

О критических скоростях вихреобразования во вращающемся гелии

Т. И. Зуева

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины,
Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 8 апреля 1997 г., после переработки 23 июня 1997 г.

Исследовано вихревое течение сверхтекучей жидкости между концентрическими цилиндрами, вращающимися с одинаковой угловой скоростью. Получено общее выражение для свободной энергии жидкости с вихрями произвольной интенсивности. Исследована возможность появления вихрей, завихренность которых противоположна по знаку угловой скорости (отрицательные вихри). Показано, что появление отрицательных вихрей в жидкости соответствует большим значениям свободной энергии, чем появление положительных вихрей. Вычислена сила трения, которая действует на вихрь со стороны нормальной компоненты, если вихрь выведен из положения равновесия. Найдена величина энергетического барьера, преодолеваемого вихрем при его переходе от одной стенки к другой. Показано, что, ввиду наличия энергетического барьера, вероятность появления вихрей велика только при угловых скоростях, намного превышающих расчетную угловую скорость. Получены параметрические уравнения огибающей семейства прямых, представляющих собой свободную энергию как функцию угловой скорости вращения сосуда при различном числе вихрей. Записано приближенное соотношение между угловой скоростью вращения сосуда и числом в появившихся при этой угловой скорости.

Досліджено вихрову течію надплинної рідини між концентричними циліндрами, що обертаються з однаковою кутовою швидкістю. Отримано загальний вираз для вільної енергії рідини з вихорами довільної інтенсивності. Досліджено можливість виникнення вихорів, завихореність яких протилежна за знаком кутової швидкості (негативних вихорів). Показано, що виникнення негативних вихорів у рідині відповідає більшим значенням вільної енергії, ніж виникнення позитивних вихорів. Обчислено силу тертя, що діє на вихор з боку нормальної компоненти, якщо вихор виведено з стану рівноваги. Обчислено величину енергетичного бар'єра, який проходить вихор при переході від однієї стінки до іншої. Показано, що наявність енергетичного бар'єра приводить до того, що ймовірність з'явлення вихорів велика тільки при кутових швидкостях, набагато більших, ніж розрахункові. Отримано параметричні рівняння кривої, що огинає сім'ю прямих, які зображують вільну енергію як функцію кутової швидкості обертання посудини при різній кількості вихорів. Виписано наближене співвідношення між кутовою швидкістю обертання посудини та кількістю вихорів, що з'явилися при цій кутовій швидкості.

PACS: 67.40.Vs

В большинстве работ по исследованию вихревых состояний во вращающемся сверхтекучем гелии предполагается (по умолчанию или вскользь), что возникающие при некоторой скорости вращения вихри имеют завихренность того же знака, что и угловая скорость вращения сосуда. Это означает, что циркуляция вокруг вихря, определенная надлежащим образом (см., например, [1]),

$$\oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\kappa \quad (1)$$

положительна, если сосуд вращается против часовой стрелки [2]. Если рассматривается движение в двусвязной области (в кольце), то, кроме вихрей в самой жидкости, возникает циркуляция вокруг внутреннего цилиндра (квантованная), которая при небольших скоростях вращения компенсирует разницу линейных скоростей на внешней и внутренней стенке [3]. Знак этой циркуляции тоже оказывается равным знаку угловой скорости, т.е. для вращения сосуда против часовой стрелки

$$\oint_{r=R_1} \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\gamma L > 0.$$

Здесь $r = R_1$ — внутренний радиус рассматриваемого кольца; R_2 — внешний; ($R_1 \leq r \leq R_2$); L — число квантов циркуляции, измеряемой в величинах $2\pi\gamma$.

Между тем, возникновение циркуляции вокруг внутреннего цилиндра, согласно теореме Кельвина о сохранении циркуляции (см. [4]), не может происходить само по себе: если циркуляция вокруг внутреннего цилиндра в начальный момент времени была равна нулю, то в рамках модели идеальной жидкости, в которых мы находимся, она может измениться только из-за возникновения вблизи одной из стенок вихря с последующей аннигиляцией его на другой стенке. При этом, если вихрь образуется вблизи *внутренней* стенки, при отрыве его от стенки должна возникать циркуляция вокруг внутреннего цилиндра, противоположная по знаку вихрю (таким образом, суммарная циркуляция по любому жидкому контуру сохраняется). Если же вихрь отрывается от *внешней* стенки, то при погашении его своим изображением на внутренней стенке возникает циркуляция *того же знака*, что и вихрь, «опустившийся» на внутренний цилиндр. Это означает, что циркуляция может совпадать с направлением вращения сосуда как при отрыве от внутренней стенки вихря отрицательной интенсивности (согласно определению знака вихря (1)), так и при отрыве от внешней стенки положительного вихря.

Таким образом, возникает предположение о возможности существования вихрей интенсивности с противоположным угловой скорости знаком. Исходя из этого предположения, построим уточненную теорию вихревого движения сверхтекучей жидкости в кольцах произвольных размеров.

Свободная энергия и условия равновесия

При решении плоской задачи для функции тока идеальной жидкости в кольце [5] были получены выражения для функции тока $\psi(r, \theta)$ и комплексно сопряженной скорости $\overline{v(z)}$ идеальной жидкости, содержащей N вихрей произвольной интенсивности γ_k , расположенных в произвольных точках $z_k = r_k \exp(i\theta_k)$. При этом все вихри предполагались бесконечно длинными прямыми нитями, вытянутыми вдоль оси вращения кольца. Напомним эти выражения, исключив из них слагаемые, обусловленные наличием циркуляции вокруг внутреннего цилиндра (поскольку мы не накладываем

заранее никаких ограничений на знак вихря и не предполагаем наличие циркуляции):

$$\psi(r, \theta) = \sum_{k=1}^N \gamma_k \ln \frac{r}{R_1} + \sum_{k=1}^N \gamma_k \left[\operatorname{Re} \ln \sigma \left(i \ln \frac{z}{z_k} \right) - \operatorname{Re} \ln \sigma \left(i \ln \frac{z z_k}{Z_k^2} \right) - \frac{2\eta}{\omega_1} \ln \frac{r_k}{R_1} \ln \frac{r}{R_1} \right]; \quad (2)$$

$$\overline{v(z)} = -\frac{i}{z} \sum_{k=1}^N \gamma_k + \frac{1}{z} \sum_{k=1}^N \gamma_k \times \left[\zeta \left(i \ln \frac{z}{z_k} \right) - \zeta \left(i \ln \frac{z z_k}{Z_k^2} \right) + \frac{2i\eta}{\omega_1} \ln \frac{r_k}{R_1} \right]. \quad (3)$$

Здесь $z = r \exp(i\theta)$ — комплексная переменная в кольце; (r, θ) — полярные координаты точки; σ и ζ — сигма- и дзета-функции Вейерштрасса [6] с полу-периодами $\omega_1 = \pi$, $\omega_2 = i \ln(R_2/R_1)$; $\eta = \zeta(\omega_1)$; $Z_k = R_1 \exp(i\theta_k)$.

При получении выражения для свободной энергии предположение о наличии N вихрей произвольной интенсивности было заменено предположением о том, что все вихри имеют *одинаковую* интенсивность γ , совпадающую по знаку со знаком угловой скорости вращения сосуда. Однако не составляет особого труда получить *общее* выражение для свободной энергии сверхтекучей жидкости в кольце, содержащем N вихревых линий произвольной (как по величине, так и по знаку) интенсивности γ_k (не предполагая наличия циркуляции).

Как было получено ранее [7],

$$F_N \equiv F_{N,0} = \frac{1}{2} \rho_s 2\pi\psi_2 \sum_{k=1}^N \gamma_k - \frac{1}{2} \rho_s 2\pi\psi_1 \sum_{k=1}^N \gamma_k - \frac{1}{2} \rho_s 2\pi \sum_{j=1}^N \psi_j \gamma_j - \rho_s \int_V \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_n dV + \frac{1}{2} \rho_s \pi \sum_{k=1}^N \gamma_k^2.$$

Значения функций тока ψ_1 и ψ_2 на внутренней ($r = R_1$) и внешней ($r = R_2$) границах кольца были найдены при получении выражения для функции тока:

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = \sum_{j=1}^N \gamma_j \ln \frac{R_2}{r_j}.$$

Значения функций тока ψ_j на поверхностях вихрей (которые предполагаются цилиндрами с радиусом a) вычислим из общего выражения для

функции тока (2), положив $z = z_j = r_j \exp(i\theta_j)$ во всех слагаемых, кроме одного, где $\sigma(i \ln(z_j/z_k))$ при $k = j$ имеет особенность. Пусть в этом слагае-

мом $z = z_j + a \exp(i\varphi)$, где φ — угол, отсчитываемый от центра вихря. Тогда получаем (с точностью до слагаемых порядка a/r_j)

$$\psi_j = \left(\sum_{k=1}^N \gamma_k \right) \ln \frac{r_j}{R_1} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \gamma_k \left[\operatorname{Re} \ln \sigma \left(i \ln \frac{z_j}{z_k} \right) - \operatorname{Re} \ln \sigma \left(i \ln \frac{z_j z_k}{Z_k^2} \right) - \frac{2\eta}{\omega_1} \ln \frac{r_k}{R_1} \ln \frac{r_j}{R_1} \right] + \gamma_j \ln \frac{a}{r_j} - \gamma_j \operatorname{Re} \ln \sigma \left(2i \ln \frac{r_j}{R_1} \right) - \frac{2\eta\gamma_j}{\omega_1} \ln^2 \frac{r_j}{R_1}.$$

Свободная энергия принимает вид

$$F_N = \pi \rho_s \sum_{j=1}^N \gamma_j \left\{ \frac{\gamma_j}{2} - \gamma_j \ln \frac{a}{r_j} + \sum_{k=1}^N \gamma_k \ln \frac{R_1 R_2}{r_k r_j} + \gamma_j \operatorname{Re} \ln \sigma \left(2i \ln \frac{r_j}{R_1} \right) + \sum_{k=1}^N \frac{2\eta\gamma_k}{\omega_1} \ln \frac{r_j}{R_1} \ln \frac{r_k}{R_1} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \gamma_k \left[\operatorname{Re} \ln \sigma \left(i \ln \frac{z_j}{z_k} \right) - \operatorname{Re} \ln \sigma \left(i \ln \frac{z_j z_k}{Z_k^2} \right) \right] - \omega(R_2^2 - r_j^2) \right\}. \quad (4)$$

Это и есть общее выражение для свободной энергии сверхтекучей жидкости во вращающихся с угловой скоростью ω кольцах, содержащих N вихрей произвольной интенсивности γ_k .

Условие равновесия вихревой системы представляется в виде $2N$ уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial r_i} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Эти уравнения тоже не составляет труда записать, однако в дальнейшем нам потребуются только уравнения, соответствующие вихрям положительной и отрицательной единичной интенсивности γ , поэтому запишем именно эти уравнения.

Заметим, что выражение для свободной энергии (4) во всех слагаемых, кроме одного, содержит *произведение* интенсивностей $\gamma_k \gamma_j$ (или γ_j^2). И только в слагаемом $\omega(R_2^2 - r_j^2)$ множитель γ_j стоит в первой степени (или вынесен за скобки, так что остается член вида $(\omega/\gamma)(R_2^2 - r_j^2)$, как это было найдено для системы одноквантовых положительных вихрей [7]). Таким образом, изменение знака интенсивности одного или нескольких вихрей повлияет только на знак некоторых перекрестных членов (при $k \neq j$) и слагаемого пропорционального ω , если $N > 1$, или только последнего слагаемого, если $N = 1$ или все вихри имеют одинаковый знак.

Нас интересует именно этот последний случай. Попробуем определить, какого знака вихри по-

являются при небольших угловых скоростях вращения сосуда и почему.

Предположим, имеется кольцо, заполненное сверхтекучим гелием, которое вращается с такой маленькой угловой скоростью ω , что в жидкости нет никаких вихрей, так что

$$v_s \equiv 0.$$

При некотором значении угловой скорости $\omega = \omega_c$ в жидкости возникает вихрь. Покажем, что этот вихрь, появляющийся вблизи одной из стенок, называется *неустойчивым*, какой бы знак он ни имел, и гасится своим изображением относительно другой стенки, в результате чего возникает циркуляция вокруг внутреннего цилиндра.

Появление вихря произвольного знака

Запишем выражение для свободной энергии сверхтекучей жидкости в кольце, содержащем один вихрь интенсивности $-\gamma$ в точке $z_1 = r_1$:

$$F_{-1} = \pi \rho_s \gamma^2 \left\{ \frac{1}{2} - \ln \frac{a}{r_1} + \operatorname{Re} \ln \sigma \left(2i \ln \frac{r_1}{R_1} \right) + \frac{2\eta}{\omega_1} \ln^2 \frac{r_1}{R_1} + \frac{\omega}{\gamma} (R_2^2 - r_1^2) \right\}. \quad (5)$$

Это выражение отличается от соответствующего выражения для вихря положительной интенсивности $+\gamma$ только знаком последнего члена. Одна-

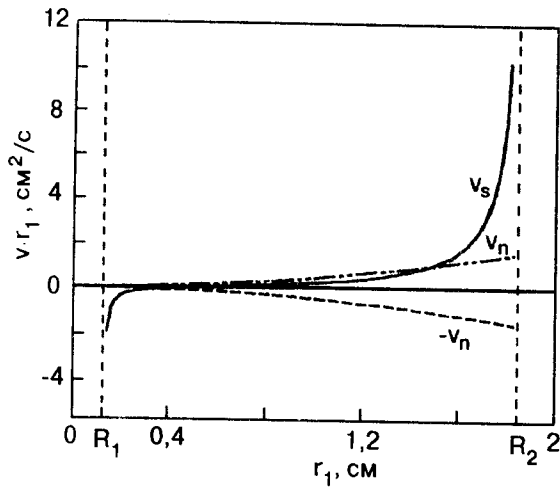


Рис. 1. Скорости сверхтекучей (v_s) и нормальной (v_n) компонент как функции положения вихря r_1 . Приведенные цифры соответствуют $R_1 = 0,1$ см, $R_2 = 1,5$ см.

ко оказывается, что именно этот член играет решающую роль при исследовании поведения вихревой системы. Для того чтобы это показать, вернемся к подробному анализу системы с одним *положительным* вихрем, проведенному нами в работе [7] как первый шаг исследования многовихревой системы, однако не вошедшему в нее (ввиду того, что ставилась более общая задача о возникновении целого кольца вихрей).

Условие равновесия вихря произвольной интенсивности принимает вид

$$\frac{1}{2r_1} + \frac{1}{r_1} \operatorname{Im} \zeta \left(2i \ln \frac{r_1}{R_1} \right) - \frac{2\eta}{\omega_1 r_1} \ln \frac{r_1}{R_1} = \pm \frac{\omega}{\gamma} r_1. \quad (6)$$

Верхний знак отвечает положительному вихрю, нижний — отрицательному. Рассмотрим подробно графики функций, записанных в левой и правой частях уравнения (6) (для упрощения умножив предварительно уравнение на $r_1 \neq 0$) (рис.1).

Легко видеть, что при $\gamma > 0$ корень уравнения (6) при любом фиксированном значении угловой скорости всего один, он близок к значению R_2 и неустойчив (как было установлено ранее); при $\gamma < 0$ не может существовать более одного корня уравнения (6). Этот корень всегда близок к R_1 , т.е. равновесное положение вихря находится ближе к *внутренней* стенке кольца. Исследуем, ус-

тойчиво ли это положение равновесия. Вычислим вторую вариацию свободной энергии (5):

$$\frac{d^2 F}{dr_1^2} = 2\pi\rho_s\gamma^2 \left\{ \frac{1}{2r_1^2} + \frac{1}{r_1^2} \operatorname{Im} \zeta \left(2i \ln \frac{r_1}{R_1} \right) - \frac{2}{r_1^2} \operatorname{Re} \zeta' \left(2i \ln \frac{r_1}{R_1} \right) + \frac{2\eta}{\omega_1 r_1^2} \left(1 - \ln \frac{r_1}{R_1} \right) - \frac{\omega}{\gamma} \right\}. \quad (7)$$

Условие положительности второй вариации имеет вид

$$\frac{1}{2} + \operatorname{Im} \zeta \left(2i \ln \frac{r_1}{R_1} \right) - 2 \operatorname{Re} \zeta' \left(2i \ln \frac{r_1}{R_1} \right) + \frac{2\eta}{\omega_1} \left(1 - \ln \frac{r_1}{R_1} \right) - \frac{\omega}{\gamma} r_1^2 \geq 0. \quad (8)$$

Найдем $(\omega/\gamma) r_1^2$ из условия равновесия (6) и подставим в (8):

$$-\operatorname{Re} \zeta' \left(2i \ln \frac{r_1}{R_1} \right) + \frac{\eta}{\omega_1} - \frac{\omega}{\gamma} r_1^2 \geq 0. \quad (9)$$

Вычислим два первых слагаемых, учитывая выражения для ζ -функций [6] и подставляя значения полупериодов $\omega_1 = \pi$ и $\omega_2 = i \ln(R_2/R_1)$, а также знаменателя $q = R_1/R_2$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \zeta' \left(2i \ln \frac{r_1}{R_1} \right) - \frac{\eta}{\omega_1} &= \\ &= \frac{1}{4 \operatorname{sh}^2(\ln r_1/R_1)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} n \operatorname{ch} 2n \ln \frac{r_1}{R_1} = \\ &= \left(\frac{R_1 r_1}{r_1^2 - R_1^2} \right)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} n \operatorname{ch} 2n \ln \frac{r_1}{R_1} > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (9) не выполняется *никогда*: вихрь отрицательной интенсивности является *неустойчивым* (как неустойчиво вообще любое число отрицательных вихрей, поскольку для произвольного N все выкладки сохраняются, только в качестве q нужно брать $q = (R_1/R_2)^N$). И мы приходим к проблеме выбора: при малых угловых скоростях вращения сосуда неустойчивыми являются как положительные, так и отрица-

* Заметим, что при решении уравнения (6) с правой частью, полученной из условия $F_1 < F_0$, корней вообще нет, поскольку правая часть вблизи границы $r = R_2$ растет быстрее, чем левая. Однако понятно, что при всяком фиксированном значении ω корень всегда имеется и он близок к R_2 . На рис. 1 изображен график $(\omega/\gamma) r_1^2$ при значении ω , полученном из условия $F_{1,0} < F_{0,0}$ в предыдущем рассмотрении [7].

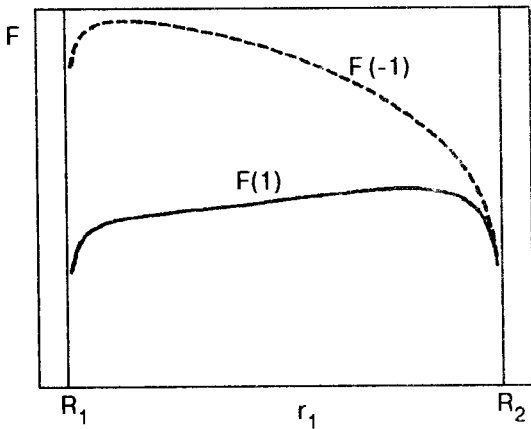


Рис. 2. Качественное поведение свободной энергии F как функции положения вихря r_1 , для положительного ($F(1)$) и отрицательного ($F(-1)$) вихря.

тельные вихри, каким из них отдается предпочтение и почему? При предыдущем рассмотрении мы утверждали, что если устойчивых решений уравнения dF/dr_1 нет, то энергетически выгодным считается появление циркуляции вокруг внутреннего цилиндра. Правомерно ли такое утверждение?

Рассмотрим выражение для свободной энергии (5). Поскольку при любом знаке вихрей вторая вариация свободной энергии отрицательна, корень является максимумом. На правом конце (при $r_1 = R_2$) значения функции тока F_1 , соответствующей положительному вихрю, и функции тока F_{-1} , соответствующей отрицательному вихрю, совпадают (рис. 2). На левом конце (при $r_1 = R_1$) разность значений свободных энергий F_1 и F_{-1} равна

$$F_{-1} - F_1 = \pi \rho_s \gamma^2 \left[\frac{2\omega}{\gamma} (R_2^2 - R_1^2) \right]. \quad (10)$$

Абсолютные значения этих величин можно получить, если вычислить пределы F_1 и F_{-1} при $r_1 \rightarrow R_{1,2}$, полагая $r_1 = R_2 - \epsilon$ или $r_1 = R_1 + \epsilon$ и раскладывая сигма-функции по малому параметру ϵ . Эти пределы оказываются равными

$$F_1 \Big|_{r_1 = R_1 + \epsilon} \approx \pi \rho_s \gamma^2 \left\{ \frac{1}{2} + \ln \frac{2\epsilon}{a} \right\},$$

$$F_1 \Big|_{r_1 = R_2 - \epsilon} \approx \pi \rho_s \gamma^2 \left\{ \frac{1}{2} + \ln \frac{2\epsilon}{a} + \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{\omega}{\gamma} (R_2^2 - R_1^2) \right\}. \quad (11)$$

На правом конце значение $F_{-1} = F_1$, на левом отличается знаком последнего члена. Заметим,

что $F = 0$ при $r_1 = R_2$, если положить $\epsilon = a/2$ и пренебречь слагаемым $1/2$. Однако следует помнить, что точность полученных формул (в пренебрежении отклонениями формы ядра вихря от цилиндрической) сильно ухудшается вблизи стенок, так что эти значения свободной энергии лишь с натяжкой можно назвать пределами. Хотя из выражения (11) при тех же предположениях относительно ϵ получаем

$$F_1 = \pi \rho_s \gamma^2 \left\{ \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{\omega}{\gamma} (R_2^2 - R_1^2) \right\}.$$

А это и есть свободная энергия жидкости при наличии одного кванта циркуляции (см. [7] или ниже (12)). Таким образом, при опускании вихря на внутренний цилиндр свободная энергия (с некоторой точностью) превращается в свободную энергию сверхтекучей жидкости без вихрей, но при наличии циркуляции.

Схематические графики свободной энергии изображены на рис. 2.

Реальные значения максимума энергии имеют порядок величины $\gamma^2 \sim 10^{-8}$ (более детально мы оценим этот максимум ниже). Если в силу каких-либо причин (гидродинамической неустойчивости, тепловых флуктуаций, механических вибраций и т.п. [2]) вихрь оторвался от стенки и оказался в положении неустойчивого равновесия, то при отклонении его от этого положения возникает сила, выводящая его из равновесного положения.

Покажем, что величина этой силы пропорциональна второй вариации свободной энергии (8). Воспользуемся выражением для силы трения, которая действует на вихри со стороны нормальной компоненты и приводит их в положение равновесия, если это положение устойчиво, или выводит их из равновесия в противном случае. Уравнение движения i -й вихревой нити, выведенной из равновесия, имеет вид [2]

$$\gamma \left[(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{s,e})_i \times \frac{d\delta \mathbf{r}_i}{dt} \right] = \zeta_3 \rho_s (\mathbf{v}_{s,e} - \mathbf{v}_n)_i^2 \hat{e}_z.$$

Здесь $\delta \mathbf{r}_i$ — отклонение i -й вихревой нити от положения равновесия; ζ_3 — коэффициент объемной вязкости; $\mathbf{v}_{s,e}$ — скорость, создаваемая в сердцевине вихря всеми остальными вихрями и изображениями (т.е. скоростью самого вихря); \hat{e}_z — орг. перпендикулярной плоскости кольца (оси вращения). Вычисляя эти выражения в цилиндрических координатах, получаем для одной вихревой нити одно скалярное уравнение (радиальная составляющая):

$$\frac{d(\delta r_1)}{dt} = -\frac{\zeta_3 \rho_s}{\gamma} \left[\omega r_1 - \frac{1}{2r_1} - \frac{\gamma}{r_1} \ln \zeta \left(2i \ln \frac{r_1}{R_1} \right) + \frac{2\gamma \eta}{\pi r_1} \ln \frac{r_1}{R_1} \right]$$

В положении равновесия $r_1 = \tilde{r}_1$ правая часть равна нулю. При $r_1 = \tilde{r}_1 + \delta r_1$ можно получить уравнение для δr_1 , проведя разложение всех членов по малому параметру $\delta r_1 / \tilde{r}_1$:

$$\frac{d(\delta r_1)}{dt} = -\zeta_3 \rho_s \left[\frac{\omega}{\gamma} + \frac{1}{2\tilde{r}_1^2} + \frac{1}{\tilde{r}_1} \left(\ln \zeta \left(2i \ln \frac{\tilde{r}_1}{R_1} \right) - 2 \operatorname{Re} \zeta' \left(2i \ln \frac{\tilde{r}_1}{R_1} \right) \right) + \frac{2\eta}{\pi \tilde{r}_1} \left(1 - \ln \frac{\tilde{r}_1}{R_1} \right) \right] \delta r_1$$

Легко видеть, что выражение в квадратных скобках — вторая вариация свободной энергии (7) (с точностью до размерного множителя). Как было показано выше, эта величина всегда отрицательна как для положительных, так и для отрицательных вихрей. Таким образом, выведенные из равновесия вихри всегда удаляются от положения равновесия.

При этом положительный вихрь, оторвавшийся от внешней стенки и прошедший энергетический барьер, приближается к внутренней стенке и сливается со своим изображением, а отрицательный вихрь, отрываясь от внутренней стенки, скатывается к внешней границе. Однако, согласно соотношению (10), свободная энергия F_1 при $r_1 = R_1$ меньше, чем свободная энергия F_{-1} при $r_1 = R_2$. Это означает, что отрыв от внешней стенки положительного вихря энергетически более выгоден, чем появление отрицательного вихря у внутренней стенки. Результат такого отрыва — возникновение циркуляции вокруг внутреннего цилиндра, имеющей тот же знак, что и угловая скорость вращения сосуда. Таким образом, все предыдущие исследования (см. [7]) остаются в силе и в качестве свободной энергии можно использовать выражение, полученное ранее:

$$F = \pi \gamma^2 \rho_{s,0} \left\{ \frac{N}{2} + L^2 \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{\omega}{\gamma} L (R_2^2 - R_1^2) + 2LN \ln \frac{R_2}{r_1} - N \ln \frac{a}{r_1} + N \operatorname{Re} \ln \sigma \left(2i \ln \frac{r_1}{R_2} \right) + \frac{2\eta N}{\omega_1} \ln^2 \left(\frac{r_1}{R_2} \right) - \frac{\omega}{\gamma} N (R_2^2 - r_1^2) \right\} \quad (12)$$

Однако при изменении направления вращения сосуда картина течения оказывается полностью

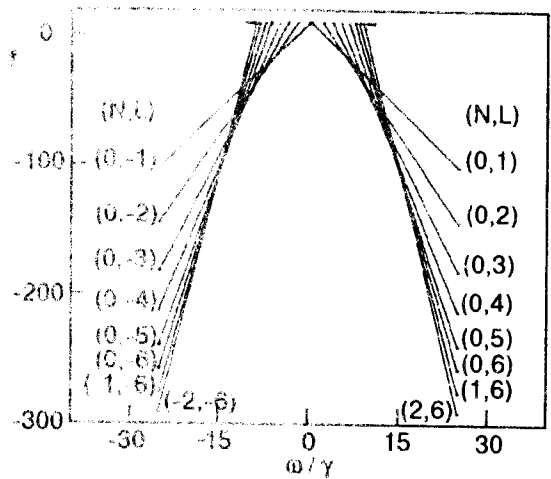


Рис. 3. Безразмерная свободная энергия $f = F/\pi\gamma^2\rho_s$ как функция ω/γ при различных значениях L и N для кольца размерами $R_1 = 0,1$ см, $R_2 = 1,5$ см.

обращенной: возникают вихри отрицательной интенсивности и циркуляция скорости вокруг внутреннего цилиндра оказывается тоже отрицательной. Это ясно из выражения для свободной энергии, поскольку последнее слагаемое в нем (которое играет в этом рассмотрении ведущую роль) зависит от отношения ω/γ . Полный «веер энергий», соответствующий как положительным, так и отрицательным скоростям вращения, имеет вид, изображенный на рис. 3, из которого ясно, что при вращении сосуда, наволненного сверхтекучим гелием, всегда возникают вихри, имеющие то же направление (знак), что и скорость вращения сосуда.

Энергетический барьер как функция угловой скорости

Выше было показано, что отрыв положительного вихря от внешней стенки уменьшает свободную энергию. Однако для того, чтобы вихрь оказался вблизи внутренней стенки, ему необходимо преодолеть энергетический барьер, высота которого равна значению свободной энергии в точке максимума. Для вычисления этого значения необходимо знать равновесное положение вихря r_1 (т.е. решение уравнения (6)) и величину угловой скорости, при которой этот вихрь появляется. Сложность заключается в том, что корень уравнения (6) r_1 не выражается аналитически через параметры кольца R_1 и R_2 , а представляет собой решение сложного уравнения, содержащего бесконечные ряды. Не проще и выражение для свободной энергии (см. (5)). Конечно, при численных расчетах эта трудность преодолима, но точные ана-

литические выражения получить в общем случае не удается.

Однако в ряде предельных случаев можно получить приближенные выражения для r_1 и свободной энергии, которые более наглядны и из которых можно извлечь полезную информацию.

В частности, для колец с малым внутренним радиусом (будем называть их «широкими») можно найти приближенное выражение для самого сложного члена в свободной энергии

$$S = \ln \frac{2\omega_1}{\pi\theta'_1(0)} + \ln \left| \theta_1 \left(i \ln \frac{r_1}{R_2} \right) \right| = \ln \frac{2q^{1/4}}{\theta'_1(0)} + \ln \left[\frac{r_1^2 - R_2^2}{R_2 r_1} - q^2 \frac{r_1^6 - R_2^6}{R_2^3 r_1^3} + q^6 \frac{r_1^{10} - R_2^{10}}{R_2^5 r_1^5} - \dots \right] \approx \ln \frac{2q^{1/4}}{\theta'_1(0)} + \ln 2\varepsilon + \ln (1 - 3q^2 + 5q^6 + \dots).$$

Учитывая разложение по q для $\theta'_1(0)$ [6], представляем S в виде

$$S = \ln 2\varepsilon + O(\varepsilon),$$

тогда

$$F_1 \approx \pi \gamma^2 \rho_s \left\{ \ln \frac{2R_2 \varepsilon \sqrt{e}}{a} - \frac{\omega}{\gamma} R_2^2 2\varepsilon \right\}. \quad (13)$$

В случае узких колец ($2d = R_2 - R_1 \ll R_2$) знаменатель q не мал. Однако можно воспользоваться соотношением однородности для σ -функций [6] («переворачивание полупериодов», которое уже проводилось при исследовании узких колец в работе [7]):

$$\sigma(iz | i\omega_1, i\omega_2) = i\sigma(z | \omega_1, \omega_2).$$

При такой замене знаменатель

$$q = \exp \left(\frac{i\pi\omega_2}{\omega_1} \right) = \exp \left(- \frac{\pi^2}{\ln(R_2/R_1)} \right)$$

мал даже для довольно «широких» колец (например, он имеет порядок 10^{-3} для отношения радиусов $R_2/R_1 \sim 5$); ряд, через который выражается σ -функция, будет сходиться настолько быстро, что можно ограничиться только первым его членом. Вычисляя этот ряд, получаем приближенное выражение для свободной энергии

$$F_1 \approx \pi \gamma^2 \rho_s \left\{ \ln \frac{2r_1 \sqrt{e}}{a} + \frac{\ln^2(r_1/R_2)}{\ln(R_2/R_1)} + \ln \left[\sin \frac{\pi \ln(r_1/R_2)}{\ln(R_2/R_1)} - \frac{\omega}{\gamma} (R_2^2 - r_1^2) \right] \right\},$$

$$S = \operatorname{Re} \ln \sigma \left(2i \ln \frac{r_1}{R_2} \right) + \frac{2\eta}{\omega_1} \ln^2 \frac{r_1}{R_2}.$$

Расчеты показывают, что для таких колец первый вихрь появляется вблизи внешней стенки (это верно для колец, у которых $R_1/R_2 < 0,05$). Тогда величина $\lambda = R_2 - r_1$ мала и можно ввести малый параметр $\varepsilon = \lambda/R_2$. Проводя разложение по этому параметру всех выражений, входящих в S и в свободную энергию, получаем

верное для всех колец, для которых мало q^2 . Отсюда можно элементарно вычислить ω/γ , при котором F_1 обращается в нуль.

Из машинных расчетов следует, что в любом случае корень больше, чем $R = (R_1 + R_2)/2$. Это означает, что, как и для широких колец, $r_1 = R_2 - \lambda$. Величина λ для узких колец близка к d . Поэтому отношение $\varepsilon = \lambda/R_2$ тоже мало и все величины можно разложить по малому параметру ε . Получаем

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi \ln(r_1/R_2)}{\ln(R_2/R_1)} &\approx \sin \frac{\pi \ln(1-\varepsilon)}{\ln(1-2\varepsilon)} \approx \\ &\approx \sin \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \approx 1 - \frac{\pi^2 \varepsilon^{12}}{16}. \end{aligned}$$

Тогда свободная энергия принимает вид

$$F_1 \approx \pi \gamma^2 \rho_s \left\{ \ln \frac{2R_2 \sqrt{e}}{a} - \frac{3}{2} \varepsilon - \frac{\omega}{\gamma} R_2^2 2\varepsilon \right\}.$$

Слагаемым порядка ε , вообще говоря, можно пренебречь, и энергетический барьер выразится совсем простым соотношением

$$F_1 \approx \pi \gamma^2 \rho_s \left\{ \ln \frac{2R_2 \sqrt{e}}{a} - \frac{\omega}{\gamma} R_2^2 2\varepsilon \right\}. \quad (14)$$

Таким образом, как для узких, так и для широких колец основной вклад в свободную энергию дает логарифм относительно большой величины $(2R_2 \sqrt{e})/a$ (в случае широких колец в числителе добавляется малый множитель ε). За счет малого a в знаменателе этот логарифм имеет порядок 20, тогда энергетический барьер в размерных величинах

нах равен примерно $2 \cdot 10^{-7}$ эрг (причем оказывается, что он почти не зависит от внутреннего радиуса при фиксированном внешнем радиусе).

Из выражений (13) и (14) легко находится угловая скорость, при которой энергетический барьер обращается в нуль:

$$\frac{\omega}{\gamma} = \frac{1}{2\varepsilon} \ln \frac{2R_2\sqrt{e}}{a}$$

(для широких колец следует добавить ε в числитель логарифма).

Хотя при строгом рассмотрении нужно учитывать, что корень уравнения (6) зависит от ω (с ростом ω он приближается к внешней стенке), и при качественном рассмотрении можно видеть, что величина угловой скорости, при которой исчезает энергетический барьер, намного превышает ту расчетную скорость ω_0 при которой оказывается выгодным появление первого (неустойчивого) вихря. Это означает, что вероятность появления вихря при $\omega = \omega_0$ мала.

Оценить эту вероятность можно, вычислив величину

$$P = \exp\left(-\frac{F_1}{k_B T}\right) \frac{2\pi r_1}{a}$$

Здесь F_1 — высота преодолеваемого энергетического барьера; T — температура [10]. Множитель при экспоненте определяется частотой ударов о потенциальный барьер, в качестве которой можно взять отношение длины окружности, на которой находится вихрь, к радиусу вихря.

Поскольку $F_1 \sim 10^{-7}$ эрг, при $T \approx 1\text{K}$ величина $P = \exp(-10^{-9})$, что на много порядков меньше второго множителя в выражении для P (радиус вихря имеет порядок 10^{-8} см). Таким образом, вероятность появления вихря при $\omega = \omega_0$ практически равна нулю. Реально циркуляция вокруг внутреннего цилиндра возникает при скоростях, намного превышающих ω_0 .

При увеличении угловой скорости высота барьера F_1 уменьшается. Но поскольку вклад от второго слагаемого, пропорционального ω , невелик по сравнению с первым слагаемым, F_1 становится равным нулю при угловых скоростях гораздо больших ω_0 . Превышение реальных угловых скоростей ω_c , при которых появляется первый вихрь, над расчетными ω_0 должно быть значительным — примерно в 100 раз (см. таблицу). И хотя абсолютная величина угловой скорости все равно остается очень малой, вероятно, эту разницу можно обнаружить экспериментально.

Таблица

Угловые скорости, при которых появляется первый вихрь

R_1 , см	ω_0 , с^{-1}	ω_c , с^{-1}
1,10	$4,7 \cdot 10^{-5}$	$4,7 \cdot 10^{-3}$
1,20	$4,4 \cdot 10^{-5}$	$6,3 \cdot 10^{-3}$
1,30	$4,1 \cdot 10^{-5}$	$9,5 \cdot 10^{-3}$
1,35	$3,9 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$
1,40	$3,8 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$
1,45	$3,6 \cdot 10^{-5}$	$3,8 \cdot 10^{-2}$

Примечание: внешний радиус $R_2 = 1,5$ см.

Соотношение между угловой скоростью и количеством вихрей

Семейство прямых, изображенное на рис. 3, зависит, вообще говоря, от трех параметров: r_1 , L и N . Однако в случае, когда число вихрей достаточно велико, равновесное положение вихревой цепочки находится практически посередине зазора для колец любых размеров, т.е.

$$r_1 = (R_2 + R_1)/2,$$

а угловая скорость вращения сосуда связана с числом вихрей и числом квантов циркуляции простым соотношением [8]

$$\frac{\omega}{\gamma} r_1^2 = L + \frac{N}{2}. \quad (15)$$

При получении этого выражения были отброшены члены

$$N \left[\left(\frac{R_1}{r_1} \right)^{2N} - \left(\frac{r_1}{R_2} \right)^{2N} \right].$$

Можно оценить число вихрей N , при котором эти члены на много порядков меньше оставленных членов $(L + N/2)$. При фиксированном значении радиуса внешнего цилиндра $R_2 = 1,5$ см отброшенные члены имеют порядок 10^{-3} для следующих пар значений внутреннего радиуса и числа вихрей:

R_1 , см	0,1	0,3	0,5	1,0	1,2
N	≥ 8	≥ 10	≥ 12	≥ 28	≥ 50

При больших R_1 очень большим становится число квантов циркуляции вокруг внутреннего цилиндра L , так что реальные значения N , при

которых верна формула (15), намного меньше записанных.

Используя выражение для r_1 и соотношение (15), можно сделать семейство линий $F_{N,L}$ *однопараметрическим* (хотя эти линии уже не будут

прямыми) и попытаться найти огибающую этого семейства. Для этого прежде всего найдем приближенное выражение для слагаемого, содержащего σ -функции:

$$S_N \equiv \operatorname{Re} \ln \sigma \left(2i \ln \frac{r_1}{R_1} \right) + \frac{2\eta}{\omega_1} \ln^2 \left(\frac{r_1}{R_1} \right) = \ln \frac{2}{N} + \operatorname{Re} \ln \frac{\theta_1(iN \ln(r_1/R_1))}{\theta_1'(0)} = \ln \frac{2}{N\theta_1'(0)} + \ln \left[2q^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} \operatorname{sh} N(2n+1) \ln \frac{r_1}{R_1} \right] \approx \ln \frac{2}{N} + \ln \operatorname{sh} N \ln \frac{r_1}{R_1} \approx \ln \frac{1}{N} + N \ln \frac{r_1}{R_1}.$$

Тогда

$$F \approx \pi \gamma^2 \rho_s \left\{ \left(-L(R_2^2 - R_1^2) - N(R_2^2 - r_1^2) \right) \frac{\omega}{\gamma} + \left[L^2 \ln \frac{R_2}{R_1} + 2LN \ln \frac{R_2}{r_1} - N \ln \frac{aN}{r_1} + N^2 \ln \frac{R_1 R_2}{r_1^2} + N^2 \ln \frac{r_1}{R_1} \right] \right\}. \quad (16)$$

Подставляя $L = (\omega/\gamma)r_1^2 - N/2$ и группируя члены по степеням ω/γ , получаем

$$F_{N,L} = - \left(\frac{\omega}{\gamma} \right)^2 r_1^2 \left[R_2^2 - R_1^2 - r_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right] - \frac{\omega}{\gamma} N \left[\frac{R_1^2}{2} + \frac{R_2^2}{2} - r_1^2 + r_1^2 \ln \frac{r_1^2}{R_1 R_2} \right] + \frac{N^2}{4} \ln \frac{R_2}{R_1} - N \ln \frac{aN}{r_1}. \quad (17)$$

Напомним, что свободную энергию (17) следует рассматривать как функцию ω/γ , т.е. в качестве аргумента x брать ω/γ , а в качестве y брать $F_{N,L}$. Для получения уравнения огибающей продифференцируем по параметру N [9]:

$$\frac{\omega}{\gamma} \left[\frac{R_1^2}{2} + \frac{R_2^2}{2} - r_1^2 + r_1^2 \ln \frac{r_1^2}{R_1 R_2} \right] = \frac{N}{2} \ln \frac{R_2}{R_1} - \ln \frac{aN}{r_1} - 1. \quad (18)$$

Вместе с уравнением (17) это выражение представляет собой уравнение огибающей однопараметрического семейства кривых $F_{N,L}$. Хотя получить это уравнение в явном виде не удастся (нельзя в аналитическом виде исключить N), заметим, что соотношение (18) можно рассматривать как довольно простую связь между числом вихрей и угловой скоростью вращения сосуда: задавая число вихрей N , можно определить угловую скорость, которой соответствует это число вихрей, и наоборот. Точность этого выражения определяется порядком отброшенных членов в выражениях (15) и (16).

Автор благодарит И. Е. Тарапова за интересные вопросы на семинаре кафедры механики, которые послужили стимулом для написания данной работы, а также С. И. Шевченко за обсуждение работы и полезные замечания.

1. Р. Милн-Томсон, *Теоретическая гидродинамика*, Мир, Москва (1964).
2. С. Паттерман, *Гидродинамика сверхтекучей жидкости*, Мир, Москва, (1978).
3. R. J. Donnelly and M. M. La Mar, *J. Fluid Mech.*, **186**, 162 (1988).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986), гл.16.
5. А. Д. Тюпцов, Т. И. Зуева, *Мат. физика, анализ и геометрия* **1**, 529 (1994).
6. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*. М. Абрамовиц и И. Стиган (ред.), Наука, Москва (1979).
7. А. Д. Тюпцов, Т. И. Зуева, *ФНТ* **20**, 1116 (1994).
8. Т. И. Зуева, *ФНТ* **22**, 1100 (1996).
9. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, Наука, Москва (1969), т.1, с.542.
10. Д. Р. Тилли, Дж. Тилли, *Сверхтекучесть и сверхпроводимость*, Мир, Москва (1977).

On critical velocities of vortex formation in rotating helium

T. I. Zueva

This paper continues the investigation of superfluid flowing between two concentric cylinders rotating at equal angular velocities. The general expression for the free energy of superfluid with vortices which have arbitrary intensities is obtained. The possibility of vortices with negative (opposite to the sign of the angular velocity) vorticities is studied. It is shown that the negative vortices appear at a greater free energy than that of the positive vor-

tices. The friction force which acts into the vortex from the normal component is calculated. The magnitude of the free energy maximum is calculated. It is shown that, due to the presence of the energy barrier, the probability of vortices appearance is great when the angular velocities are much higher than the calculated ones. The parametric equations for the envelope of the family of lines which describe the free energies as functions of the angular velocity ω for different vortex numbers N are obtained. The approximate relation between the angular velocity of a rotating vessel and the number of vortices is derived.