Физика низких температур, 1997, т. 23, № 1, с. 120–128

Гамильтоново описание движения поверхностей разрыва

А. В. Кац

Харьковский военный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 5
E-mail:bondarew@metrog.kharkov.ua

В. М. Конторович

Институт радиоастрономии НАН Украины, Украина, 310002, г. Харьков, ул. Краснознаменная, 4
E-mail:rai@ira.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 12 июля 1996 г.

Предложено гамильтоново описание движения произвольных поверхностей разрыва, основанное на вариационном принципе, учитывающем в качестве связей законы сохранения в терминах последовательно вводимых объемных потенциалов (типа Клебша). Такой способ введения гамильтоновых переменных позволяет обобщить известные канонические переменные для границы раздела двух сред на ударные волны и тангенциальные разрывы. Результаты сравниваются с введением поверхностных гамильтоновых переменных с помощью канонического преобразования от объемных гамильтоновых переменных. Они допускают прямое обобщение на случай магнитной гидродинамики, плазмы, сверхтекучей жидкости и других сред, для которых объемные гамильтоновы уравнения известны.

Запропоновано гамільтонів опис руху довільних поверхень розриву, який засновано на варіаційному принципі, що бере до уваги як зв'язки закони збереження в термінах послідовно введених об'ємних потенціалів (типу Клебша). Такий засіб введення гамільтонових змінних дозволяє узагальнити відомі канонічні змінні для поверхні розділу двох середовищ на ударні хвилі та тангенціальні розриви. Результати порівнюються з введенням поверхневих гамільтонових змінних за допомогою канонічного перетворення об'ємних гамільтонових змінних. Вони дозволяють безпосереднє узагальнення на випадок магнітної гідродинаміки, плазми, надтекучої рідини та інших середовищ, для яких об'ємні гамільтонови рівняння відомі.

PACS: 03.40.Gc; 47.10.+g; 47.10.-x

Введение

Поверхностные канонические переменные были введены Захаровым [1] для описания потенциального движения свободной поверхности жидкости. Чрезвычайное удобство такого подхода для нелинейных и стохастических задач делает небезынтересным переход к каноническим переменным и при описании движений произвольной поверхности разрыва в гидродинамике, т.е. также и для ударной волны и тангенциального разрыва, чему и посвящена настоящая работа. Заметим, что в работе [1], как и в последующей работе Синицына и одного из авторов [2,3], в которых результаты Захарова были обобщены для границы раздела двух сред, поверхностные гамильтоновы переменные были, по существу, угаданы. Позднее был предложен регулярный способ вывода поверхностных гамильтоновых переменных из объемных с помощью канонического преобразования, применимого на границе раздела несжимаемых жидкостей [4–6]. В данной работе предлагается способ вывода поверхностных гамильтоновых переменных как естественных граничных условий вариационной задачи (см., например, [7]). Оба подхода могут быть использованы и в других случаях, когда объемные переменные известны [8–11]: магнитная гидродинамика, плазма, магнетики, сверхтекучая жидкость и т.д.

В то же время вариационный принцип формулируется в таком виде, что позволяет ввести гамильтоновы потенциалы в объеме как лагранжевы множители при связях, используя в качестве последних законы сохранения. Отметим, что такой подход плодотворно использовался Дираком [12] в приложении к квантовой электродинамике, а применительно к сплошным средам рассмотрен в

© А. В. Кац, В. М. Конторович, 1997

[13,14]*. Хотя объемные гамильтоновы переменные в обычной гидродинамике известны давно [18–21], способ их введения, особенно для непотенциального течения, зачастую чисто директивный. В связи с этим до сих пор время от времени возникают вопросы, сколько должно быть пар переменных Клебша [10,22,23], входит ли энтропия в их число [4,22] и т.п. В том что касается представления скорости для непотенциального движения, используемый подход соответствует вариационному принципу Линя [13] и однозначно приводит к векторным потенциалам Клебша, исключая произвол в выборе их числа.

Вариационный принцип со связями

Объемные уравнения должны быть эквивалентны уравнениям гидродинамики идеальной жидкости (обозначения соответствуют книге Ландау и Лифшица [24]):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0\,, \tag{2}$$

$$\frac{ds}{dt} = 0;\ \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,. \tag{3}$$

Будем получать их, используя вариационный принцип для действия

$$S = \int dtL = \min\,,$$
$$L = \int d\mathbf{r}\Im\,,\ \Im = \frac{\rho v^2}{2} - \epsilon\,,\ \epsilon \equiv \rho\varepsilon\,. \tag{4}$$

К внутренней энергии могут быть добавлены слагаемые, описывающие потенциальные силы, например силу тяжести, символически выписанную в (1), и которую ниже мы будем опускать. Введем методом Лагранжа канонические переменные, учитывая (неинтегрируемые) связи (2), (3). Связи вносят в лагранжиан необходимые временные и пространственные производные

$$\Im \to \Im' = \Im + \Im_c\,,\ \Im_c = \varphi\left(\dot\rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\right) + \sigma\frac{ds}{dt}\,. \tag{5}$$

Варьируя действие (4) с лагранжевой плотностью (5) независимо по $\mathbf{v}$, ρ и s, получаем представление скорости и уравнения, которые мы в более общем случае выпишем далее ((27), (29)). Варьирование по φ и σ воспроизводит связи (2), (3). Для простейшего изэнтропического случая приходим к чисто потенциальному течению:

$$\frac{\delta S}{\delta \mathbf{v}} = 0 \to \mathbf{v} = \nabla\varphi\,.$$

Лагранжев множитель при связи, выражающей закон сохранения массы, оказался ни чем иным как потенциалом скорости, что в свою очередь означает, что плотность ρ и потенциал φ являются канонически сопряженными переменными [20]. Мы используем это обстоятельство ниже в более сложном случае непотенциального движения, вводя как объемные потенциалы Клебша методом Линя [13,15], так и поверхностные гамильтоновы переменные.

Канонические переменные

Нетрудно записать теперь уравнения (для рассматриваемого случая) в гамильтоновом виде [20]:

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = 0 \to \dot\rho = \frac{\delta H}{\delta \varphi}\,;\ \frac{\delta S}{\delta \rho} = 0 \to \dot\varphi = -\frac{\delta H}{\delta \rho}\,. \tag{6}$$

При этом обобщенные координаты и импульсы имеют вид

$$q = (\rho, \mathbf{v})\,,\ p = (\varphi, 0).$$

Плотность гамильтониана равна

$$\hat H \equiv p\dot q - \Im = \varphi\dot\rho - \Im\,. \tag{7}$$

(Обращаем внимание на идентичное обозначение обобщенного импульса и давления.) В случае, если имеется свободная граница

$$z = \zeta(\mathbf{r}_\perp, t)\,,\ \mathbf{r}_\perp = (x, y)\,, \tag{8}$$

как показал впервые Захаров [1], можно ввести «двумерные канонические переменные»:

$$\zeta(\mathbf{r}_\perp, t)\,,\ \psi(\mathbf{r}_\perp, t) = \varphi|_\zeta\,,(\rho = 1)\,. \tag{9}$$

При их введении использовалось объемное уравнение для потенциала скорости (уравнение Лапласа) и то, что сопряженная ему координата в рассмат-

* Разумеется, граничные условия на объемные гамильтоновы переменные (и соответственно выбор поверхностных канонических переменных) должны приводить к непрерывности потоков массы, энергии и импульса, однако этими требованиями они не определяются однозначно. По-видимому, простейшим способом получения такой системы, которая, с одной стороны, являлась бы полной, а с другой стороны, оставляла бы наибольшую возможную калибровочную свободу, и является использование вариационного принципа со связями при введении самих канонических переменных (см. ссылки в [15–17]).

ривавшемся случае несжимаемой жидкости является константой. Ввиду последнего потенциал может быть в принципе исключен из гамильтониана; существенными переменными в этом случае являются возвышение и граничное значение потенциала, что соответствует наличию одной (континуальной) физической степени свободы.

Эти гамильтоновы переменные использовались при исследовании волнения на поверхности жидкости (см., например, [10,25,26]). В связи с исследованием внутренних волн в [2] (см. также обзор [3]) было получено (довольно очевидное, но, как мы увидим, весьма важное для нас) обобщение переменной Захарова на случай границы двух сред:

$$\zeta\,;\ \psi = (\rho_1\varphi_1 - \rho_2\varphi_2) \equiv [\rho\varphi]\,,\ z = \zeta\,. \quad (10)$$

Канонические преобразования

В дальнейшем [4–6] был предложен способ вывода поверхностных канонических переменных из объемных с помощью канонического преобразования и приведено обобщение на непотенциальное движение, к чему мы вернемся ниже, и случай магнитной гидродинамики. Выпишем объемные гамильтоновы уравнения для потенциального движения [20]:

$$H = \int dV\left(\frac{\rho v^2}{2} + \epsilon(\rho)\right). \quad (11)$$

Следуя [5], рассмотрим переход к двум несжимаемым жидкостям с плотностями ρ_1 и ρ_2, разделенным границей $z = \zeta(\mathbf{r}_\perp, t)$. Для этого введем представление

$$\rho = f(\zeta - z) \equiv \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2)\Theta(\zeta - z)\,, \quad (12)$$

где непрерывную функцию Θ, описывающую реальный или фиктивный переходный слой, устремим к функции скачка

$$\Theta\,(\zeta - z) \to \theta\,(\zeta - z) = 1 \quad (\zeta > z)\,;\ \ 0\,(\zeta < z)\,. \quad (13)$$

Естественно, что после предельного перехода изменение плотности в данной точке определяется только движением границы раздела и описывается функцией $\zeta(\mathbf{r}_\perp, t)$. Производная же переходит в δ-функцию:

$$f' \to \delta(\zeta - z)\,.$$

Перейдем теперь от старой координаты ρ и импульса φ к новым каноническим переменным с помощью канонического преобразования [27], считая возвышение ζ новой координатой. Производящий функционал

$$F(\varphi, \zeta) = \int dV\varphi\, f(\zeta - z)$$

после предельного перехода равен

$$F(\varphi, \zeta) = \int d\mathbf{r}_\perp\left\{\int^{\zeta} \rho_1\varphi_1 dz + \int_{\zeta} \rho_2\varphi_2 dz\right\},$$

и вариация по ζ дает новый импульс

$$\psi \equiv \frac{\delta F}{\delta\zeta} = (\rho_1\varphi_1 - \rho_2\varphi_2)\big|_{z=\zeta} \equiv [\rho\varphi]\,, \quad (14)$$

так что ζ и $\psi \equiv [\rho\varphi]$ являются канонически сопряженной парой, совпадающей с (10). Ниже мы получим его также из вариационного принципа.

Представление Клебша и векторный потенциал

Для описания непотенциального движения используется представление Клебша [18,19,21]:

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi - \frac{\lambda}{\rho}\nabla\mu - \frac{\sigma}{\rho}\nabla s\,, \quad (15)$$

причем параметры Клебша удовлетворяют соотношениям

$$\dot\mu = \frac{\delta H}{\delta\lambda} = -\,(\mathbf{v}\nabla)\,\mu\,,\ \frac{d\mu}{dt} = 0\,;\ \dot\lambda = -\,\frac{\delta H}{\delta\mu} = -\,\mathrm{div}\,\lambda\mathbf{v}\,.$$

Обобщение предыдущего приема с использованием канонического преобразования дает возможность и в этом случае ввести поверхностные переменные [6]. Например, опуская энтропийные члены, введем производящую функцию, согласно

$$F(\varphi, \mu; \zeta, \tilde\lambda) = \int dV\left\{\varphi f(\zeta - z) + \tilde\mu\tilde\lambda\, f(\zeta - z)\right\},$$

где

$$\rho = f(\zeta - z)\,,\ \ \lambda = \tilde\lambda f(\zeta - z)\,.$$

В результате приходим к каноническим уравнениям

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\,\frac{\delta H}{\delta\zeta}\,,\quad \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\psi}\,,$$

в которых роль поверхностных гамильтоновых переменных играют $\zeta, \psi \equiv [\rho(\varphi + \tilde\mu\tilde\lambda)]$.

Хотя, казалось бы, трех скалярных полей φ, λ и μ достаточно для описания произвольного векторного поля скорости [23], но в действительности это оказалось не так. Неполнота описания видна, если вычислить спиральность — инвариант Хопфа [28,29],

$$I = \int dV\,(\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v})\,.$$

В рассматриваемом представлении (для изэнтропических движений) он тождественно обращается в нуль, в то время как для топологически сложных течений должен быть отличным от нуля, характеризуя степень заузленности [9,30,31].

По-видимому, дело в том, что интуитивное представление о достаточности трех скалярных полей отказывает в случае появления особых точек и линий, как это имеет место в вышеприведенном примере, так как при этом не выполняются условия разложимости в ряд, на которых основана теорема Дарбу (см. [32]), точно выражающая обсуждаемую возможность.

Попытаемся ввести векторные канонические переменные аналогично тому, как выше был введен скалярный потенциал, но используя в качестве дополнительной связи сохранение импульса:

$$\mathfrak{I}' = \mathfrak{I} + \varphi\,(\dot{\rho} + \operatorname{div}\rho\mathbf{v}) + A_l(\partial_t \rho v_l + \partial_m \Pi_{lm}),$$
$$\Pi_{lm} = \rho v_l v_m + p\delta_{lm}. \qquad (16)$$

Варьирование по v приводит к

$$\delta\mathbf{v}:\ v_l = \dot{A}_l + (v\nabla)A_l + v_m\partial_l A_m + \partial_l\varphi.$$

Или, разрешая относительно скорости, получаем

$$K_{lm}v_m = \partial_l\varphi + \dot{A}_l; \qquad (17)$$

$$K_{lm} = \delta_{lm} - \partial_m A_l - \partial_l A_m. \qquad (18)$$

Таким образом, множитель Лагранжа при связи, выражающей сохранение импульса, оказался векторным потенциалом скорости. Его роль в гидродинамике в силу нелинейности уравнений, однако, несравненно менее значительна, чем в электродинамике. Обобщенные координаты и импульсы имеют вид

$$(\rho, \rho\mathbf{v}) \text{ — координата, } (\varphi, \mathbf{A}) \text{ — импульс}. \qquad (19)$$

Мы видим, что этот способ приводит к появлению в качестве канонической переменной векторного потенциала, с помощью которого описывается непотенциальное движение. Подчеркнем, что данное представление позволяет описывать в канонических переменных движение жидкости с помощью меньшего числа функций, чем векторные переменные Клебша. Однако появление в гамильтониане после исключения скорости нелинейного по A тензора, обратного K_{ij}, усложняет рассмотрение. Поэтому на время оставим эту интересную возможность.

Векторные переменные Клебша

Для того чтобы привести лагранжиан к более привычному виду, представим скорость как полную производную смещения $\vec{\xi}$:

$$\mathbf{v} = \frac{d\vec{\xi}}{dt} = \dot{\vec{\xi}} + (\mathbf{v}\nabla)\vec{\xi}. \qquad (20)$$

Используя (20) как связь с лагранжевым множителем $\vec{\lambda}$, легко получить канонические уравнения. Выпишем их, введя предварительно для сопоставления с переменными Клебша сдвиг на радиус-вектор

$$\vec{\xi}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} - \vec{\mu}(\mathbf{r}, t), \qquad (21)$$

вводя переменную $\vec{\mu}(\mathbf{r}, t)$ вместо полевой переменной $\vec{\xi}(\mathbf{r}, t)$. Полагая без ограничения общности смещение $\xi = 0$ при $t = 0$, получаем $\vec{\mu}(\mathbf{r}, 0) = 0$, так что $\vec{\mu}(\mathbf{r}, t)$ определяет лагранжевы координаты частицы жидкости, находящейся в момент времени t в точке с эйлеровыми координатами r. Фиксируя $\vec{\mu}$, можно обратить это соотношение и найти траекторию частицы $\mathbf{r}(\vec{\mu}, t)$, а используя (21), определить и смещение:

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}(\mathbf{r}(\vec{\mu}, t), t), \quad \mathbf{r}(\vec{\mu}, 0) = \vec{\mu}. \qquad (22)$$

Отсюда для скорости получаем

$$\mathbf{v} = \frac{d\vec{\xi}}{dt}\Big|_{\vec{\mu}} = \partial_t\mathbf{r}|_{\vec{\mu}} = \dot{\vec{\xi}}|_{\mathbf{r}} + (\mathbf{v}\nabla)\vec{\xi}, \qquad (23)$$

так что уравнение движения для $\vec{\mu}(\mathbf{r}, t)$ совпадает с уравнением переноса сохраняющейся величины: $d\vec{\mu}/dt = 0$. Очевидно, что переменные $\vec{\lambda}$ и $\vec{\mu}$ соответствуют сохраняющимся лагранжевым координатам $(\vec{\mu})$ и импульсам $(\vec{\lambda}/\rho)$ частицы. Это соответствует введению Линем [4,15,22] векторного набора параметров Клебша. Переход к скалярным переменным Клебша реализуется в том частном случае, когда $\vec{\mu}$ и $\vec{\lambda}$ пропорциональны одному и тому же постоянному вектору.

Для объемной плотности функции Лагранжа получаем

$$\mathfrak{I}' = \mathfrak{I} + \mathfrak{I}'_c,\ \mathfrak{I}'_c = \varphi(\dot{\rho} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})) + \vec{\lambda}\frac{d\vec{\mu}}{dt} + \sigma\frac{ds}{dt}, \qquad (24)$$

откуда находим представление скорости

$$\frac{\delta}{\delta\mathbf{v}}:\ \mathbf{v} = \nabla\varphi - \frac{\lambda_m}{\rho}\nabla\mu_m - \frac{\sigma}{\rho}\nabla s \qquad (25)$$

и объемные уравнения

$$\frac{\delta}{\delta\vec{\mu}}:\ \dot{\vec{\lambda}} + \partial_m(\vec{\lambda}v_m) = 0, \qquad (26)$$

$$\frac{\delta}{\delta\vec{\lambda}}: \frac{d\vec{\mu}}{dt} = 0, \tag{27}$$

$$\frac{\delta}{\delta\rho}: \frac{d\varphi}{dt} + w - \frac{v^2}{2} = 0, \tag{28}$$

$$\frac{\delta}{\delta\varphi}: \dot{\rho} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, \tag{29}$$

$$\frac{\delta}{\delta s}: \dot{\sigma} + \operatorname{div}(\sigma\mathbf{v}) + \rho T = 0, \tag{30}$$

$$\partial/\partial\sigma: \; ds/dt = 0. \tag{31}$$

Канонические координаты и сопряженные им импульсы равны

$$q = (\rho, \vec{\mu}, s), \quad p = (\varphi, \vec{\lambda}, \sigma). \tag{32}$$

Дифференцируя (25) по времени и используя уравнения (26)–(31), можно убедиться, что скорость удовлетворяет уравнению Эйлера (1).

Заметим, что гамильтониан при этом равен

$$\hat{H} = \sum p\dot{q} - \Im' \equiv \hat{\hat{H}} - \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}\varphi), \tag{33}$$

где $\hat{\hat{H}}$ — плотность энергии жидкости, причем дивергентный член для нас существен.

Гамильтоновы переменные на поверхности разрывов

Пусть уравнение поверхности разрыва (любого типа) имеет вид

$$R(\mathbf{r}, t) = 0, \tag{34}$$

где функция R либо задана (определяя форму фиксированной жесткой границы), либо подлежит определению (например, на свободной границе) при решении гидродинамической задачи. При очевидных ограничениях локально его можно представить в разрешенной форме (8): $R \to z - \zeta(\mathbf{r}_\perp, t)$.

Дифференцируя (34) по времени, получаем кинематическое условие

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla R = 0, \tag{35}$$

где

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\Big|_{R=0} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{n}u_n$$

— скорость движения границы, которую без ограничения общности будем считать направленной по нормали $\mathbf{n} = \nabla R/|\nabla R|$ (нормаль направлена из среды 1 в среду 2). Заметим, что в случае контактного разрыва u_n совпадает со скоростью жидкости v_n. Кинематическое условие используем как связь в вариационном принципе с лагранжевым множителем ψ.

Поскольку для получения объемных уравнений движения приходилось проводить интегрирование по частям, то после обращения в нуль коэффициентов при вариациях объемных переменных в вариации действия остается поверхностный член, содержащий граничные значения объемных вариаций. Проводя интегрирование по частям с учетом тождества

$$\int dt \int d\mathbf{r}\frac{\partial f}{\partial t} = \int dt\left(\frac{\partial}{\partial t}\int d\mathbf{r} f - \int d\Sigma\,[u_n f]\right) = -\int dt \int d\mathbf{r}_\perp [f\,\mathbf{u}\nabla R]$$

и добавляя слагаемое, отвечающее вариации границы, получаем для действия

$$(\delta S)_{\text{bound}} = \int dt \int d\mathbf{r}_\perp \left[(\varphi\delta\rho + \vec{\lambda}\delta\vec{\mu} + \sigma\delta s)\mathbf{v}'\nabla R + \rho\varphi(\delta\mathbf{v})\nabla R + \Im\delta\zeta\right], \tag{36}$$

где квадратные скобки означают скачок соответствующей величины на границе $[X] \equiv X_1 - X_2$ и учтено, что $[\Im'_c] = 0$ в силу объемных уравнений. Заметим, что в поверхностный член (36) входят только граничные вариации обобщенных координат (включая скорость) $\delta q = (\delta q)\big|_\zeta$, а не импульсов.

Гамильтоновы потенциалы по обе стороны разрыва не являются независимыми. Модифицируем лагранжиан за счет поверхностных членов, вводя на границе дополнительные связи на канонические переменные так, чтобы полученные вариационные уравнения были эквивалентны гидродинамическим граничным условиям. Анализ показывает, что достаточно наложить на разрыве две дополнительные связи — скалярную и векторную, а именно, потребовать непрерывности потоков массы

$$\gamma: \; [\rho\mathbf{v}'] = 0 \Leftrightarrow [\rho\mathbf{v}'\nabla R] = 0, \tag{37}$$

и векторной лагранжевой координаты

$$\vec{\eta}: \; \left[\rho\vec{\mu}v'_n\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\rho\vec{\mu}(\mathbf{v}'\nabla R)\right] = 0, \tag{38}$$

где γ и $\vec{\eta}$ — множители Лагранжа, а

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u} \qquad (39)$$

— скорость жидкости относительно границы. Для удобства введения поверхностных переменных будем использовать в качестве связи также кинематическое условие (35) с множителем ψ.

Требование непрерывности потока величины $\vec{\mu}$ согласуется с ее интерпретацией как совокупности лагранжевых координат жидкой частицы: при пересечении ударной волны они не меняются, а на контактном и тангенциальном разрыве поток обращается в нуль из-за равенства нулю нормальной компоненты скорости жидкости. Заметим также, что с формальной точки зрения такая интерпретация $\vec{\mu}$ не является обязательной, а означает определенный выбор калибровки*. В такой калибровке канонические уравнения записаны в эйлеровом представлении, но включают в качестве полевых переменных лагранжевы координаты и импульсы.

Поверхностную плотность лагранжиана в результате получаем в виде (опуская слагаемое с поверхностной энергией, см. также следующий раздел)

$$\Im_\Sigma = -\psi(R + \mathbf{u}\nabla R) + \left[\rho\mathbf{v}'\Gamma\right]\nabla R\,, \qquad (40)$$

$$\Gamma = \gamma + \vec{\eta}\,\vec{\mu}\,. \qquad (41)$$

Отсюда для лагранжиана имеем

$$L \to L' + L_\Sigma\,,\quad L_\Sigma = \int d\mathbf{r}_\perp \Im_\Sigma\,, \qquad (42)$$

так что сопряженный возвышению границы импульс равен ψ (10), (14): $\psi = \delta L/\delta\dot{\zeta}$. Поверхностная плотность гамильтониана и гамильтониан соответственно равны

$$H_\Sigma = \psi\dot{\zeta} - \Im_\Sigma \equiv \psi\mathbf{u}\nabla R - \left[\rho\mathbf{v}'\Gamma\right]\nabla R\,, \qquad (43)$$

$$H = \widetilde{H} + \int d\mathbf{r}_\perp \psi(\mathbf{u}\nabla R) -$$

$$- \int d\mathbf{r}\left(\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}\varphi) + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}'\Gamma)\right).$$

Теперь, считая вариации граничных значений всех объемных переменных с обеих сторон разрыва и введенных поверхностных переменных (ψ, ζ, γ и $\vec{\eta}$) независимыми, получаем систему условий на границе(подчеркнем, что условия (44), (45), (47) и (48) выполняются на обеих сторонах границы):

$$\delta\rho\colon\ (\varphi + \Gamma)(\mathbf{v}'\nabla R) = 0\,, \qquad (44)$$

$$\delta\mathbf{v}\colon\ \rho(\varphi + \Gamma) = 0 \to \Gamma = -\varphi\,, \qquad (45)$$

$$\delta\mathbf{u}\colon\ \psi + [\rho\Gamma] = 0 \to \psi = [\rho\varphi]\,, \qquad (46)$$

$$\delta\vec{\mu}\colon\ (\vec{\lambda} + \rho\vec{\eta})(\mathbf{v}'\nabla R) = 0\,, \qquad (47)$$

$$\delta s\colon\ \sigma(\mathbf{v}'\nabla R) = 0\,, \qquad (48)$$

$$\delta\gamma\colon\ \left[\rho\mathbf{v}'\nabla R\right] = 0\,, \qquad (49)$$

$$\delta\vec{\eta}\colon\ \left[\rho\vec{\mu}(\mathbf{v}'\nabla R)\right] = 0\,, \qquad (50)$$

$$\delta\psi\colon\ \dot{\zeta} - \mathbf{u}\nabla(z - \zeta) = 0\,, \qquad (51)$$

$$\delta\zeta\colon\ \left[\Sigma\, p\dot{q} - \hat{H} + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}\varphi + \rho\mathbf{v}'\Gamma)\right] -$$

$$- (\partial_t\psi + \nabla_\perp(\mathbf{u}_\perp\psi)) + \alpha\nabla_\perp\left(\frac{\nabla_\perp\zeta}{\left(1 + (\nabla_\perp\zeta)^2\right)^{1/2}}\right) = 0\,. \qquad (52)$$

Здесь α — коэффициент поверхностного натяжения, соответствующий стандартный член в гамильтониане

$$H_\alpha = \int d\Sigma\,\alpha =$$

$$= \alpha\int d\mathbf{r}_\perp\left[\frac{1}{\left(1 + (\nabla_\perp\zeta)^2\right)^{1/2}} - 1\right] + \mathrm{const}$$

выше опускался.

При варьировании поверхностного слагаемого $[\rho\mathbf{v}'\Gamma]\nabla R$ в (43) удобно вначале преобразовать его к виду объемного с помощью тождества

$$\int d\mathbf{r}_\perp\left[\mathbf{X}\nabla R\right] = \int d\mathbf{r}\,\mathrm{div}\,\mathbf{X}\,,$$

проварьировать и проинтегрировать по частям.

Уравнения (44)–(52) представляют полную систему граничных условий в канонических переменных для объемных уравнений движения (25)–(31). Прежде чем переходить к рассмотрению различных типов разрывов, проанализируем полученные уравнения. Очевидно, что (44) является следствием (45), т.е. без ограничения общности можно считать граничную вариацию плотности $\delta\rho\,|_{z=\zeta}$ равной нулю. Имеющее наиболее громоздкий вид уравнение (52) с учетом остальных граничных ус-

* Легко убедиться, что существует калибровочное (и одновременно каноническое) преобразование, переводящее $\vec{\mu}$ в $\vec{\mu} + s\mathbf{b}$, где $\mathbf{b}$ — постоянный вектор, которое нарушает естественную интерпретацию $\vec{\mu}$. С этим обстоятельством связаны имеющиеся в литературе попытки использования энтропии s вместо скалярной клебшевой переменной μ. Из сказанного выше очевидны ограниченность и неудобство такого представления, в частности, из-за различия в граничных условиях для $\vec{\mu}$ и s.

ловий и объемных уравнений можно преобразовать к виду

$$\left[p + \rho v_n'^2\right] + \alpha \nabla_\perp \left(\frac{\nabla_\perp \zeta}{\left(1 + (\nabla_\perp \zeta)^2\right)^{1/2}} \right) = 0 , \quad (53)$$

что соответствует непрерывности нормальной компоненты потока импульса. Далее вместо уравнений (44)–(52) будем рассматривать систему независимых уравнений (45)–(51) и (53). Как видно, она допускает дальнейшие упрощения, так как уравнения (47),(48) и (50) содержат одинаковый множитель $\mathbf{v}'\nabla R$, т. е. нормальную компоненту скорости жидкости относительно границы. Следовательно, найденная система уравнений, так же как и стандартная гидродинамическая [24], содержит «вилку», отвечающую двум классам разрывов: ударным волнам, через которые переносится масса и $j = \rho v_n' \neq 0$, так что $v_n' \neq 0$ и тангенциальный и контактный разрывы, на которых $v_n' = 0$.

Поверхностное натяжение

Выше мы учли поверхностное натяжение, как это обычно и делается, введением специального поверхностного слагаемого H_α в энергию и соответственно в функцию Лагранжа. Однако, используя предельный переход (13), (15), мы можем получить это слагаемое из объемной плотности внутренней энергии. Для этого в последней необходимо учесть зависимость от локальных градиентов плотности (слабую пространственную дисперсию), отражающую конечный радиус действия межмолекулярных сил, как раз и ответственных за возникновение поверхностного натяжения:

$$\rho\varepsilon(\rho) \equiv \epsilon(\rho) \to \epsilon(\rho, \nabla\rho) . \quad (54)$$

Такая зависимость от локальных градиентов совершенно естественно вписывается в обычную формулировку вариационного принципа, где функция Лагранжа есть функция не только обобщенных координат, но и их градиентов (без последних не могут возникнуть полевые уравнения). С другой стороны, для уравнения состояния это соответствует хорошо известному приближению Орнштейна—Цернике, с помощью которого описывается такое явление, как критическая опалесценция (нельзя только слишком близко приближаться к критической точке, где дисперсия перестает быть слабой из-за нетривиального вклада флуктуаций) и выводится уравнение Ван-дер-Ваальса. Изотропия взаимодействий означает, что аргументом энергии будет квадрат градиента плотности, а значит, при предельном переходе придется сохранить множителем у δ-функции производную от Θ-функции, описывающей реальную форму переходного слоя (и вид интерполяции):

$$\nabla\rho \to (\rho_2 - \rho_1)\mathbf{n}\frac{d\Theta}{dR}\sqrt{1 + (\nabla\zeta)^2} .$$

Соответственно

$$\int dV\epsilon\left(\rho, (\nabla\rho)^2\right) \to \int dV\epsilon(\rho) + \int d\Sigma\,\alpha ,$$

где

$$\alpha = \frac{\partial\epsilon}{\partial(\nabla\rho)^2}\left(\rho_2 - \rho_1\right)^2 \frac{d\Theta}{dR}\Big|_{R=0} . \quad (55)$$

Отсюда следует оценка $\alpha \sim \epsilon a^2/l$, где a — атомный масштаб, а l — толщина переходного слоя.

Гамильтоновы переменные на поверхности ударной волны

Если $v_n' \neq 0$, то поток массы через разрыв отличен от нуля и, согласно (49), непрерывен:

$$\rho v'_n = j \neq 0 , \quad [j] = 0 . \quad (56)$$

Учитывая это, из (47), (48) и (50) получаем на поверхности разрыва соответственно

$$\vec{\eta} = -\vec{\lambda}/\rho \to [\vec{\lambda}/\rho] = 0 , \quad (57)$$

$$\sigma|_\zeta = 0 , \quad (58)$$

$$[\vec{\mu}] = 0 . \quad (59)$$

Следовательно, лагранжевы инварианты $\vec{\mu}$ и $\vec{\lambda}/\rho$ непрерывны, а сопряженный энтропии импульс σ обращается в нуль на границе. Из непрерывности $\vec{\mu}$ следует непрерывность Γ, что, согласно (45), влечет непрерывность потенциала φ на границе

$$\Gamma \equiv \gamma + \vec{\lambda}\vec{\mu}/\rho = -\varphi \to [\varphi] = 0 , \psi = [\rho]\varphi|_\zeta . \quad (60)$$

Для граничных значений скорости получаем

$$\mathbf{v}|_\zeta = \nabla\varphi - (\lambda_m \nabla\mu_m)/\rho , \quad (61)$$

откуда с учетом предыдущего следует непрерывность тангенциальной компоненты скорости

$$\left[\mathbf{v}_\tau\right] = \left[\nabla_\tau\varphi - (\lambda_m\nabla_\tau\mu_m)/\rho\right] = 0 , \quad \mathbf{n}\nabla_\tau \equiv 0 , \quad (62)$$

где индекс τ означает тангенциальную компоненту. Используя полученные условия, можно проверить, что поток энергии через границу непрерывен.

Добавляя к этим уравнениям (53), убеждаемся, что они описывают ударную волну (для газа, в со-

ответствии с приведенными выше оценками, следует положить $\alpha = 0$).

Любопытно отметить, что потоки величин $\vec{\mu}, \vec{\lambda}/\rho, \varphi$ непрерывны:

$$\left[\mathbf{j}_{\vec{\mu}}\right] = \left[\mathbf{j}_{\vec{\lambda}/\rho}\right] = \left[\mathbf{j}_{\varphi}\right] = 0; \qquad (63)$$

$$\mathbf{j}_{\vec{\mu}} \equiv \rho\vec{\mu}v_n', \mathbf{j}_{\vec{\lambda}/\rho} \equiv \vec{\lambda}v_n', j_{\varphi} \equiv \rho\varphi v_n'.$$

Гамильтоновы переменные на поверхности тангенциального и контактного разрыва

Пусть теперь $v_n' = 0$ с одной из сторон разрыва. Тогда из (49) следует, что она и с другой стороны разрыва равна нулю, т.е. нормальная компонента скорости жидкости равна скорости движения границы, и жидкость не пересекает разрыв. Уравнения (44), (47), (48), (50) при этом не накладывают никаких дополнительных ограничений. Величину u_n можно с помощью соотношения (51) исключить:

$$\mathbf{v}'\nabla R = 0, \quad j = 0, \quad v_n = u_n, \qquad (64)$$

$$\dot{\zeta} = \mathbf{v}\nabla R = v_n\sqrt{1 + (\nabla_\perp\zeta)^2}, \qquad (65)$$

следствие (45) запишем явно

$$\rho(\Gamma + \varphi) = 0 \rightarrow \gamma + (\varphi + \vec{\eta\mu})|_\zeta = 0, \qquad (66)$$

(53) сводится к

$$\left[p\right] + \alpha\nabla_\perp\left(\frac{\nabla_\perp\zeta}{\left(1 + (\nabla_\perp\zeta)^2\right)^{1/2}}\right) = 0. \qquad (67)$$

Добавляя к этим уравнениям следствие (45) и (46)

$$\psi = [\rho\varphi], \qquad (68)$$

получаем совокупность граничных условий (64)–(68), которым должны удовлетворять гамильтоновы переменные при $[v_n] = 0$. Для компонент скорости получаем

$$\mathbf{v}_\tau = \nabla_\tau\varphi - \frac{\lambda_m}{\rho}\nabla_\tau\mu_m - \frac{\sigma}{\rho}\nabla_\tau s, \qquad (69)$$

$$v_n = \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{\lambda_m}{\rho}\frac{\partial\mu_m}{\partial n} - \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial s}{\partial n}, \left[v_n\right] = 0. \qquad (70)$$

При $[\mathbf{v}_\tau] \neq 0$ граничные условия соответствуют тангенциальному разрыву, а при $[\mathbf{v}_\tau] = 0$ — контактному разрыву.

Заметим, что полученные уравнения допускают значительную свободу в выборе граничных значений гамильтоновых переменных, что соответствует калибровочной свободе в выборе потенциалов. Для всех разрывов весьма существенными являются дополнительные поверхностные гамильтоновы переменные: координата $\zeta(\mathbf{r}_\perp, t)$ и импульс $\psi = [\rho\varphi]_{z=\zeta}$. От симметричного выражения

$$\psi = [\rho\varphi + \vec{\lambda\mu} + \sigma s]_{z=\zeta}, \qquad (71)$$

обобщающего приведенное в [5,6] на векторные переменные Клебша, выражение для импульса, получаемое в данной работе, отличается каноническим преобразованием.

Заключение

Вариационный принцип с дополнительными связями различных типов использовался для введения как объемных канонических переменных (в том числе потенциалов типа Клебша), так и поверхностных канонических переменных для разрывов всех типов, включая ударные волны, которые также могут рассматриваться как гамильтонова система. Последнее не вполне тривиально, учитывая диссипативный характер ударной волны.

Полученная система условий на поверхностях разрывов в канонических переменных является минимальной и эквивалентна обычной системе гидродинамических условий на разрывах (т. е. непрерывности потоков массы, энергии и импульса). Благодаря минимальности и калибровочной свободе возможен дополнительный выбор ограничений, соответствующий конкретной решаемой задаче.

Обсуждается каноническое преобразование от объемных к поверхностным гамильтоновым переменным и члены с поверхностным натяжением вводятся с его помощью.

Векторные потенциалы Клебша позволяют описать движение наиболее общего вида, а условия непрерывности потоков гамильтоновых потенциалов на разрыве означают, что поверхность разрыва не обязана совпадать с эквипотенциальной, что позволяет избежать ряда трудностей в приложениях.

Авторы благодарны редакции юбилейного выпуска, посвященного Илье Михайловичу Лифшицу, за предложение принять в нем участие. Наше отношение к И. М., которому мы многим обязаны, может быть обозначено одним словом — любовь. Один из авторов (В. К.) со времени дипломной работы, выполнявшейся под руководством И. М. и связанной с гидродинамикой сверхтекучего гелия, сохранил к гидродинамике неисчезающий интерес. Авторы благодарят участников и организаторов Рабочей группы «Сингулярный предел для волн с дисперсией II»(DW2-singlimit) и Совета по Нелинейной динамике РАН за обсуждение и поддержку. В. М. Конторович благодарит за поддержку Международную соросовскую программу поддержки

образования в области точных наук Международного фонда «Відродження», грант SPU042029.

1. В. Е. Захаров, *ПМТФ* **2**, 89 (1968).
2. Ю. А. Синицын, В. М. Конторович, *Взаимодействие длинных волн и мелкомасштабной турбулентности*, в сб.: *Исследования турбулентной структуры океана*, Изд-во. МГИ АН УССР, Севастополь (1975), с. 96.
3. В. М. Конторович, *Изв. вузов, Радиофизика* **19**, 872 (1976).
4. В. П. Гончаров, В. И. Павлов, *Проблемы гидродинамики в гамильтоновом описании*, Изд-во МГУ, Москва (1993).
5. В. М. Конторович, Х. Кравчик, В. Тиме, *Препринт* № 158, Институт радиофизики и электроники, Харьков (1980).
6. В. М. Конторович, Х. Кравчик, В. Тиме, В сб.: *Взаимодействие и самовоздействие волн в нелинейных средах*, ч. II, Дониш, Душанбе (1988), с. 73.
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости*, Наука, Москва (1965).
8. В. Е. Захаров, *Изв. вузов, Радиофизика* **17**, 431 (1974).
9. V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov, *Sov. Sci. Review, Sect.* **S 4**, 167 (1984).
10. V. E. Zakharov, V. S. L'vov, and G. Falkovich, *Kolmogorov Spectra of Turbulence. Wave Turbulence*, Springer-Verlag, New York, (1992).
11. В. Л. Покровский, И. М. Халатников, *ЖЭТФ* **71**, 1974 (1976).
12. П. Дирак, *Лекции по квантовой механике*, Мир, Москва (1968).
13. C. C. Lin, *Liquid Helium, Proc. Int. School of Physics, Course* XXI, Acad. Press, New York (1963).
14. Л. И. Седов, *УМН* **20**, 121 (1965).
15. В. Л. Бердичевский, *Вариационные принципы механики сплошной среды*, Наука, Москва (1983).
16. А. Н. Крайко, *Прикл. Мат. Мех.* **45**, 256 (1981).
17. М. В. Лурье, *Прикл. Мат. Мех.* **30**, 747 (1966); *там же* **33**, 602 (1969).
18. Г. Лэмб, *Гидродинамика* ГТТИ, Москва, (1947), (разд. *Преобразование Клебша*, с. 312).
19. F. Stuart, *Thesises*, Dublin (1900) (цитируется по Лэмбу [18]).
20. H. Bateman, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, CUP, Cambridge (1932).
21. A. Clebsch, *J. Angew. Math.*, Crelle, 56, No 1 (1859).
22. R. I. Seliger and G. B. Whitham, *Proc. Roy. Soc.* **A305**, 1 (1968).
23. Б. И. Давыдов, *ДАН СССР* **69**, 165 (1949).
24. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
25. Б. Б. Кадомцев, В. М. Конторович, *Изв. вузов, Радиофизика* **17**, 511 (1974).
26. А. В. Кац, В. М. Конторович, *Журн. Прикл. Мех. Техн. Физ.* **N 6**, 97 (1974)
27. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Гос. изд-во физ.-мат. лит., Москва (1958).
28. H. Hopf, *Math. Annalen* **B104**, 637 (1931).
29. M. Steenbeck and F. Krause, *Z. Naturforsch.* **B21a**, 1285 (1966).
30. Г. Моффат, в сб.: *Современная гидродинамика (успехи и проблемы)*, Мир, Москва (1984), с. 49.
31. E. A. Kuznetsov and A. V. Mikhailov, *Phys. Lett.* **77A**, 37 (1980).
32. П. К. Рашевский, *Геометрическая теория уравнений с частными производными*, Гостехиздат, Москва (1947).

Hamiltonian description of the discontinuity surfaces motion

A. V. Kats and V. M. Kontorovich

A Hamiltonian description of the discontinuity arbitrary surfaces motion based on the variational principle taking into account the conservation laws in Clebsch variables and their consequences on the break is proposed. It generalizes the khown results for the two media boundary to the cases of shocks and slip surfaces. The canonical transformation from the bulk Hamiltonian variables to the surface ones is considered and the above approaches are compared. The results allow a strict generalization to the cases of magnetohydrodynamics, plasma, superfluid liquid and other media for which the bulk Hamiltonian equations are known.