УДК 517.925.44

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. М. Евтухов, М. А. Талимончак

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
Украина, 65000, Одесса, ул. Дворянская, 2

For nonlinear systems of ordinary differential equations, we find asymptotic representations of a certain class of solutions that are asymptotically close to cyclic ones.

Встановлено асимптотичні зображення для одного класу розв'язків нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь, асимптотично близьких до циклічних.

1. Постановка задачи и вспомогательные обозначения. Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$y_i' = f_i(t, y_1, \ldots, y_n), \quad i = \overline{1, n}, \tag{1.1}$$

где $f_i : [a, \omega[\times \prod_{i=1}^{n} \Delta_{Y_i^0} \longrightarrow \mathbf{R}$, $i = \overline{1, n}$, — непрерывные функции, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$[1], $\Delta_{Y_i^0}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, — односторонняя окрестность Y_i^0, Y_i^0 равно либо 0, либо $\pm\infty$.

Определение 1.1. *Решение $(y_i)_{i=1}^n$ системы (1.1), заданное на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, будем называть $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$-решением, где $-\infty \leq \Lambda_i \leq +\infty$, $i = \overline{1, n-1}$, если для него выполняются следующие условия:*

$$y_i(t) \in \Delta_{Y_i^0} \quad \textit{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y_i(t) = Y_i^0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{1.2}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{y_i(t) y_{i+1}'(t)}{y_i'(t) y_{i+1}(t)} = \Lambda_i, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{1.3}$$

Ранее в работах [1–5] исследовалась асимптотика $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$-решений для циклической системы дифференциальных уравнений вида

$$y_i' = \alpha_i p_i(t) \varphi_{i+1}(y_{i+1}), \quad i = \overline{1, n}^2,$$

в которой $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $i = \overline{1, n}$, $p_i : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$, $i = \overline{1, n}$, — непрерывные функции, $\varphi_i : \Delta_{Y_i^0} \rightarrow]0; +\infty[$, $i = \overline{1, n}$, — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{\substack{y_i \to Y_i^0 \\ y_i \in \Delta_{Y_i^0}}} \frac{y_i \varphi_i'(y_i)}{\varphi_i(y_i)} = \sigma_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad \prod_{i=1}^{n} \sigma_i \neq 1.$$

[1] Считаем, что $a > 1$ в случае $\omega = +\infty$ и $a > \omega - 1$ в случае $\omega < +\infty$.

[2] Здесь и далее для всех функций и параметров с индексом $n+1$ будем полагать их взаимно однозначное соответствие с соответствующими величинами с индексом 1.

Целью настоящей работы является установление для системы дифференциальных уравнений более общего вида (1.1) необходимых и достаточных условий существования $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решений, а также асимптотических при $t\uparrow\omega$ формул для таких решений в случае, когда Λ_i, $i=\overline{1,n-1}$, — отличные от нуля вещественные постоянные.

В этом случае может быть определена отличная от нуля постоянная

$$\Lambda_n=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y_n(t)y_1'(t)}{y_n'(t)y_1(t)},$$

которая устанавливает связь между первой и n-й компонентами $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решения. Для этой постоянной имеем

$$\Lambda_n=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y_n(t)y_1'(t)}{y_n'(t)y_1(t)}=\lim_{t\uparrow\omega}\left[\frac{y_n(t)y_{n-1}'(t)}{y_n'(t)y_{n-1}(t)}\cdots\frac{y_2(t)y_1'(t)}{y_2'(t)y_1(t)}\right]=\frac{1}{\Lambda_1\ldots\Lambda_{n-1}}. \tag{1.4}$$

Положив

$$\mu_i=\begin{cases}1, & \text{если} \quad Y_i^0=+\infty,\\ & \text{либо} \quad Y_i^0=0 \quad \text{и} \quad \Delta_{Y_i^0}-\text{правая окрестность } 0,\\ -1, & \text{если} \quad Y_i^0=-\infty,\\ & \text{либо} \quad Y_i^0=0 \quad \text{и} \quad \Delta_{Y_i^0}-\text{левая окрестность } 0,\end{cases}$$

заметим, что числа μ_i, $i=\overline{1,n}$, определяют знаки компонент $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решения в некоторой левой окрестности ω.

Вопрос о существовании $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решений системы (1.1) в случае фиксированных значений $\Lambda_i\in\mathbf{R}/\{0\}$, $i=\overline{1,n-1}$, а также об асимптотике таких решений при $t\uparrow\omega$ будем исследовать в случае, когда данная система является в некотором смысле близкой к циклической с правильно меняющимися нелинейностями.

Определение 1.2. *Будем говорить, что система дифференциальных уравнений (1.1) удовлетворяет условию $N(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$, где $\Lambda_i\in\mathbf{R}/\{0\}$, $i=\overline{1,n-1}$, если для каждого $k\in\{1,\ldots,n\}$ существуют число $\alpha_k\in\{-1,1\}$, непрерывная функция $p_k:[a,\omega[\longrightarrow\,\longrightarrow]0,+\infty[$ и непрерывная правильно меняющаяся при $y_{k+1}\to Y_{k+1}^0$ функция $\varphi_{k+1}:\Delta_{Y_{k+1}^0}\longrightarrow]0,+\infty[$ порядка σ_{k+1} такие, что для любых функций $y_i:[a,\omega[\longrightarrow\Delta_{Y_i^0}$, $i=\overline{1,n}$, удовлетворяющих условиям (1.2), (1.3), имеет место представление*

$$f_k(t,y_1(t),\ldots,y_n(t))=\alpha_k p_k(t)\varphi_{k+1}(y_{k+1}(t))[1+o(1)] \quad \textit{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{1.5}$$

В силу определения правильно меняющейся функции (см. [6, с. 9, 10], гл. I. п. 1.1) каждая из функций φ_i, $i\in\{1,\ldots,n\}$, допускает представление вида

$$\varphi_i(z)=|z|^{\sigma_i}L_i(z), \tag{1.6}$$

где $L_i:\Delta_{Y_i^0}\longrightarrow]0,+\infty[$ — непрерывная медленно меняющаяся при $z\to Y_i^0$ функция, т. е. такая, что

$$\lim_{\substack{z\to Y_i^0\\ z\in\Delta_{Y_i^0}}}\frac{L_i(\lambda z)}{L_i(z)}=1 \quad \text{для любого} \quad \lambda>0. \tag{1.7}$$

Известно (см. [6, с. 10–15], гл. I, п. 1.2), что предельное соотношение (1.7) выполняется равномерно по λ на любом отрезке $[c,d] \in]0,+\infty[$ (свойство M_1) и существует непрерывно дифференцируемая медленно меняющаяся при $z \to Y_i^0$ функция $L_{i0} : \Delta_{Y_i^0} \longrightarrow]0,+\infty[$ (свойство M_2), удовлетворяющая условиям

$$\lim_{\substack{z\to Y_i^0\\ z\in\Delta_{Y_i^0}}} \frac{L_i(z)}{L_{i0}(z)} = 1, \quad \lim_{\substack{z\to Y_i^0\\ z\in\Delta_{Y_i^0}}} \frac{zL'_{i0}(z)}{L_{i0}(z)} = 0. \tag{1.8}$$

При этом функция

$$\varphi_{i0}(z) = |z|^{\sigma_i} L_{i0}(z) \tag{1.9}$$

непрерывно дифференцируема на промежутке $\Delta_{Y_i^0}$ и такова, что

$$\lim_{\substack{z\to Y_i^0\\ z\in\Delta_{Y_i^0}}} \frac{\varphi_i(z)}{\varphi_{i0}(z)} = 1, \quad \lim_{\substack{z\to Y_i^0\\ z\in\Delta_{Y_i^0}}} \frac{z\varphi'_{i0}(z)}{\varphi_{i0}(z)} = \sigma_i. \tag{1.10}$$

Предполагая, что система (1.1) при некоторых Λ_i, $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, удовлетворяет условию $N(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$ и при этом порядки σ_k, $k=\overline{1,n}$, функций φ_k таковы, что

$$\prod_{k=1}^{n} \sigma_k \neq 1, \tag{1.11}$$

введем некоторые вспомогательные обозначения.

В силу (1.4) $\prod_{i=1}^{n} \Lambda_i = 1$. Отсюда согласно условию (1.11), хотя бы для одного значения $i \in \{1,\ldots,n\}$ выражение $1-\Lambda_i\sigma_{i+1}$ отлично от нуля. Пусть

$$\Im = \{i \in \{1,\ldots,n\} : 1-\Lambda_i\sigma_{i+1} \neq 0\}, \quad \bar{\Im} = \{1,\ldots,n\}\backslash\Im$$

и l — минимальный элемент множества $\Im$.

Учитывая выбор l, введем вспомогательные функции I_i, $i=\overline{1,n}$, и отличные от нуля постоянные β_i, $i=\overline{1,n}$, полагая

$$I_i(t) = \begin{cases} \int\limits_{A_i}^{t} p_i(\tau)\,d\tau & \text{при } i\in\Im,\\[2ex] \int\limits_{A_i}^{t} I_l(\tau)p_i(\tau)\,d\tau & \text{при } i\in\bar{\Im}, \end{cases} \qquad \beta_i = \begin{cases} 1-\Lambda_i\sigma_{i+1} & \text{при } i\in\Im,\\[2ex] \dfrac{\beta_l}{\Lambda_l\ldots\Lambda_{i-1}} & \text{при } i\in\{l+1,\ldots,n\}\backslash\Im,\\[2ex] \dfrac{\beta_l}{\Lambda_l\ldots\Lambda_n\Lambda_1\ldots\Lambda_{i-1}} & \text{при } i\in\{1,\ldots,l-1\}\backslash\Im, \end{cases}$$

где каждый из пределов интегрирования $A_i \in \{\omega, a\}$ выбран так, чтобы соответствующий ему интеграл I_i стремился либо к нулю, либо к ∞ при $t \uparrow \omega$.

Кроме того, введем числа

$$A_i^* = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad A_i = a, \\ -1, & \text{если} \quad A_i = \omega, \end{cases} \qquad i = \overline{1,n}. \tag{1.12}$$

Тогда

$$\operatorname{sign} I_i(t) = \begin{cases} A_i^* & \text{при} \quad i \in \mathfrak{I}, \\ \\ A_i^* A_l^* & \text{при} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}}, \end{cases} \qquad t \in]a, \omega[.$$

Также, учитывая (1.2), замечаем, что в случае выполнения условия $N(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$ для существования $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$-решений системы (1.1) необходимо выполнение при $i = \overline{1,n}$ неравенств

$$\alpha_i \mu_i > 0 \quad \text{при} \quad Y_i = \pm\infty, \quad \alpha_i \mu_i < 0 \quad \text{при} \quad Y_i = 0. \tag{1.13}$$

2. Основные результаты.

Теорема 2.1. *Пусть* $\Lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = \overline{1, n-1}$, *система дифференциальных уравнений (1.1) удовлетворяет условию* $N(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$ *и при этом порядки правильно меняющихся функций* φ_k, $k = \overline{1,n}$, *в представлениях (1.5) таковы, что выполняются условия (1.11). Пусть, кроме того,* $l = \min \mathfrak{I}$. *Тогда для существования* $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$-*решений системы (1.1) необходимо, а если алгебраическое относительно* ρ *уравнение*

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \Lambda_j + \rho \right) - \prod_{i=1}^{n} \left(\sigma_i \prod_{j=1}^{i-1} \Lambda_j \right) = 0 \tag{2.1}$$

не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{I_i(t) I'_{i+1}(t)}{I'_i(t) I_{i+1}(t)} = \Lambda_i \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} \tag{2.2}$$

и выполнялись знаковые условия

$$A_i^* \beta_i > 0 \quad \textit{при} \quad Y_i = \pm\infty, \quad A_i^* \beta_i < 0 \quad \textit{при} \quad Y_i = 0, \tag{2.3}$$

$$\operatorname{sign} [\alpha_i A_i^* \beta_i] = \mu_i. \tag{2.4}$$

Более того, каждое такое решение допускает при $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} = \alpha_i \beta_i I_i(t) [1 + o(1)] \quad \textit{при} \quad i \in \mathfrak{I}, \tag{2.5}$$

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} = \alpha_i \beta_i \frac{I_i(t)}{I_l(t)} [1 + o(1)] \quad \textit{при} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}}, \tag{2.6_l}$$

а также явные представления вида

$$y_i(t) = \mu_i |I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}+o(1)}, \quad i=\overline{1,n}, \quad \text{\textit{при}} \quad t\uparrow\omega, \tag{2.7}$$

причем существует k-параметрическое семейство таких решений в случае, когда среди корней алгебраического уравнения (2.1) имеется k корней (с учетом кратных), знаки действительных частей которых противоположны знаку числа $A_l^*\beta_l$.

Замечание 2.1. Уравнение (2.1) заведомо не имеет корней с нулевой действительной частью, если $\prod_{i=1}^n |\sigma_i| < 1$.

В самом деле, если бы уравнение (2.1) имело корень $\rho_0 = i\gamma$, где $\gamma \in \mathbf{R}$, то из (2.1) с учетом того, что все Λ_j, $j=\overline{1,n-1}$, — отличные от нуля вещественные постоянные, получили бы неравенство

$$\prod_{i=1}^n |\sigma_i| \prod_{j=1}^{i-1} |\Lambda_j| = \prod_{i=1}^n \left| \prod_{j=1}^{i-1}\Lambda_j + \rho_0 \right| \geq \prod_{j=1}^{i-1} |\Lambda_j|,$$

откуда следует, что $\prod_{i=1}^n |\sigma_i| \geq 1$. Значит, если $\prod_{i=1}^n |\sigma_i| < 1$, то уравнение (2.1) корней с нулевой действительной частью не имеет.

Доказательство теоремы. *Необходимость.* Пусть $y_i : [t_0,\omega[\to \Delta(Y_i^0)$, $i=\overline{1,n}$, — произвольное $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решение системы (1.1). Поскольку система (1.1) удовлетворяет условию $N(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$, в силу определения 1.2 для каждого $k\in\{1,\ldots,n\}$ существуют число $\alpha_k\in\{-1,1\}$, непрерывная функция $p_k : [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ и непрерывная правильно меняющаяся при $y_{k+1}\to Y_{k+1}^0$ функция $\varphi_{k+1} : \Delta_{Y_{k+1}^0} \longrightarrow]0,+\infty[$ порядка σ_{k+1} такие, что при любых $k\in\{1,\ldots,n\}$ выполняются соотношения (1.5). Поэтому в силу (1.1) имеют место представления

$$y_i'(t) = \alpha_i p_i(t)\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))[1+o(1)], \quad i=\overline{1,n}, \quad \text{при} \quad t\uparrow w,$$

откуда следует, что

$$\frac{y_i'(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} = \alpha_i p_i(t)[1+o(1)], \quad i=\overline{1,n}, \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{2.8}$$

Интегрируя каждое из этих соотношений при $i\in\mathfrak{I}$ на промежутке от B_i до t, где $B_i=\omega$, если $A_i=\omega$, и $B_i=t_0$, если $A_i=a$, получаем

$$\int_{B_i}^t \frac{y_i'(\tau)\,d\tau}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(\tau))} = \alpha_i I_i(t)[1+o(1)], \quad i\in\mathfrak{I}, \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{2.9}$$

Сравним интеграл, стоящий слева, с функцией $z_i(t) = \dfrac{y_i(t)}{\varphi_{i+10}(y_{i+1}(t))}$, $i=\overline{1,n}$, где $\varphi_{i+10} : \Delta_{Y_{i+1}} \to]0,+\infty[$ — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям (1.10).

Если $B_i = t_0$, то в силу (2.9) $\lim_{t\uparrow\omega} \displaystyle\int_{B_i}^{t} \frac{y_i'(\tau)\,d\tau}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(\tau))} = \infty$. Тогда по правилу Лопиталя в форме Штольца и условий (1.3), (1.10) находим

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\frac{y_i(t)}{\varphi_{i+10}(y_{i+1}(t))}}{\int_{B_i}^{t} \frac{y_i'(\tau)\,d\tau}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(\tau))}} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\frac{y_i'(t)}{\varphi_{i+10}(y_{i+1}(t))} - \frac{y_i(t)\varphi_{i+10}'(y_{i+1}(t))y_{i+1}'(t)}{\varphi_{i+10}^2(y_{i+1}(t))}}{\frac{y_i'(t)}{\varphi_{i+10}(y_{i+1}(t))}} =$$

$$= 1 - \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y_{i+1}(t)\varphi_{i+10}'(y_{i+1}(t))}{\varphi_{i+10}(y_{i+1}(t))} \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y_i(t)y_{i+1}'(t)}{y_i'(t)y_{i+1}(t)} =$$

$$= 1 - \Lambda_i\sigma_{i+1} = \beta_i \neq 0 \quad \text{при} \quad i \in \Im. \tag{2.10}$$

Если $B_i = \omega$, то в силу (2.9) $\lim_{t\uparrow\omega} \displaystyle\int_{B_i}^{t} \frac{y_i'(\tau)\,d\tau}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(\tau))} = 0$. Покажем, что в этом случае для функции z_i существует конечный или равный $\pm\infty$ предел при $t \uparrow \omega$. Поскольку

$$z_i'(t) = \frac{y_i'(t)}{\varphi_{i+10}(y_{i+1}(t))} \left(1 - \frac{y_i(t)\varphi_{i+10}'(y_{i+1}(t))y_{i+1}'(t)}{\varphi_{i+10}(y_{i+1}(t))y_i'(t)}\right),$$

в силу первого из соотношений (1.10) и (2.8) производная функции z_i сохраняет знак в некоторой левой окрестности ω и, следовательно, для нее существует конечный или равный $\pm\infty$ предел при $t \uparrow \omega$. Покажем теперь, что этот $\lim_{t\uparrow\omega} z_i(t) = 0$. Допустим противное, т. е.

$$\lim_{t\uparrow\omega} z_i(t) = \begin{cases} \text{либо отличной от нуля постоянной,} \\ \text{либо} \pm\infty. \end{cases} \tag{2.11}$$

В силу (2.8) получаем соотношение

$$\frac{y_i'(t)}{y_i(t)} = \frac{\alpha_i p_i(t)}{z_i(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда, интегрируя его на промежутке от t_0 до t, имеем

$$\ln\frac{|y_i(t)|}{|y_i(t_0)|} = \alpha_i \int\limits_{t_0}^{t} \frac{p_i(t)dt}{z_i(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Здесь $\displaystyle\int_{t_0}^{\omega} p_i(t)\,dt$ сходится, так как $B_i = A_i = \omega$ и в силу предположения $\lim_{t\uparrow\omega} \dfrac{1}{z_i(t)} = = \mathrm{const}$. Поэтому правая часть данного соотношения имеет конечный предел при $t \uparrow \omega$, а левая — бесконечный предел при $t \uparrow \omega$ в силу второго условия из (1.2). Тем самым получено противоречие. Значит, $\lim_{t\uparrow\omega} z_i(t) = 0$. Тогда, применяя правило Лопиталя, также получаем (2.10).

Таким образом, в обоих случаях имеет место соотношение

$$\int\limits_{B_i}^{t} \frac{y_i'(\tau)\,d\tau}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(\tau))} = \frac{y_i(t)}{\beta_i \varphi_{i+10}(y_{i+1}(t))}[1+o(1)], \quad i \in \mathfrak{I}, \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Тогда в силу (2.9) и первого из соотношений (1.10) получим асимптотические представления (2.5). Далее из (2.5) и (2.8) следует, что при $i \in \mathfrak{I}$

$$\frac{y_i'(t)}{y_i(t)} = \frac{I_i'(t)}{\beta_i I_i(t)}\,[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.12}$$

Теперь каждое из соотношений (2.8), в котором $i \in \bar{\mathfrak{I}}$, умножим на $I_l(t)$ и проинтегрируем на промежутке от B_i до t, где B_i выбираются таким же образом, как и выше. В результате получим

$$\int\limits_{B_i}^{t} \frac{y_i'(\tau) I_l(\tau)\,d\tau}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(\tau))} = \alpha_i I_i(t)[1+o(1)], \quad i \in \bar{\mathfrak{I}}, \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.13}$$

Повторяя вышеизложенные рассуждения, с использованием правила Лопиталя в форме Штольца и учетом условий (1.3), (1.10) и (2.12) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\frac{y_i(t) I_l(t)}{\varphi_{i+10}(y_{i+1}(t))}}{\int_{B_i}^{t} \frac{y_i'(\tau) I_l(t)\,d\tau}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(\tau))}} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\frac{y_i'(t) I_l(t)}{\varphi_{i+10}(y_{i+1}(t))} + \frac{y_i(t) I_l'(t)}{\varphi_{i+10}(y_{i+1}(t))} - \frac{y_i(t) I_l(t) \varphi_{i+10}'(y_{i+1}(t)) y_{i+1}'(t)}{\varphi_{i+10}^2(y_{i+1}(t))}}{\frac{y_i'(t) I_l(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))}} =$$

$$= 1 + \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y_i(t) I_l'(t)}{y_i'(t) I_l(t)} - \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y_{i+1}(t) \varphi_{i+10}'(y_{i+1}(t))}{\varphi_{i+10}(y_{i+1}(t))} \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y_i(t) y_{i+1}'(t)}{y_i'(t) y_{i+1}(t)} =$$

$$= 1 + \beta_l \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y_i(t) y_l'(t)}{y_i'(t) y_l(t)} - \sigma_{i+1}\Lambda_i = 1 - \Lambda_i \sigma_{i+1} +$$

$$+ \beta_l \lim_{t\uparrow\omega} \left[\frac{y_l'(t) y_{l+1}(t)}{y_l(t) y_{l+1}'(t)} \frac{y_{l+1}'(t) y_{l+2}(t)}{y_{l+1}(t) y_{l+2}'(t)} \cdots \frac{y_{i-1}'(t) y_i(t)}{y_{i-1}(t) y_i'(t)} \right] =$$

$$= \frac{\beta_l}{\Lambda_l \Lambda_{l+1} \ldots \Lambda_{i-1}} = \beta_i \neq 0 \quad \text{при} \quad i \in \{l+1, \ldots, n\} \backslash \mathfrak{I}$$

и

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\frac{y_i(t)I_l(t)}{\varphi_{i+10}(y_{i+1}(t))}}{\int_{B_i}^{t}\frac{y_i'(\tau)I_l(t)\,d\tau}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(\tau))}}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\frac{y_i'(t)I_l(t)}{\varphi_{i+10}(y_{i+1}(t))}+\frac{y_i(t)I_l'(t)}{\varphi_{i+10}(y_{i+1}(t))}-\frac{y_i(t)I_l(t)\varphi_{i+10}'(y_{i+1}(t))y_{i+1}'(t)}{\varphi_{i+10}^2(y_{i+1}(t))}}{\frac{y_i'(t)I_l(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))}}=$$

$$=1+\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y_i(t)I_l'(t)}{y_i'(t)I_l(t)}-\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y_{i+1}(t)\varphi_{i+10}'(y_{i+1}(t))}{\varphi_{i+10}(y_{i+1}(t))}\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y_i(t)y_{i+1}'(t)}{y_i'(t)y_{i+1}(t)}=$$

$$=1+\beta_l\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y_i(t)y_l'(t)}{y_i'(t)y_l(t)}-\sigma_{i+1}\Lambda_i=1-\Lambda_i\sigma_{i+1}+$$

$$+\beta_l\lim_{t\uparrow\omega}\left[\frac{y_l'(t)y_{l+1}(t)}{y_l(t)y_{l+1}'(t)}\frac{y_{l+1}'(t)y_{l+2}(t)}{y_{l+1}(t)y_{l+2}'(t)}\cdots\frac{y_n'(t)y_1(t)}{y_n(t)y_1'(t)}\frac{y_1'(t)y_2(t)}{y_1(t)y_2'(t)}\cdots\frac{y_{i-1}'(t)y_i(t)}{y_{i-1}(t)y_i'(t)}\right]=$$

$$=\frac{\beta_l}{\Lambda_l\Lambda_{l+1}\ldots\Lambda_n\Lambda_1\ldots\Lambda_{i-1}}=\beta_i\neq 0\quad\text{при}\quad i\in\{1,\ldots,l-1\}\backslash\Im.$$

Отсюда с учетом (2.13) и первого из соотношений (1.10) следует справедливость асимптотических соотношений (2.6_l), а тогда в силу (2.8) асимптотические соотношения (2.12) имеют место и при $i\in\bar{\Im}$.

Поскольку соотношения (2.12) имеют место при $i=\overline{1,n}$ и рассматриваемое решение удовлетворяет последнему предельному представлению из определения $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решения, для каждого $i\in\{1,\ldots,n\}$ выполняются условия (2.2).

Кроме того, из (2.12) следует представление $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решения в явном виде

$$y_i(t)=\mu_i|I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}+o(1)},\quad i=\overline{1,n},\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega,$$

откуда с учетом условия $\lim_{t\uparrow\omega}y_i(t)=Y_i^0$ из определения $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решения и определения числа A_i^* вытекают знаковые условия (2.3).

Справедливость знаковых условий (2.4) непосредственно следует из (2.5), (2.6_l), если учесть знаки функций y_i и I_i, $i=\overline{1,n}$, на промежутке $[t_0,\omega[$.

Достаточность. Предположим, что наряду с условиями (2.2) – (2.4) алгебраическое уравнение (2.1) не имеет корней с нулевой действительной частью. Покажем, что в этом случае система дифференциальных уравнений (1.1) имеет хотя бы одно $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решение, допускающее при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (2.5), (2.6_l), (2.7), и выясним вопрос о количестве таких решений.

Для начала рассмотрим систему соотношений вида

$$\frac{y_i}{\varphi_{i+10}(y_{i+1})}=Q_i(t)[1+v_i],\quad i=\overline{1,n},\tag{2.14}$$

в которой

$$Q_i(t)=\begin{cases}\alpha_i\beta_iI_i(t) & \text{при}\quad i\in\Im,\\[2ex] \alpha_i\beta_i\,\dfrac{I_i(t)}{I_l(t)} & \text{при}\quad i\in\bar{\Im}\end{cases}$$

и φ_{i+10} — непрерывно дифференцируемая правильно меняющаяся на промежутке $\Delta_{Y^0_{i+1}}$ функция, удовлетворяющая условиям (1.10) и существующая в силу свойства M_2 правильно меняющихся функций. Точно таким же образом, как в работе [4], устанавливаем, что она однозначно определяет заданные на множестве $D_0 = [t_0, \omega[\times V_0$, где $t_0 \in [a, \omega[$ и $V_0 = \{\bar{v} \equiv (v_1, \ldots, v_n) : |v_i| \le 1/2, i = \overline{1,n}\}$, непрерывно дифференцируемые неявные функции $y_i = Y_i(t, \bar{v})$, $i = \overline{1,n}$, вида

$$Y_i(t, \bar{v}) = \mu_i |I_l(t)|^{\frac{\lambda_i}{\beta_l} + z_i(t,\bar{v})}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.15}$$

где

$$\lambda_l = 1, \quad \lambda_i = \prod_{j=1}^{i-1} \Lambda_j, \quad i \in \{1, n\} \backslash \{l\},$$

а функции z_i, $i = \overline{1,n}$, таковы, что

$$|z_i(t, \bar{v})| \le \frac{|L_i|}{2|\beta_l|}, \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{при} \quad (t, \bar{v}) \in D_0$$

и

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_i(t, \bar{v}) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad \bar{v} \in V_0.$$

Из (2.15) с учетом знаковых условий (2.3), (2.4) следует, что вектор-функция $(Y_i)_{i=1}^n$ имеет свойства

$$Y_i(t) \in \Delta_{Y^0_i} \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} Y_i(t, \bar{v}) = Y_i^0 \quad \text{равномерно по} \quad \bar{v} \in V_0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.16}$$

Покажем теперь, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{(Y_i(t, \bar{v}))'_t \, I_i(t)}{Y_i(t, \bar{v}) I'_i(t)} = \frac{1}{\beta_i}, \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{равномерно по} \quad \bar{v} \in V_0. \tag{2.17}$$

Из (2.14) находим

$$\frac{(Y_i(t, \bar{v}))'_t}{Y_i(t, \bar{v})} = \frac{Q'_i(t)}{Q_i(t)} + \frac{(Y_{i+1}(t, \bar{v}))'_t \, \varphi'_{i+10}(Y_{i+1}(t, \bar{v}))}{\varphi_{i+10}(Y_{i+1}(t, \bar{v}))}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.18}$$

Умножая (2.18) на $\dfrac{I_i(t)}{I'_i(t)}$, $i = \overline{1,n}$, получаем

$$\frac{(Y_i(t, \bar{v}))'_t \, I_i(t)}{Y_i(t, \bar{v}) I'_i(t)} = \frac{Q'_i(t) I_i(t)}{Q_i(t) I'_i(t)} +$$

$$+ \frac{I_i(t) I'_{i+1}(t)}{I'_i(t) I_{i+1}(t)} \, \frac{Y_{i+1}(t, \bar{v}) \varphi'_{i+10}(Y_{i+1}(t, \bar{v}))}{\varphi_{i+10}(Y_{i+1}(t, \bar{v}))} \, \frac{(Y_{i+1}(t, \bar{v}))'_t \, I_{i+1}(t)}{Y_{i+1}(t, \bar{v}) I_{i+1}(t)}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Разрешая эту систему алгебраических уравнений относительно $\dfrac{(Y_k(t,\bar{v}))'_t\, I_k(t)}{Y_k(t,\bar{v})I'_k(t)}$, $k = \overline{1,n}$, имеем

$$\frac{(Y_k(t,\bar{v}))'_t\, I_k(t)}{Y_k(t,\bar{v})I'_k(t)} = \sum_{i=k}^{n} \frac{Q'_i(t)I_i(t)}{Q_i(t)I'_i(t)} \prod_{j=k}^{i-1} \frac{I_j(t)I'_{j+1}(t)}{I'_j(t)I_{j+1}(t)} \frac{Y_{j+1}(t,\bar{v})\varphi'_{j+10}\left(Y_{j+1}(t,\bar{v})\right)}{\varphi_{j+10}\left(Y_{j+1}(t,\bar{v})\right)} \times$$

$$\times \left[1 + \prod_{j=k}^{n} \frac{I_j(t)I'_{j+1}(t)}{I'_j(t)I_{j+1}(t)} \frac{Y_{j+1}(t,\bar{v})\varphi'_{j+10}\left(Y_{j+1}(t,\bar{v})\right)}{\varphi_{j+10}\left(Y_{j+1}(t,\bar{v})\right)} \times \right.$$

$$\times \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{Q'_i(t)I_i(t)}{Q_i(t)I'_i(t)} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{I_j(t)I'_{j+1}(t)}{I'_j(t)I_{j+1}(t)} \frac{Y_{j+1}(t,\bar{v})\varphi'_{j+10}\left(Y_{j+1}(t,\bar{v})\right)}{\varphi_{j+10}\left(Y_{j+1}(t,\bar{v})\right)} \right) \times$$

$$\left. \times \left(1 - \prod_{j=1}^{n} \frac{I_j(t)I'_{j+1}(t)}{I'_j(t)I_{j+1}(t)} \frac{Y_{j+1}(t,\bar{v})\varphi'_{j+10}\left(Y_{j+1}(t,\bar{v})\right)}{\varphi_{j+10}\left(Y_{j+1}(t,\bar{v})\right)} \right)^{-1} \right], \quad k = \overline{1,n}. \tag{2.19}$$

Здесь, согласно виду функций Q_i, $i = \overline{1,n}$,

$$\frac{Q'_i(t)}{Q_i(t)} = \begin{cases} \dfrac{I'_i(t)}{I_i(t)} & \text{при} \quad i \in \Im, \\[2ex] \dfrac{I'_i(t)}{I_i(t)} - \dfrac{I'_l(t)}{I_l(t)} & \text{при} \quad i \in \bar{\Im} \end{cases}$$

и поэтому

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{Q'_i(t)I_i(t)}{Q_i(t)I'_i(t)} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i \in \Im, \\[1ex] 0 & \text{при} \quad i \in \bar{\Im}. \end{cases} \tag{2.20}$$

Кроме того, в силу (2.16) и (1.10)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{Y_i(t,\bar{v})\varphi'_{i0}\left(Y_i(t,\bar{v})\right)}{\varphi_{i0}\left(Y_i(t,\bar{v})\right)} = \sigma_i, \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{равномерно по} \quad \bar{v} \in V_0. \tag{2.21}$$

Тогда из (2.19) с учетом (2.2), (2.20), (2.21) и того факта, что $\Lambda_i\sigma_{i+1} = 1$ при $i \in \bar{\Im}$, получаем предельные соотношения (2.17).

Из (2.16), (2.17) видно, что вектор-функция $(Y_i(t,\bar{v}))_{i=1}^{n}$ удовлетворяет условиям (1.2), (1.3). Теперь, применяя к системе дифференциальных уравнений (1.1) преобразование

$$y_i(t) = Y_i(t, v_1(t), \ldots, v_n(t)), \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.22}$$

и учитывая, что вектор-функция $(Y_i(t,\bar v(t)))_{i=1}^n$ при $t\in[t_0,\omega[$ и $\bar v\in V_0$ является решением системы уравнений

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_{i+10}(y_{i+1}(t))}=Q_i(t)[1+v_i(t)],\quad i=\overline{1,n}, \tag{2.23}$$

имеем

$$\frac{f_i(t,Y_1(t,\bar v(t)),\ldots,Y_n(t,\bar v(t)))}{\varphi_{i+10}(Y_{i+1}(t,\bar v(t)))}-\\ -\frac{Y_i(t,\bar v(t))\varphi'_{i+10}(Y_{i+1}(t,\bar v(t)))f_{i+1}(t,Y_1(t,\bar v(t)),\ldots,Y_n(t,\bar v(t)))}{\varphi^2_{i+10}(Y_{i+1}(t,\bar v(t)))}=\\ =Q'_i(t)[1+v_i(t)]+Q_i(t)v'_i(t),\quad i=\overline{1,n}. \tag{2.24}$$

Поскольку функции $f_i,\, i=\overline{1,n}$, удовлетворяют условию $N(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$, а вектор-функция $(Y_i(t,\bar v(t)))_{i=1}^n$ имеет свойства (1.2), (1.3), при $t\uparrow\omega$ имеют место представления

$$f_i(t,Y_1(t,\bar v(t)),\ldots,Y_n(t,\bar v(t)))=\alpha_ip_i(t)\varphi_{i+10}(Y_{i+1}(t,\bar v(t)))[1+\zeta_i(t,\bar v(t))],\quad i=\overline{1,n},$$

где $\lim_{t\uparrow\omega}\zeta_i(t,\bar v(t))=0$ равномерно по $\bar v\in V_0$. Тогда из (2.24) получаем

$$\alpha_ip_i(t)[1+\zeta_i(t,\bar v(t))]-\alpha_{i+1}p_{i+1}(t)\frac{Q_i(t)[1+v_i(t)]}{Q_{i+1}(t)[1+v_{i+1}(t)]}\left[\sigma_{i+1}+\delta_{i+1}(t,\bar v(t))\right]=\\ =Q'_i(t)[1+v_i(t)]+Q_i(t)v'_i(t),\quad i=\overline{1,n},$$

где $\lim_{t\uparrow\omega}\delta_{i+1}(t,\bar v(t))=0$ равномерно по $\bar v\in V_0$, откуда следует, что

$$v'_i(t)=\frac{1}{Q_i(t)}\Big[\alpha_ip_i(t)[1+\zeta_i(t,\bar v(t))]-\\ -\alpha_{i+1}p_{i+1}(t)\frac{Q_i(t)[1+v_i(t)]}{Q_{i+1}(t)[1+v_{i+1}(t)]}\left[\sigma_{i+1}+\delta_{i+1}(t,\bar v(t))\right]-Q'_i(t)[1+v_i(t)]\Big],\quad i=\overline{1,n}.$$

После выделения линейных частей в данной системе получим систему дифференциальных уравнений вида

$$v'_i=\frac{I'_l(t)}{\beta_lI_l(t)}\left[q_i(t)+b_{ii}(t)v_i+b_{ii+1}(t)v_{i+1}+V_{i1}(t,\bar v)+V_{i2}(t,\bar v)\right],\quad i=\overline{1,n}, \tag{2.25}$$

где

$$q_i(t)=h_i(t)(1+\zeta_i(t,\bar v))-\sigma_{i+1}h_{i+1}(t)-g_i(t),$$

$$h_i(t)=\frac{\beta_l}{\beta_i}\frac{I'_i(t)I_l(t)}{I_i(t)I'_l(t)},\quad i=\overline{1,n},$$

$$g_i(t) = \begin{cases} \beta_l \dfrac{I_i'(t) I_l(t)}{I_i(t) I_l'(t)} & \text{при} \quad i \in \Im, \\ \\ \beta_l \left(\dfrac{I_i'(t) I_l(t)}{I_i(t) I_l'(t)} - 1 \right) & \text{при} \quad i \bar{\in} \Im, \end{cases}$$

$$b_{ii}(t) = -\sigma_{i+1} h_{i+1}(t) - g_i(t), \quad b_{ii+1}(t) = \sigma_{i+1} h_{i+1}(t),$$

$$V_{i1}(t, \bar{v}) = -\sigma_{i+1} h_{i+1}(t) \frac{1+v_i}{1+v_{i+1}} \, \delta_{i+1}(t, \bar{v}),$$

$$V_{i2}(t, \bar{v}) = -\sigma_{i+1} h_{i+1}(t) \tau_i(\bar{v}),$$

$$\tau_i(\bar{v}(t)) = \frac{1+v_i(t)}{1+v_{i+1}(t)} - 1 - v_i(t) + v_{i+1}(t), \quad i = \overline{1,n},$$

и таковы, что

$$\lim_{|v_1|+\ldots+|v_n| \to 0} \frac{\partial \tau_i(\bar{v}(t))}{\partial v_k(t)} = 0, \quad i,k = \overline{1,n}.$$

В этой системе в силу условий (2.2)

$$\lim_{t \uparrow \omega} h_i(t) = \lambda_i, \quad \lim_{t \uparrow \omega} g_i(t) = (1 - \Lambda_i \sigma_{i+1}) \, \lambda_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Поэтому с учетом условий (2.22), (2.23) имеем

$$\lim_{t \uparrow \omega} q_i(t) = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} V_{i1}(t, \bar{v}) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, \ldots, v_n) \in V_0,$$

$$\lim_{|v_1|+\ldots+|v_n| \to 0} \frac{V_{i2}(t, \bar{v})}{|v_1| + \ldots + |v_n|} = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{равномерно по} \quad t \in [t_0, \omega[.$$

Кроме того, матрица B_0, предельная для матрицы $B(t)$, составленной из коэффициентов при v_k, $k = \overline{1,n}$, стоящих в правых частях в квадратных скобках уравнений системы, имеет вид

$$B_0 = \lim_{t \uparrow \omega} B(t) = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \sigma_2 \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \sigma_3 \lambda_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{n-1} & \sigma_n \lambda_n \\ \sigma_1 \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_n \end{pmatrix}.$$

Характеристическим уравнением $\det[B_0 - \nu E_n] = 0$, где E_n — единичная матрица n-го порядка, является уравнение вида (2.1). Поэтому матрица B_0 не имеет собственных значений с нулевой действительной частью.

Тем самым показано, что для системы дифференциальных уравнений (2.25) выполнены все условия теоремы 2.2 из работы [7]. Согласно этой теореме система дифференциальных уравнений (2.25) имеет хотя бы одно решение $\{v_i\}_{i=1}^n : [t_1, \omega[\to \mathbb{R}^n$, $t_1 \geq t$, стремящееся к нулю при $t \uparrow \omega$, причем таких решений существует k-параметрическое семейство, если среди корней характеристического уравнения (2.1) имеется k корней (с учетом кратных), действительные части которых имеют знак, противоположный знаку числа $A_l^* \beta_l$. Каждому такому решению системы (2.25) в силу замены (2.22), системы соотношений (2.23), которой удовлетворяют функции $Y_i(t, v_1(t), \ldots, v_n(t))$, $i = \overline{1,n}$, и условия $N(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$, которому удовлетворяет система (1.1), соответствует решение $(y_1, \ldots, y_n)$ системы дифференциальных уравнений (1.1), допускающее асимптотические представления

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} = Q_i(t)[1 + o(1)], \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Остается лишь убедиться в том, что любое из указанных выше решений системы дифференциальных уравнений (1.1) является $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$-решением.

Поскольку каждому из них соответствует решение $(v_1(t), \ldots, v_n(t))$ системы (2.25), стремящееся к нулю при $t \uparrow \omega$, в силу установленных ранее свойств функций $Y_i(t, \bar{v})$, $i = \overline{1,n}$, условия (1.2) заведомо выполняются. Кроме того, для данных решений системы (1.1) с учетом (2.23) и (2.2) имеем

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{y'_{i+1}(t) y_i(t)}{y_{i+1}(t) y'_i(t)} = \frac{\beta_i}{\beta_{i+1}} \lim_{t \uparrow \omega} \frac{I'_{i+1}(t) I_i(t)}{I_{i+1}(t) I'_i(t)} = \Lambda_i.$$

Значит, выполняется и условие (1.3) определения $\mathcal{P}_\omega(Y_1^0, \ldots, Y_n^0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$-решения.

Теорема доказана.

Теперь укажем условия, при которых асимптотические представления (2.5), (2.6_l) могут быть уточнены.

Определение 2.1 (см. [8]). *Будем говорить, что правильно меняющаяся функция порядка σ вида*

$$\varphi(z) = |z|^\sigma L(z)$$

удовлетворяет условию S, если для любой непрерывно дифференцируемой функции $l\colon \Delta_{Y^0} \longrightarrow]0, +\infty[$ такой, что

$$\lim_{\substack{z \to Y^0 \\ z \in \Delta_{Y^0}}} \frac{z\, l'(z)}{l(z)} = 0,$$

имеет место асимптотическое соотношение

$$\varphi(z l(z)) = L(z)[1 + o(1)] \quad \textit{при} \quad z \to Y^0 \quad (z \in \Delta_{Y^0}). \tag{2.26}$$

Условию S заведомо удовлетворяют функции φ_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, для которых функция L_i имеет конечный предел при $z \to Y_i^0$, а также функции вида

$$\varphi_i(z) = |z|^\sigma |\ln z|^{\gamma_1}, \quad \varphi_i(z) = |z|^\sigma |\ln z|^{\gamma_1} |\ln|\ln z||^{\gamma_2},$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \neq 0$, и многие другие.

Замечание 2.2 (см. [9]). Если функция φ_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, удовлетворяет условию S, а функция $y_i : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y^0}$ непрерывно дифференцируема и такая, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} y_i(t) = Y_i^0, \quad \frac{y_i'(t)}{y_i(t)} = \frac{\xi'(t)}{\xi(t)} [r + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где r — отличная от нуля вещественная постоянная, ξ — непрерывно дифференцируемая в некоторой левой окрестности ω вещественная функция, для которой $\xi'(t) \neq 0$, то

$$L_i(y_i(t)) = L_i\left(|\xi(t)|^r\right)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

так как в данном случае

$$y_i(t) = z(t)l(z(t)), \quad \text{где} \quad z(t) = \mu_0 |\xi(t)|^r,$$

и

$$\lim_{\substack{z \to Y_0 \\ z \in \Delta_{Y^0}}} \frac{z\, l'(z)}{l(z)} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{z(t)\, l'(z(t))}{l(z(t))} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{z(t)\left(\frac{y_i(t)}{z(t)}\right)'}{\left(\frac{y_i(t)}{z(t)}\right) z'(t)} = \lim_{t \uparrow \omega} \left[\frac{\xi(t) y_i'(t)}{r \xi'(t) y_i(t)} - 1\right] = 0.$$

Теорема 2.2. *Пусть* $\Lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = \overline{1, n-1}$, $l = \min \mathfrak{I}$ *и все функции* φ_i, $i = \overline{1, n}$, *удовлетворяют условию* S. *Тогда каждое* $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$*-решение (в случае их существования) системы дифференциальных уравнений (1.1) допускает при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$y_i(t) = \mu_i \prod_{k=1}^{n} \left| Q_k(t) L_{k+1}\left(\mu_{k+1} \left|I_{k+1}(t)\right|^{\frac{1}{\beta_{k+1}}}\right)\right|^{\rho_{ik}} [1 + o(1)], \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.27}$$

где

$$Q_k(t) = \begin{cases} \alpha_k \beta_k I_k(t) & \textit{при} \quad k \in \mathfrak{I}, \\[2ex] \alpha_k \beta_k \dfrac{I_k(t)}{I_l(t)} & \textit{при} \quad k \in \overline{\mathfrak{I}}, \end{cases} \qquad \rho_{ik} = \begin{cases} \dfrac{\prod_{j=i+1}^{n} \sigma_j \prod_{j=1}^{k} \sigma_j}{1 - \prod_{j=1}^{n} \sigma_j} & \textit{при} \quad k = \overline{1, i-1}, \\[4ex] \dfrac{\prod_{j=i+1}^{k} \sigma_j}{1 - \prod_{j=1}^{n} \sigma_j} & \textit{при} \quad k = \overline{i, n}. \end{cases}$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 2.1 было показано, что для существования $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$-решений системы дифференциальных уравнений (1.1) необходимо, чтобы выполнялись условия (2.2) – (2.4) и каждое такое решение допускало при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.5), (2.6$_l$). Кроме того, для таких решений было получено асимптотическое соотношение (2.12). В силу этого соотношения и замечания 2.2

$$L_i(y_i(t)) = L_i\left(\mu_i \left|I_i(t)\right|^{\frac{1}{\beta_i}}\right)[1 + o(1)], \quad i = \overline{1, n}, \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поэтому асимптотические представления (2.5), (2.6_l) можно записать в виде

$$\frac{y_i(t)}{|y_{i+1}(t)|^{\sigma_{i+1}}} = Q_i(t)L_{i+1}\left(\mu_{i+1}\,|I_{i+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{i+1}}}\right)[1+o(1)], \quad i=\overline{1,n}, \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Разрешая эту систему алгебраических уравнений относительно $y_1,\ldots,y_n$, получаем асимптотические представления (2.27).

Теорема доказана.

3. Выводы. В настоящей работе для системы дифференциальных уравнений (1.1) введен класс так называемых $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решений и исследован вопрос о наличии и асимптотике таких решений в случае, когда $\Lambda_i,\ i=\overline{1,n-1}$, — отличные от нуля вещественные постоянные. При этом предполагалось (условие $N(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$), что на решениях данного класса система (1.1) является асимптотически близкой к циклической с правильно меняющимися нелинейностями. С использованием этого условия получены необходимые и достаточные условия существования $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решений системы (1.1), а также неявные асимптотические при $t\uparrow\omega$ ($\omega\le+\infty$) формулы для компонент таких решений. Явные асимптотические формулы для компонент данных решений установлены при предположении, что все нелинейности удовлетворяют условию $\mathbf{S}$.

Поскольку в качестве ω может быть выбрано любое конечное число из промежутка изменения переменной t, где определены правые части системы, результаты работы позволяют описывать асимптотику не только правильных, но и различного типа непродолжаемых вправо сингулярных решений (см. [10, с. 238, 262]) системы (1.1).

1. *Владова О. С.* Асимптотичні зображення розв'язків циклічних систем диференціальних рівнянь з правильно мінливими нелінійностями // Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика і механіка. — 2010. — **15**, вип. 19. — С. 33–56.
2. *Владова Е. С.* Асимптотическое поведение решений нелинейных циклических систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Нелінійні коливання. — 2011. — **14**, № 3. — С. 299–317.
3. *Евтухов В. М., Владова Е. С.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных двумерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 12. — С. 1597–1611.
4. *Євтухов В. М., Владова О. С.* Асимптотичні зображення розв'язків істотно нелінійних циклічних систем звичайних диференціальних рівнянь // Диференц. рівняння. — 2012. — **48**, № 5. — С. 622–639.
5. *Evtukhov V. M., Vladova O. S.* On the asymptotics of solutions of nonlinear cyclic systems of ordinary differential equations in special cases // Mem. Different. Equat. Math. Phys. — 2011. — **54**. — P. 1–25.
6. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 144 с.
7. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 1. — С. 52–80.
8. *Евтухов В. М., Белозерова М. А.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 3. — С. 310–331.
9. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. — 2011. — **47**, № 5. — С. 628–650.
10. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. —М.: Наука, 1990. — 430 с.

Получено 03.01.14