x = 0$, то $\mathrm{rot}\,\nabla\phi \neq 0$. В Приложении 1 показано (ср. [17]), что

$$q_z S_x - q_x S_z = \frac{\phi_0}{2\pi}\,q_z\,\varphi(q_z\,,\,t)\,, \tag{10}$$

где $\varphi(q_z\,,\,t)$ — образ Фурье разности фаз $\varphi(z,\,t) = \phi_1(-0,\,z,\,t) - \phi_2(+0,\,z,\,t)$. Подставляя (10) в (9), получаем связь образов Фурье векторного потенциала и разности фаз:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q},\,t) = -\frac{\phi_0}{\pi}\,\frac{q_z\,\varphi(q_z\,,\,t)}{q^2 \sqrt{q_x^2+q_z^2}\,(1+ 2\lambda_e \sqrt{q_x^2+q_z^2})}\,[\mathbf{e}_y\,,\,\mathbf{q}]\,.$$

Возвращаясь в координатное представление, находим векторный потенциал

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},\,t) = -\frac{\phi_0}{8\pi^2\lambda_e}\,\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty} dz'\,\frac{\partial\varphi(z',\,t)}{\partial z'}\,\frac{(z-z')\mathbf{e}_x - x\mathbf{e}_z}{\sqrt{x^2 + (z-z')^2}}\,P(|y|,\,\sqrt{x^2 + (z-z')^2})\,, \tag{11}$$

где

$$P(|y|,\,\rho) = \int_0^{+\infty} \frac{dQ}{1 + Q}\,\exp\left(-\frac{|y|Q}{2\lambda_e}\right) J_1\left(\frac{Q\rho}{2\lambda_e}\right).$$

Вычисляя ротор потенциала (11), получаем следующее выражение для магнитного поля:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},\,t) = \frac{\phi_0}{8\pi^2\lambda_e}\,\mathrm{sgn}\,y\,\times$$

$$\times\,\nabla\int_{-\infty}^{+\infty} dz'\,\frac{\partial\varphi(z',\,t)}{\partial z'}\,R(|y|,\,\sqrt{x^2 + (z - z')^2}\,)\,, \tag{12}$$

где

$$R(|y|,\,\rho) = \int_0^{+\infty} \frac{dQ}{1 + Q}\,\exp\left(-\frac{|y|Q}{2\lambda_e}\right) J_0\left(\frac{Q\rho}{2\lambda_e}\right).$$

При выводе (11) и (12) мы считали, что туннельный переход бесконечно тонкий. Если ж ширина перехода $2d$ мала, но конечна, то при $|x| > d$ вектор-потенциал и магнитное поле определяются теми же формулами, так как при малых d можно пренебречь изменением ядер P и R, связанным с d (ср. со случаем массивных сверхпроводников [7]), а при $|x| < d$ векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r},\,t)$ и поле $\mathbf{H}(\mathbf{r},\,t)$ приближенно получаются из (11) и (12), в которых надо положить $x = 0$.

Для того чтобы получить электрическое поле $\mathbf{E} = c^{-1}\,\partial\mathbf{A}/\partial t - \nabla V$ необходимо, помимо векторного потенциала $\mathbf{A}$, знать скалярный потенциал V. Для его определения воспользуемся джозефсоновским соотношением: при $y = 0$, $|x| < d$

$$E_x \approx \frac{\phi_0}{4\pi c d}\,\frac{\partial\varphi(z,\,t)}{\partial t}\,. \tag{13}$$

Выше уже отмечалось, что характерные частоты $\sim \omega_j \propto d^{1/2}$. Это означает, что внутри перехода $E_x \propto d^{-1/2}$. С другой стороны, из (12) следует, что внутри перехода $\partial A_x/\partial t \propto \omega_j \propto d^{1/2}$. Поэтому, так как ширина перехода предполагается малой, можно считать, что внутри него электрическое поле определяется только скалярным потенциалом, который получаем из (13):

$$V(x,\,0,\,z,\,t) \approx -\frac{\phi_0\,x}{4\pi c d}\,\frac{\partial\varphi(z,\,t)}{\partial t}\,,\quad -d < x < d\,.$$

Находим распределение скалярного потенциала в сверхпроводящих пленках, решая уравнение Лапласа (5) с граничными условиями

$$V(\pm d,\,0,\,z,\,t) = \mp\,(\phi_0/4\pi c)\partial\varphi(z,\,t)/\partial t\,;$$

$$V(x,\,0,\,z,\,t) = -\frac{\phi_0}{4\pi^2 c}\,\mathrm{sgn}\,x(|x| - d)\,\times$$

$$\times\,\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} dz'\,\frac{\varphi(z',\,t)}{(z - z')^2 + (|x| - d)^2}\,,\quad |x| > d\,. \tag{14}$$

Из уравнения Лапласа (5) при $y \neq 0$ с граничным условием (14) получаем скалярный потенциал в вакууме

$$V(\mathbf{r},\, t) = \frac{i\phi_0}{8\pi^3 c} \times \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz'\, dq_x\, dq_z\, \varphi(z',\, t) \exp\left(iq_x\, x + iq_z\,(z-z') - \sqrt{q_x^2+q_z^2}\,|y|\right) \times$$

$$\times \left[\frac{|q_z| \sin(dq_x) + q_x \cos(dq_x)}{q_x^2 + q_z^2} - \frac{dq_x \cos(dq_x) - \sin(dq_x)}{dq_x^2}\right]$$

и сравнительно простые асимптотические представления для скалярного потенциала:

$$V(\mathbf{r},\, t) \approx \frac{\phi_0\, x}{8\pi^3 cd}\,\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz'\, dq_x\, dq_z \exp\left(iq_z\,(z-z') - \sqrt{q_x^2+q_z^2}\right) |y|\; \varphi(z',\, t)\; q_x \frac{d}{dq_x}\frac{\sin(dq_x)}{q_x} \quad ,\ |x| \lesssim d\ ;$$

$$V(\mathbf{r},\, t) \approx -\frac{\phi_0\, x}{4\pi^2 c}\,\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{\varphi(z',\, t)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-z')^2}\,\left(|y| + \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}\right)}\ ,\ |x| >> d\ .$$

Теперь, имея выражения для $\mathbf{A}(\mathbf{r},\, t)$ и $V(\mathbf{r},\, t)$, находим электрическое поле. Если $-d \lesssim x \lesssim d$, то

$$\mathbf{E} \approx \frac{\phi_0}{8\pi^3 c}\,\frac{\partial}{\partial t}\left\{-\nabla\left[\frac{x}{d}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz'\, \varphi(z',\, t)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dq_x\, dq_z \exp\left(iq_z\,(z-z') - \sqrt{q_x^2+q_z^2}\,|y|\right) q_x \frac{d}{dq_x}\frac{\sin(dq_x)}{q_x}\right] + \right.$$

$$\left. + \lambda_e^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{\partial\varphi(z',\, t)}{\partial z'}\, \mathrm{sgn}\,(z - z')\; P(|y|,\, |z - z'|)\right\}\ . \qquad (15)$$

Нетрудно убедиться, что при $y = 0$ x-компонента последней формулы преобразуется в выражение (13). Если $|x| >> d$, то

$$E_x \approx \frac{2\lambda_e}{c}\,\mathrm{sgn}\, y\, \frac{\partial H_z}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\phi_0\, |y|}{4\pi^2 c}\,\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'\, \varphi(z',\, t)}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}}\ ,$$

$$E_y \approx -\frac{\phi_0\, x\, \mathrm{sgn}\, y}{4\pi^2 c}\,\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'\, \varphi(z',\, t)}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}}\ , \qquad (16)$$

$$E_z \approx -\frac{2\lambda_e}{c}\,\mathrm{sgn}\, y\, \frac{\partial H_x}{\partial t}\ .$$

Наконец, получим выражения для поверхностного тока $\mathbf{I}(x,\, z,\, t)$, протекающего по пленке. Для этого воспользуемся граничным условием к уравнениям Максвелла: $\mathbf{I}(x,\, z,\, t) = (c/4\pi)[\mathbf{e}_y\ ,\ \mathbf{H}(x,\, +0,\, z,\, t) = \mathbf{H}(x,\, -0,\, z,\, t)]$. Из (12) следует, что

$$H_\alpha(x,\, +0,\, z,\, t) - H_\alpha(x,\, -0,\, z,\, t) =$$

$$= 2\,[\mathrm{sgn}\, y\, H_\alpha(\mathbf{r},\, t)]_{y=0}\ ,$$

$\alpha = x$ или z. Отсюда находим связь $\mathbf{I}(x,\, z,\, t)$ и параллельных пленке компонент магнитного поля при $y = \pm 0$ [14]:

$$I_x(x,\, z,\, t) = \frac{c}{2\pi}\,[\mathrm{sgn}\, y\, H_z(\mathbf{r},\, t)]_{y=0}\ ,$$

$$H_z(x,\, z,\, t) = -\frac{c}{2\pi}\,[\mathrm{sgn}\, y\, H_x(\mathbf{r},\, t)]_{y=0}\ . \qquad (17)$$

Итак, мы получили общие выражения, которые позволяют по известной разности фаз определить поля и ток. Мы применим эти выражения к конкретным нелинейным состояниям в разд. 4 и 5.

3. Уравнение sin-Гильберта и его решения

Как показано в [2,17], разность фаз куперовских пар удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{l}{\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{-\infty}^{+\infty} dz' \, \frac{\partial\varphi(z',\, t)}{\partial z'}\, R(0,\, |z-z'|) =$$

$$= \sin\,\varphi(z,\, t) + \frac{\beta}{\omega_j^2}\frac{\partial\varphi(z,\, t)}{\partial t} + \frac{1}{\omega_j^2}\frac{\partial^2\varphi(z,\, t)}{\partial t^2}\,, \qquad (18)$$

где $l = c\,\phi_0/(16\pi^2 j_c\,\lambda^2)$; $\beta = 4\pi\sigma/\varepsilon$; σ — проводимость туннельного перехода. В дальнейшем наше внимание будет сосредоточено на случае, когда существенное изменение разности фаз происходит на длинах меньших λ_e. Тогда можно использовать приближение

$$\frac{dR(0,\, |z|)}{dz} \approx \frac{\mathcal{P}}{z}\,,$$

где $\mathcal{P}$ — символ главного значения Коши, и уравнение (18) принимает вид [12–14,17]

$$\frac{l}{\pi}\,\mathcal{P}\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{z'-z}\,\frac{\partial\varphi(z',\, t)}{\partial z'} =$$

$$= \sin\,\varphi(z,\, t) + \frac{\beta}{\omega_j^2}\frac{\partial\varphi(z,\, t)}{\partial t} + \frac{1}{\omega_j^2}\frac{\partial^2\varphi(z,\, t)}{\partial t^2}\,. \qquad (19)$$

В настоящее время не существует общих методов решения уравнения sin-Гильберта (19) и получено двенадцать точных решений уравнения (19) [1,4–11]. Мы ограничимся рассмотрением только плосковолновых решений:

1) стационарный 2π-кинк [1,4]

$$\varphi = \pi + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{z}{l}\,; \qquad (20)$$

2) бегущий сильнодиссипативный 2π-кинк в переходе с постоянным током [8]

$$\varphi = \pi + \arcsin i + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{z - v_1 t}{l(1-i^2)^{-1/2}}\,, \qquad (21)$$

где i — однородно распределенная по контакту плотность тока, нормированная на j_c; $v_1 = \omega_j^2\, l/(\beta\sqrt{i^{-2}-1})$ — скорость волны;

3) бегущий бездиссипативный 4π-кинк [6,7]

$$\varphi = 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{z - l\omega_j t}{l}\,; \qquad (22)$$

4) стационарная периодическая цепочка с отличным от нуля средним магнитным полем [9]

$$\varphi = \pi + 2\,\mathrm{arctg}\left[\left(\sqrt{(L/l)^2+1} + L/l\right)\mathrm{tg}\,\frac{z}{2L}\right]; \qquad (23)$$

5) бездиссипативная бегущая периодическая цепочка со средним полем [9]

$$\varphi = 4\,\mathrm{arctg}\left[\left(\frac{l\omega_j + v_2}{l\omega_j - v_2}\right)^{1/2}\mathrm{tg}\,\frac{z - v_2 t}{2L}\right]. \qquad (24)$$

Скорость волны связана с L законом $v_2^2 = \omega_j^2\, L(\sqrt{L^2+4l^2} - L)/2$;

6) бегущая сильнодиссипативная периодическая вихревая структура в переходе с током [10]

$$\varphi = \pi + \theta + 2\,\mathrm{arctg}\left[\frac{1}{\mathrm{th}\,(\alpha/2)}\,\mathrm{tg}\,\frac{z - v_3 t}{2L}\right], \qquad (25)$$

где θ и α определяются из соотношений $\sin\theta\,\mathrm{ch}\,\alpha = i$, $\cos\theta\,\mathrm{sh}\,\alpha = l/L$, а скорость движения вихрей дается формулой $v_3 = -\,\omega_j^2 L\, i\, \mathrm{th}\,\alpha/\beta$;

7) стационарная периодическая цепочка с равным нулю средним магнитным полем [9]

$$\varphi = \pi + 2\,\mathrm{arctg}\left[\sqrt{(L/l)^2 - 1}\,\sin\frac{z}{L}\right]; \qquad (26)$$

8) бездиссипативная бегущая периодическая вихревая структура без среднего поля [9]

$$\varphi = 4\,\mathrm{arctg}\left[\frac{1}{\sqrt{v_4/(\omega_j\, l) - 1}}\,\sin\frac{z - v_4 t}{L}\right], \qquad (27)$$

где

$$L = \omega_j^{-1} v_4\,\sqrt{1 - (l\omega_j/v_4)}\,.$$

Приведенный здесь набор решений уравнений sin-Гильберта (19) будет использован далее для нахождения магнитных и электрических полей и токов, отвечающих известным вихревым решениям (19). Подчеркнем, что все эти решения были получены в теории джозефсоновских переходов между массивными сверхпроводниками, в то время как ниже эти решения будет использованы применительно к исследованию вихревых структур в джозефсоновском переходе в тонкой пленке.

4. Поля и токи уединенных вихрей

Исходя из общих формул (12), (15)–(17), связывающих поля с разностью фаз и ток с магнитным полем, получим асимптотические выражения для полей и токов в том случае, когда источником электромагнитного поля является произвольный мелкомасштабный вихрь. Такие выражения применим к решениям (20)–(22).

Общим для этих состояний является наличие характерного масштаба $l_* << \lambda_e$, такого, что при $|z - vt| >> l_*$ производная от разности фаз быстро спадает: $\partial\varphi/\partial z \sim l_*(z - vt)^{-2}$. Учитывая еще, что для этих состояний $\varphi(z, t)$ — нечетная функция $z - vt$, можно утверждать, что поток магнитного поля через сверхпроводящие пленки $\Phi = (\phi_0/2\pi)\int_{-\infty}^{+\infty} dz\, \partial\varphi/\partial z$ существует и отличен от нуля.

Воспользовавшись асимптотическими представлениями [14]

$$R(|y|, \rho) \approx \begin{cases} \ln \dfrac{4\lambda_e}{\gamma\rho} , \ y = 0 , \ \rho << 2\lambda_e \ \ (\gamma = 1{,}78\ldots) , \\ \dfrac{2\lambda_e}{\sqrt{y^2 + \rho^2}} , \ \sqrt{y^2 + \rho^2} >> 2\lambda_e , \end{cases}$$

$$\frac{\partial R(0, \rho)}{\partial |y|} \approx -\frac{1}{\rho} , \ \rho << 2\lambda_e ,$$

получаем магнитное поле в случае произвольной разности фаз $\varphi(z, t) = \psi(\zeta)$ $(\zeta = z - vt)$, производная которой $d\psi/d\zeta$ быстро спадает при $|\zeta| >> l_*$:

а) если $\psi(\zeta)$ существенно меняется на масштабах меньших λ_e (т.е. $l_* << \lambda_e$), то в плоскости перехода $(y = 0)$ вблизи вихря $(\sqrt{x^2 + \zeta^2} << 2\lambda_e)$

$$H_x(x, \pm 0, \zeta) \approx \mp \frac{\phi_0\, x}{8\pi^2\lambda_e} \psi_x(|x|, \zeta) ,$$

$$H_y(x, 0, \zeta) \approx -\frac{\phi_0}{8\pi^2\lambda_e} \psi_y(|x|, \zeta) , \qquad (28)$$

$$H_z(x, \pm 0, \zeta) \approx \mp \frac{\phi_0}{8\pi^2\lambda_e} \psi_z(|x|, \zeta) ,$$

где введены магнитные формфакторы вихря

$$\psi_x(|x|, \zeta) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{\psi'(z')}{x^2 + (\zeta - z')^2} ,$$

$$\psi_y(|x|, \zeta) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{\psi'(z')}{\sqrt{x^2 + (z - z')^2}} ,$$

$$\psi_z(|x|, \zeta) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{(\zeta - z')\, \psi'(z')}{x^2 + (\zeta - z')^2} , \ \psi'(z) \equiv d\psi/dz ;$$

б) вдали от вихря $(\sqrt{x^2 + y^2 + \zeta^2} >> 2\lambda_e$ и $|\zeta| >> l_*)$

$$\mathbf{H} \approx \frac{\Phi}{2\pi} \operatorname{sgn} y \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} , \qquad (29)$$

где $\mathbf{r}' \equiv \{x, y, \zeta\}$. Последняя формула получена для состояний, у которых $\Phi \neq 0$. Именно этим случаем мы и интересовались.

Получим теперь асимптотические формулы для электрического поля, созданного уединенным вихрем. Будем предполагать, что d — наименьший масштаб, т.е. $d << l_*$, λ_e и ограничимся случаем состояний с ненулевым потоком магнитного поля. Рассмотрим сначала поле внутри туннельного слоя, а также в вакууме непосредственно над и под переходом. В этой области пространства из (15) с учетом ассимптотик ядра

$$P(|y|, \rho) \approx \begin{cases} 1 , \ y = 0 , \ \rho << 2\lambda_e , \\ \dfrac{2\lambda_e}{\rho}\left(1 - \dfrac{|y|}{\sqrt{y^2 + \rho^2}}\right) , \ \sqrt{y^2 + \rho^2} >> 2\lambda_e \end{cases}$$

получаем для мелкомасштабных состояний $(l_* << \lambda_e)$:

а) внутри туннельного слоя $(-d < x < d$, $y = 0)$:

$$E_x \approx -\frac{\phi_0\, v}{4\pi c d} \psi'(\zeta) ,$$

$$E_y(x, \pm 0, \zeta) \approx \frac{\phi_0\, vx}{\pi^2 c d^2} \operatorname{sgn} y\, \psi'(\zeta) , \qquad (30)$$

$$E_z \approx -\frac{\phi_0\, vx}{4\pi c d} \psi''(\zeta) ;$$

б) вдали от вихря $(|\zeta| >> l_*)$ и плоскости перехода $(|y| >> \lambda_e)$

$$E_x \approx \frac{\Phi v}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{\zeta}{\sqrt{y^2+\zeta^2}\,(|y|+\sqrt{y^2+\zeta^2})}\right],$$

$$E_y \approx \frac{\varphi_0\, vxd^2}{\pi^2 c y^4}\,\mathrm{sgn}\, y\ \psi'(\zeta)\ ,\quad E_z \approx -\frac{\phi_0\, vxd^2}{3\pi^2 c y^3}\,\psi''(\zeta)\ . \tag{31}$$

Наконец, электрическое поле вдали от перехода ($|x| >> d$) получаем из (16):

а) в плоскости перехода ($y = 0$) при $\sqrt{x^2+\zeta^2}$, $l_* << \lambda_e$

$$E_x \approx \frac{\phi_0\, v}{4\pi^2 c}\frac{\partial\psi_z(|x|,\zeta)}{\partial\zeta}\ ,$$

$$E_y(x,\pm 0,\zeta) \approx \frac{\phi_0\, vx}{4\pi^2 c}\,\mathrm{sgn}\, y\,\frac{\partial\psi_E(|x|,\zeta)}{\partial\zeta}\ ,$$

$$E_z \approx -\frac{\phi_0\, vx}{4\pi^2 c}\frac{\partial\psi_x(|x|,\zeta)}{\partial\zeta}\ , \tag{32}$$

где электрический формфактор вихря ψ_E определен следующим образом:

$$\psi_E(|x|,\zeta) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz'\,\frac{\psi'(z')}{[x^2+(\zeta-z')^2]^{3/2}}\ ;$$

б) если же $\sqrt{x^2+y^2+\zeta^2} >> 2\lambda_e$ и $|\zeta| >> l_*$, то

$$E_x \approx \frac{\Phi v}{2\pi c r'^3}\,[|y| - 2\lambda_e(1-3\zeta^2(r')^{-2})]\ ,$$

$$E_y(x,\pm 0,\zeta) \approx -\frac{\Phi v}{2\pi c}\,\mathrm{sgn}\, y\,\frac{x}{r'^3}, \tag{33}$$

$$E_z \approx -\frac{3\Phi v\lambda_e\, x}{\pi c}\,\mathrm{sgn}\, y\,\frac{\zeta}{r'^5}\ .$$

Из формул (29) и (32) следует, что вдали от вихря $E \sim vH/c$, что отвечает рассматриваемому нами случаю медленных движений.

Для того чтобы применить формулы (28)–(32) к конкретным нелинейным состояниям (20)–(22), заметим, что эти состояния могут быть получены из функции

$$\psi(\zeta) = \psi_0 + 2n\,\mathrm{arctg}\,\frac{\zeta}{l_*} \tag{34}$$

соответствующим выбором параметров ψ_0 , n и l_*. Формфакторы для функции (34) имеют вид

$$\psi_x(|x|,\zeta) = \frac{2\pi n}{(|x|+l_*)^2+\zeta^2}\,\frac{|x|+l_*}{|x|}\ ,$$

$$\psi_z(|x|,\zeta) = \frac{2\pi n\zeta}{(|x|+l_*)^2+\zeta^2}\ ,$$

$$\psi_y(|x|,\zeta) \approx \begin{cases} \dfrac{4n}{l_*}\left(1-\dfrac{\zeta^2}{l_*^2}\right)\ln\dfrac{2l_*}{|x|}\ , & \sqrt{x^2+\zeta^2} << l_*\ ,\\[2ex] \dfrac{2\pi n}{\sqrt{x^2+\zeta^2}}\ , & |x|\ ,\ |\zeta| >> l_*\ , \end{cases} \tag{35}$$

$$\psi_E(|x|,\zeta) \approx \begin{cases} \dfrac{4n}{l_*\,x^2}\ , & \sqrt{x^2+\zeta^2} << l_*\ ,\\[2ex] \dfrac{2\pi n}{(x^2+\zeta^2)^{3/2}}\ , & |x|\ ,\ |\zeta| >> l_*\ . \end{cases}$$

Точные выражения для формфакторов ψ_y и ψ_E , справедливые при любом соотношении $|x|$, ζ и l_*, приведены в Приложении 2.

Для того чтобы получить магнитные и электрические поля для решений (20)–(22), необходимо подставить формфакторы (35) в (28)–(33) и при этом учесть, что для функции (34)

$$\Phi = -n\phi_0\ ,\quad \psi'(\zeta) = \frac{2nl_*}{\zeta^2+l_*^2}\ ,\quad \psi''(\zeta) = -\frac{4nl_*\,\zeta}{(\zeta^2+l_*^2)^2}\ .$$

Значения параметров n, l_* и v находим, сравнивая (20)–(22) с (34): для 2π-кинка (20) $n = 1$, $l_* = l$, $v = 0$; для решения (21) $n = 1$, $l_* = l/\sqrt{1-i^2}$, $v = \omega_j^2 l/(\beta\sqrt{i^{-2}-1})$, наконец, в случае 4π-кинка имеем $n = 2$, $l_* = l$, $v = \omega_j\, l$. Поверхностный ток находим, используя соотношение (17).

В частности, вблизи мелкомасштабного $2\pi n$-кинка ($\sqrt{x^2+\zeta^2}$, $l_* << \lambda_e$)

$$\mathbf{I} \approx \frac{n\phi_0\, c}{8\pi^2\lambda_e}\,\frac{-\zeta\mathbf{e}_x + \mathrm{sgn}\, x\,(l_*+|x|)\,\mathbf{e}_z}{(|x|+l_*)^2+\zeta^2}\ . \tag{36}$$

Эта формула обобщает полученное в [13] выражение для тока 2π-кинка при $l << |x|$, $|z| << \lambda_e$. Из (6) и (36) следует, что максимальная плотность тока, протекающего по контакту, равна $n\phi_0\, c/(8\pi^2\lambda^2 l_*)$. Потребуем, чтобы эта плотность тока не превышала плотности тока распаривания $j_d = c\phi_0/(12\sqrt{3}\pi^2\lambda^2\xi)$, где ξ — корреляционная длина. Тогда получаем следующее ограничение для параметра Гинзбурга—Ландау $\kappa = \lambda/\xi$:

$$\kappa > \frac{3\sqrt{3}n}{2}\,\frac{\lambda}{l_*}\,.$$

Магнитное поле в плоскости перехода ($y = 0$) на самых малых расстояниях от вихря найдем, подставляя (35) в (28):

$$H_y(x,\,0,\,\zeta) \approx \frac{n\phi_0}{2\pi^2\lambda_e\,l_*}\ln\frac{|x|}{2l_*}\,,\quad \sqrt{x^2+\zeta^2} << l_*\,. \tag{37}$$

Эта формула показывает, что для любого из вихрей Абрикосова—Джозефсона (20)–(22) магнитное поле в плоскости перехода логарифмически расходится при $\sqrt{x^2+\zeta^2} \to 0$. Подобная расходимость возникает и в теории обычных абрикосовских вихрей. Ее устраняют обрезанием на корреляционной длине ξ, что физически означает наличие нормального остова с размером $\sim \xi$ (напомним, что в нелокальной теории переходов между массивными сверхпроводниками такое нарушение сверхпроводимости не возникает [4–7]). Сделаем такую регуляризацию и в нашем случае. Тогда выражение (37) справедливо при $|x| > \xi$, а поле внутри нормального остова с логарифмической точностью равно

$$H_y \approx \frac{n\phi_0}{2\pi^2 l_*\,\lambda_e}\ln\frac{\xi}{l_*}\,.$$

В заключение этого раздела сравним электрические поля в состояниях (21) и (22). Для этого сначала определим, при каких значениях безразмерной плотности тока i и параметра β, характеризующего диссипацию, могут реализоваться оба рассматриваемых состояния (при фиксированной величине джозефсоновской частоты ω_j). Условие применимости решения (21) – большая диссипация ($\beta >> vl_*^{-1}$) или, учитывая значения v и l_* ,

$$\beta >> i^{1/2}\omega_j\,. \tag{38}$$

Напротив, решение (22) — бездиссипативное, т.е. оно применимо при $\beta << vl_*^{-1}$. Подставляя сюда v и l_* , находим

$$\beta << \omega_j\,. \tag{39}$$

Условия (38) и (39) могут реализоваться совместно при $i^{1/2} << 1$. В этом случае для состояния (21) имеем $v \approx il\omega_j^2/\beta << l\omega_j$, $l_* \approx l$, т.е. скорость движения вихря (21) меньше, чем вихря (22), в то время как характерные масштабы этих вихрей одинаковы. Это приводит к тому, в частности, что, согласно (30)–(33), (35), электрическое поле в состоянии (22) больше, чем в состоянии (21).

5. Поля и токи периодических цепочек вихрей

Исходя из выражений (12), (15)–(17) получим формулы для полей и токов в том случае, когда ($\psi(\zeta) - 2\pi L$) — периодическая функция ζ. Затем мы применим полученные выражения к конкретным нелинейным состояниям (23)–(27).

При анализе $2\pi L$-периодических цепочек производную разности фаз удобно представить в виде [14]

$$\psi'(\zeta) = \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\cos\frac{n\zeta}{L}\,. \tag{40}$$

В частном случае, когда

$$\psi(\zeta) = \psi_0 + 2m\,\mathrm{arctg}\left(\gamma\,\mathrm{tg}\,\frac{\zeta}{2L}\right), \tag{41}$$

согласно [18], имеем $A_0 = m$, $A_n = 2m(\gamma-1)^n(\gamma+1)^{-n}$, $n \ge 1$. Решения (23)–(25) находятся из функции (41) соответствующим выбором параметров ψ_0 , m и γ. Если же

$$\psi(\zeta) = \psi_0 + 2m\,\mathrm{arctg}\left(\delta\,\sin\frac{\zeta}{L}\right), \tag{42}$$

то при $n = 2k \ge 0$, $A_n = 0$, а коэффициенты разложения ψ' с нечетными номерами определяются формулой $A_{2k+1} = 4m[\delta/(1+\sqrt{1+\delta^{-2}}]^{2k+1}$, $k \ge 0$ [18]. Подбором параметров ψ_0 , m и δ из функции (42) можно получить нелинейные состояния (26), (27).

Подставляя разложение (40) в выражение для магнитного поля (12), получаем $\mathbf{H} = \overline{\mathbf{H}}(x,\,y) + \delta\mathbf{H}(x,\,y,\,\zeta)$, где черта сверху означает усреднение по периоду $2\pi L$ пространственных осцилляций, а $\delta\mathbf{H}$ обозначает осциллирующую добавку к среднему значению. Величины $\overline{\mathbf{H}}$ и $\delta\mathbf{H}$ определяются выражениями [14]

$$\overline{H}_x = -\frac{\phi_0}{4\pi^2\lambda_e}\,\mathrm{sgn}\,y\,\overline{\psi'}\int_0^{+\infty}\frac{dQ}{1+Q}\exp\left(-\frac{|y|Q}{2\lambda_e}\right)\sin\frac{xQ}{2\lambda_e},$$

$$\overline{H}_y = -\frac{\phi_0}{4\pi^2\lambda_e}\,\overline{\psi'}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dQ}{1+Q}\exp\left(-\frac{|y|Q}{2\lambda_e}\right)\cos\frac{xQ}{2\lambda_e}\,,$$

$$\overline{H}_z = 0\,, \tag{43}$$

$$\delta H_x = -\frac{\phi_0}{4\pi^2\lambda_e L}\,\mathrm{sgn}\,y\sum_{n=1}^{+\infty}A_n F_x\left(\frac{n|y|}{L},\frac{nx}{L}\right)\cos\frac{n\zeta}{L}\,,$$

$$\delta H_y = -\frac{\phi_0}{4\pi^2\lambda_e L}\sum_{n=1}^{+\infty}A_n F_y\left(\frac{n|y|}{L},\frac{nx}{L}\right)\cos\frac{n\zeta}{L}\,,$$

$$\delta H_z = -\frac{\phi_0}{4\pi^2\lambda_e L}\,\mathrm{sgn}\,y\sum_{n=1}^{+\infty}A_n F_z\left(\frac{n|y|}{L},\frac{nx}{L}\right)\sin\frac{n\zeta}{L}\,,$$

где $\overline{\psi'} = A_0/L$ — усредненная по периоду производная разности фаз (если разность фаз определяется (41), то $\overline{\psi'} = m/L$, в случае состояния (42) среднее значение ψ' равно нулю), значения функций F_x, F_y и F_z приведены в Приложении 3.

Разложение электрического поля по гармоникам при $-d < x < d$ получаем из (15):

$$\overline{E}_x = -\frac{\phi_0\,v}{2\pi^2 cd}\,f(y)\overline{\psi'}\,,$$

$$\overline{E}_y = \frac{\phi_0\,vd^2x}{\pi^2c}\,\overline{\psi'}\,\frac{\mathrm{sgn}\,y}{(d^2+y^2)^2}\,,\quad \overline{E}_z = 0\,,$$

$$\delta E_x = -\frac{\phi_0\,v}{2\pi^2cd}\,f(y)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{A_n}{L}\cos\frac{n\zeta}{L} -$$

$$-\frac{\phi_0\,v}{4\pi^2c\lambda_e}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{A_n}{L}\cos\frac{n\zeta}{L}\,F_z\left(\frac{n|y|}{L},0\right),$$

$$\delta E_y = \frac{\phi_0\,vxd^2}{\pi^2c}\;\frac{\mathrm{sgn}\,y}{(d^2+y^2)^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{A_n}{L}\cos\frac{n\zeta}{L}\,,$$

$$\delta E_z = \frac{\phi_0\,vx}{2\pi^2cd}\,f(y)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nA_n}{L}\sin\frac{n\zeta}{L}\,, \tag{44}$$

где $f(y) \equiv \mathrm{arctg}\,(d|y|^{-1}) - d|y|\,(d^2+y^2)^{-1}$.

Формулы (44) получены в предположении, что $d << L$. Для электрического поля вдали от перехода ($|x| >> d$) получаем из (16)

$$\overline{\mathbf{E}} = -\frac{\phi_0\,v}{2\pi^2c}\,\overline{\psi'}\,\frac{|y|\,\mathbf{e}_x - x\,\mathrm{sgn}\,y\,\mathbf{e}_y}{x^2+y^2}\,,$$

$$\delta E_x = \frac{\phi_0\,v}{2\pi^2cL^2}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{+\infty}nA_n\left[F_z\left(\frac{n|y|}{L},\frac{nx}{L}\right)-\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,K_1\left(\frac{n\sqrt{x^2+y^2}}{L}\right)\right]\cos\frac{n\zeta}{L},$$

$$\delta E_y = \frac{\phi_0\,vx\,\mathrm{sgn}\,y}{2\pi^2cL^2\sqrt{x^2+y^2}}\sum_{n=1}^{+\infty}nA_n K_1\left(\frac{n\sqrt{x^2+y^2}}{L}\right)\cos\frac{n\zeta}{L},$$

$$\delta E_z = \frac{\phi_0\,v}{2\pi^2cL^2}\sum_{n=1}^{+\infty}nA_n F_x\left(\frac{n|y|}{L},\frac{nx}{L}\right)\sin\frac{n\zeta}{L}\,. \tag{45}$$

Дальнейшие рассуждения основаны на следующем замечании [14]: периодические зависимости полей и токов от ζ могут проявляться на фоне их средних значений только вблизи туннельного слоя, т.е. при $(x^2+y^2)^{1/2} \lesssim L$. В соответствии с этим если среднее значение ψ' отлично от нуля, то при $(x^2+y^2)^{1/2} >> L$ величины H_x, H_y, E_x, E_y и I_z определяются своими средними значениями. В противоположном случае, когда $\overline{\psi'} = 0$, то, так как средние значения всех компонент полей и токов пропорциональны $\overline{\psi'}$, на любых расстояниях от перехода зависимости H_x, H_y, E_x, E_y и I_z от ζ существенны. С другой стороны, при нахождении H_z, E_z и I_x важно учитывать периодическую зависимость от ζ при произвольных $\overline{\psi'}$ и $(x^2+y^2)^{1/2}$ (поскольку средние значения этих величин всегда равны нулю). С учетом этого имеем для магнитных полей и токов в том случае, когда $\overline{\psi'} \neq 0$,

а) при $\sqrt{x^2+y^2} << L$ величины

$$H_x \approx -\frac{\phi_0}{4\pi^2\lambda_e}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}\,\psi'(\zeta)\,,$$

$$H_y \approx -\frac{\phi_0}{4\pi^2\lambda_e}\left(\overline{\psi'}\,\ln\frac{\lambda_e}{L} + \psi'\,\ln\frac{2L}{\gamma\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

$$H_z \approx -\frac{\phi_0}{8\pi\lambda_e L}\,\mathrm{sgn}\,y\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\sin\frac{n\zeta}{L}\,, \tag{46}$$

$$I_x \approx \frac{c\phi_0}{16\pi\lambda_e L} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin \frac{n\zeta}{L} ,$$

$$I_z \approx \frac{c\phi_0}{16\pi^2\lambda_e} \operatorname{sgn} x\ \psi'(\zeta) .$$

Если A_n — коэффициенты ряда Фурье производной функции (41), то сумму, входящую в выражения для H_z и I_x , можно вычислить:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin \frac{n\zeta}{L} = \frac{m \sin (\zeta/L)}{(\gamma^2 + 1)(\gamma^2 - 1)^{-1} - \cos (\zeta/L)} ;$$

б) при $L << \sqrt{x^2 + y^2} << \lambda_e$ имеем

$$H_x \approx - \frac{\phi_0 \overline{\psi'}}{4\pi^2\lambda_e} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} ,$$

$$H_y \approx - \frac{\varphi_0 \overline{\psi'}}{4\pi^2\lambda_e} \ln \frac{2\lambda_e}{\gamma \sqrt{x^2 + y^2}} ,$$

$$I_z \approx \frac{c\varphi_0}{16\pi^2\lambda_e} \overline{\psi'} \operatorname{sgn} x .$$

Если $y^2 >> L^2$ и $L|x|$, то, так как $F_z \propto n^{-1/2} \exp(-n|y|/L)$, в сумме (43), определяющей δH_z , первый член является доминирующим и поэтому $H_z \propto A_1 \exp(-|y|/L)$. Если же $|y| << L << |x|$, то в соответствии с тем, что $F_z \propto \exp(-n|x|/L)$, в сумме по n, определяющей δH_z , можно оставить только слагаемое с $n = 1$, поэтому H_z , $I_x \propto A_1 \exp(-|x|/L)$;

в) при $\sqrt{x^2 + y^2} >> \lambda_e$

$$H_x \approx - \frac{\phi_0\, x \operatorname{sgn} y}{2\pi^2(x^2 + y^2)} \overline{\psi'} ,$$

$$H_y \approx - \frac{\phi_0\, |y|}{2\pi^2(x^2 + y^2)} \overline{\psi'} ,$$

$$I_z \approx \frac{c\phi_0}{4\pi^3 x} \overline{\psi'} ,$$

а компоненты H_z и I_x затухают так же, как и в случае б).

Рассмотрим теперь магнитные поля и токи при среднем значении производной разности фаз, равном нулю:

а) при $\sqrt{x^2 + y^2} << L$ значения **H** и **I** находим из формул (46), в которых нужно положить $\psi' = 0$. Если A_n — коэффициенты Фурье для производной от функции (42), то ряд, входящий в выражения для H_z и I_x , можно просуммировать:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin \frac{n\zeta}{L} = 4m \sqrt{1 + \delta^{-2}}\, \frac{\sin (\zeta/L)}{2\delta^{-2} + 1 - \cos (2\zeta/L)};$$

б) при $y^2 >> L^2$ и $L|x|$ имеем F_x , $F_y \propto n^{-1/2} \exp(-n|y|/L)$. Поэтому, по аналогии с тем, что было сказано для случая $\overline{\psi'} \neq 0$, можно утверждать, что все компоненты магнитного поля затухают как $\exp(-|y|/L)$ и пропорциональны A_1;

в) если $|y| << L << |x|$, то $F_x \propto \exp(-n|x|/L)$, $F_y \propto n^{-1/2} \exp(-n|x|/L)$. Поэтому в этой области все компоненты магнитных полей и токов пропорциональны $A_1 \exp(-|x|/L)$.

Воспользовавшись (45), находим электрическое поле при $-d < x < d$:

$$E_x \approx - \frac{\phi_0\, v}{2\pi^2 dc} f(y)\psi'(\zeta) + g(y,\, \zeta) ,$$

$$E_y \approx \frac{\phi_0\, v d^2 x}{\pi^2 c} \frac{\psi'(\zeta)}{(d^2 + y^2)^2} ,$$

$$E_z \approx - \frac{\phi_0\, xv}{2\pi^2 c d} f(y)\, \psi''(\zeta) ,$$

где при $|y| << L$ слагаемое $g \approx -\phi_0\, v\, [\psi'(\zeta) - \overline{\psi'}\,] \times \times (8\pi^2\lambda_e c)^{-1}$, а при больших значениях y ($|y| >> L$) $g(y)$ экспоненциально затухает и определяется первым членом разложения производной разности фаз: $g \propto A_1 \exp(-|y|/L)$. Электрическое поле на больших от перехода расстояниях ($|x| >> d$) получаем из (45):

а) при $\sqrt{x^2 + y^2} << L$

$$E_x \approx - \frac{\phi_0\, v}{2\pi^2 c} \frac{|y|\psi'(\zeta)}{x^2 + y^2} + \frac{\phi_0\, v}{4\pi c L} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nA_n}{L} \cos \frac{n\zeta}{L} ,$$

$$E_y \approx \frac{\phi_0\, v}{2\pi^2 c} \frac{x \operatorname{sgn} y}{x^2 + y^2} \psi'(\zeta) , \tag{47}$$

$$E_z \approx - \frac{\phi_0\, v}{4\pi L c} \psi''(\zeta) .$$

Входящая в (47) сумма по n в случае функции (41) равна

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nA_n}{L} \cos \frac{n\zeta}{L} = \frac{m}{L} \frac{(\gamma^2 + 1)(\gamma^2 - 1)^{-1} \cos (\zeta/L) - 1}{[(\gamma^2 + 1)(\gamma^2 - 1)^{-1} - \cos (\zeta/L)]^2}.$$

Если же коэффициенты A_n определяют производную функции (42), то

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nA_n}{L} \cos \frac{n\zeta}{L} = \frac{8m}{L} \sqrt{1 + \delta^{-2}} \cos \frac{\zeta}{L} \times$$

$$\times \frac{\delta^{-2} - \sin^2 (\zeta/L)}{[1 + 2\delta^{-2} - \cos (2\zeta/L)]^2} ;$$

б) если $y^2 >> L^2$ и $L|x|$, то

$$\mathbf{E} \approx - \frac{\phi_0\, v}{2\pi^2 c} \overline{\psi'} \frac{|y|\mathbf{e}_x - x \operatorname{sgn} y\, \mathbf{e}_y}{x^2 + y^2} + O\, [\exp (-|y|/L)];$$

в) при $|y| << L << |x|$

$$\mathbf{E} \approx \frac{\phi_0\, v}{2\pi^2 c} \frac{\operatorname{sgn} y}{x} \overline{\psi'}\, \mathbf{e}_y + O\, [exp\, (-|x|/L)] .$$

Полученные в этом разделе асимптотические формулы для полей и токов позволяют сделать ряд выводов о структуре полей в случае периодических состояний контакта:

а) усредненные по периоду $2\pi L$ пространственных осцилляций z-компоненты магнитного и электрического полей равны нулю, в то время как x- и y-проекции средних полей обращаются в нуль только для тех решений, для которых $\overline{\psi'} = 0$;

б) как следует из (46), магнитное поле вблизи перехода имеет логарифмическую особенность, которую, как и в случае уединенных вихрей, нужно связывать с разрушением сверхпроводимости вблизи перехода. Электрическое поле всюду конечно;

в) усредненное по периоду осцилляций магнитное поле в пленках ($y = 0$) для состояний (20)–(22)

$$\overline{H}_y \approx \frac{m\phi_0}{4\pi\lambda_e\, L} \ln \frac{\gamma|x|}{2\lambda_e} , \ |x| << \lambda_e$$

качественно отличается от среднего поля в массивных сверхпроводниках [9]:

$$\overline{H}_y \approx \frac{m\phi_0}{4\pi\lambda L} , \ |x| << \lambda .$$

Это связано с тем, что, в отличие от тонких пленок, вихри Абрикосова—Джозефсона в массивных сверхпроводниках имеют регулярный остов.

6. Заключение

В настоящей работе проведено теоретическое рассмотрение полей и токов в джозефсоновском переходе в тонкой сверхпроводящей пленке. Наибольшее внимание уделено случаю большой плотности критического тока Джозефсона, когда разность фаз удовлетворяет уравнению sin-Гильберта. Полученные общие результаты применены к восьми конкретным нелинейным решениям пространственно-нелокального уравнения sin-Гильберта в теории массивных сверхпроводников.

Показано, что вихри Абрикосова—Джозефсона в тонкой пленке отличаются от вихрей в нелокальной электродинамике массивных сверхпроводников, которые имеют регулярный остов (т.е. их магнитное поле не имеет особенностей), в то время как вихри в пленке подобно обычным абрикосовским вихрям обладают сингулярностью, которую необходимо регуляризовать на расстояниях порядка корреляционной длины.

Выражаю глубокую благодарность члену-корреспонденту РАН В. П. Силину за постановку задачи, интерес к работе и поддержку.

Работа поддерживается Научным советом по проблеме ВТСП и выполнена в рамках проекта № 95008 Государственной программы «Высокотемпературная сверхпроводимость». Также автор выражает благодарность за поддержку Российскому фонду фундаментальных исследований (грант № 96-02-17303).

Приложение 1

Покажем, как возникшая в формуле (9) величина $q_z\, S_x - q_x\, S_z$ связана со скачком фазы при $x = 0$. Для этого сначала выразим $\phi(x, z)$ через $\phi_1(-0, z)$ и $\phi_2(+0, z)$. Из (3) следует, что ϕ_1 и ϕ_2 удовлетворяют уравнению Лапласа в полуплоскости:

$$\begin{aligned} &\Delta\phi_1(x, z) = 0 \quad \text{при } x < 0 , \\ &\Delta\phi_2(x, z) = 0 \quad \text{при } x > 0 . \end{aligned} \qquad (\text{П}.1)$$

Решая (П.1), находим

$$\phi_1(x, z) = -\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{\phi_1(-0, z')}{x^2 + (z - z')^2}\,,$$

$$\phi_2(x, z) = \frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{\phi_2(+0, z')}{x^2 + (z - z')^2}\,. \qquad (\text{П}.2)$$

Вычисляя на основании (П.2) $\partial\phi/\partial x$ и $\partial\phi/\partial z$ и переходя к представлению Фурье, получаем

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{q_x q_z} = -|q_z|\left[\frac{\phi_2(+0, q_z)}{|q_z| + iq_x} - \frac{\phi_1(-0, q_z)}{|q_z| - iq_x}\right],$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{q_x q_z} = iq_z\left[\frac{\phi_2(+0, q_z)}{|q_z| + iq_x} + \frac{\phi_1(-0, q_z)}{|q_z| - iq_x}\right].$$

Отсюда находим искомую величину:

$$q_z S_x - q_x S_z = \frac{\phi_0}{2\pi}\left[q_z\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{q_x q_z} - q_x\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{q_x q_z}\right] =$$

$$= \frac{\phi_0 q_z}{2\pi}\,[\phi_1(-0, q_z) - \phi_2(+0, q_z)]\,.$$

Приложение 2

Формфакторы ψ_y и ψ_E для функции (34) имеют вид

$$\psi_y(|x|, \zeta) = -\frac{2^{3/2}n}{R^2}\left[\frac{\sqrt{R^2 - x^2 - \zeta^2 + l_*^2}}{2}\ln\frac{R^2 + \zeta^2 + l_*^2 - \sqrt{2}(l_*\sqrt{R^2 - x^2 - \zeta^2 + l_*^2} + |\zeta|\sqrt{R^2 + x^2 + \zeta^2 - l_*^2})}{x^2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{R^2 + x^2 + \zeta^2 - l_*^2}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{R^2 + x^2 + \zeta^2 - l_*^2} - \sqrt{2}|\zeta|}{\sqrt{R^2 - x^2 - \zeta^2 + l_*^2} - \sqrt{2}l_*}\right],$$

$$\psi_E(|x|, \zeta) = \frac{2^{3/2}n}{x^2}\frac{\partial}{\partial l_*}\left\{\frac{l_*\,\psi_y(|x|, \zeta)}{2^{3/2}n} + \frac{|\zeta|}{R^2}\left[\frac{\sqrt{R^2 + x^2 + \zeta^2 - l_*^2}}{2}\times\right.\right.$$

$$\times\ln\left(\frac{x^2}{R^2 + \zeta^2 + l_*^2 - \sqrt{2}\,(l_*\sqrt{R^2 - x^2 - \zeta^2 + l_*^2} + |\zeta|\sqrt{R^2 + x^2 + \zeta^2 - l_*^2})}\right) +$$

$$\left.\left. + \sqrt{R^2 - x^2 - \zeta^2 + l_*^2}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{R^2 + x^2 + \zeta^2 - l_*^2} - \sqrt{2}\,|\zeta|}{\sqrt{R^2 - x^2 - \zeta^2 + l_*^2} - \sqrt{2}\,l_*}\right]\right\},$$

где $R \equiv [(x^2 + \zeta^2 - l_*^2)^2 + 4l_*^2\zeta^2]^{1/4}$.

Приложение 3

Функции F_x, F_y и F_z, которые определяют коэффициенты Фурье в разложении полей, определяются следующим образом:

$$F_x(a, b) =$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{du\,\mathrm{sh}\,u}{\mathrm{ch}\,u + L/(2n\lambda_e)}\exp(-a\,\mathrm{ch}\,u)\sin(b\,\mathrm{sh}\,u)\,,$$

$$F_y(a, b) =$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{du\,\mathrm{ch}\,u}{\mathrm{ch}\,u + L/(2n\lambda_e)}\exp(-a\,\mathrm{ch}\,u)\cos(b\,\mathrm{sh}\,u)\,,$$

$$F_z(a, b) =$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{du}{\mathrm{ch}\,u + L/(2n\lambda_e)}\exp(-a\,\mathrm{ch}\,u)\cos(b\,\mathrm{sh}\,u)\,.$$

Для мелкомасштабных ($L << \lambda_e$) периодических состояний, в силу того что $n \geq 1$, в интегралах по *и* можно пренебречь отношением $L/(2n\lambda_e)$ в знаменателе. Тогда имеем следующие асимптотические представления:

а) если $\sqrt{a^2+b^2} << 1$, то

$$F_x \approx \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\,, \quad F_y \approx \ln\frac{2}{\gamma\sqrt{a^2+b^2}}\,, \quad F_z \approx \frac{\pi}{2}\,;$$

б) если $a^2 >> 1, |b|$, то

$$F_x \approx \sqrt{\pi/2a}\;\frac{b}{a}\exp(-a)\,,$$

$$F_y \approx F_z \approx \sqrt{\pi/2a}\;\exp(-a)\,;$$

в) если $a << 1 << b$, то

$$F_x \approx \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} b\exp(-|b|)\,,$$

$$F_y \approx \sqrt{\pi/2|b|}\;\exp(-b)\,,$$

$$F_z \approx \frac{\pi}{2}\exp(-|b|)\,.$$

Эти асимптотические выражения позволяют получить приближенные формулы для полей и токов периодических цепочек.

1. Г. М. Лапир, К. К. Лихарев, Л. А. Маслова, В. К. Семенов, *ФНТ* **1**, 1235 (1975).
2. Ю. М. Иванченко, Т. К. Соболева, *Письма в ЖЭТФ* **51**, 100 (1990); Yu. M. Ivanchenko and T. K. Soboleva, *Phys. Lett.* **A147**, 65 (1990).
3. Ю. М. Алиев, В. П. Силин, С. А. Урюпин, *СФХТ* **5**, 228 (1992).
4. A. Gurevich, *Phys. Rev.* **B46**, 3187 (1992).
5. Ю. М. Алиев, В. П. Силин, С. А. Урюпин, *Письма в ЖЭТФ* **57**, 187 (1993).
6. Yu. M. Aliev and V. P. Silin, *Phys. Lett.* **A177**, 253 (1993).
7. Ю. М. Алиев, В. П. Силин, *ЖЭТФ* **104**, 2526 (1993).
8. A. Gurevich, *Phys. Rev.* **B48**, 12857 (1993).
9. Г. Л. Алфимов, В. П. Силин, *ЖЭТФ* **106**, 671 (1994).
10. В. П. Силин, *Письма в ЖЭТФ* **60**, 442 (1994).
11. A. Gurevich, *Physica* **C243**, 191 (1995).
12. R. G. Mints and I. B. Snapiro, *Physica* **A200**, 426 (1993).
13. R. G. Mints and I. B. Snapiro, *Phys. Rev.* **B49**, 6188 (1994).
14. А. С. Малишевский, В. П. Силин, *Краткие сообщения по физике ФИАН*, № 1–2, 64 (1996).
15. Ю. М. Алиев, Г. Л. Алфимов, К. Н. Овчинников, В. П. Силин, С. А. Урюпин, *ФНТ* **22**, 626 (1996).
16. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987).
17. R. G. Mints and I. B. Snapiro, *Phys. Rev.* **B51**, 3054 (1995).
18. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, Москва (1981).

Fields and currents of Abrikosov–Josephson vortices in a thin film

A. S. Malishevskii

The fields and currents, bounded with vortex structures of Josephson junction in a thin film are considered. Simple analytical laws which describe fields and currents of single Abrikosov–Josephson vortices and periodical chains of such vortices are derived. These laws are applicated to some nonlinear small-scaled states.