Физика низких температур, 1997, т. 23, № 1, с. 36–46

К теории скин-эффекта: учет приходного члена в интеграле столкновений

М. И. Каганов

7 Agassiz Ave., Belmont MA 02178, USA

Г. Я. Любарский

6442 N. Troy, Chicago IL 60645, USA

А. Г. Митина

744 S. Cleveland, Arlington Heights, 60005 USA

Статья поступила в редакцию 23 сентября 1996 г.

Построен алгоритм вычисления поверхностного импеданса нормального изотропного металла с учетом приходного слагаемого в интеграле столкновений (случай зеркального отражения). Получены аналитические выражения для вероятности рассеяния, учитывающей *s*-, *p*- и *d*-рассеяния.

Побудовано алгоритм обчислення поверхневого імпедансу нормального ізотропного металу з урахуванням прибуткового доданка в інтегралі зіткнень (випадок дзеркального відображення). Одержано аналітичні вирази для імовірності розсіяння, яка ураховує *s*-, *p*- і *d*-розсіяння.

PACS: 72.10.-d

1. При низких температурах длина свободного пробега l — макроскопический параметр, в хороших металлах часто превосходящий другие параметры размерности длины: глубину скин-слоя δ, длину волны звука, толщину пластины или проволоки. В частности, когда $l > \delta$, скин-эффект принято называть аномальным. Аномалия скин-эффекта вызвана пространственной дисперсией проводимости — нелокальной связью между напряженностью электрического поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ и плотностью тока $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. Формально пространственная дисперсия (нелокальность) является следствием необходимости учета диффузионного слагаемого $\mathbf{v}\partial f/\partial \mathbf{r}$ в кинетическом уравнении Больцмана для неравновесной части функции распределения f электронов проводимости ($\mathbf{v}$ — скорость электрона). Учет диффузионного слагаемого превращает кинетическое уравнение из интегрального в интегро-дифференциальное. Одно из следствий этого — зависимость функции распределения от характера взаимодействия электронов с границей образца*. Как было показано в работах [1,2], интегро-дифференциальный характер кинетического уравнения приводит к трудностям с введением понятия длины свободного пробега.

В линеаризованном кинетическом уравнении интеграл столкновений $I\{f\}$ — всегда разность двух слагаемых:

$$I\{f\} = \int W(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\, f(\mathbf{p}')d^3p' - \int W(\mathbf{p}', \mathbf{p})\, f(\mathbf{p})d^3p' , \qquad (1)$$

$W(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ — определенным образом нормированная плотность вероятности перехода электрона из состояния $|\mathbf{p}'\rangle$ в состояние $|\mathbf{p}\rangle$.

Первый интеграл описывает приход электронов в ячейку фазового пространства (*приходный член*), второй (со знаком минус) — уход электронов (*уходный член*). Если есть основания пренебречь приходным членом (τ-приближение), то уравнение Больцмана перестает быть интегральным, время

* Интегро-дифференциальное уравнение Больцмана требует формулировки граничных условий для функции распределения электронов проводимости. Граничные условия получаются из рассмотрения взаимодействия электронов с границей образца.

© М. И. Каганов, Г. Я. Любарский, А. Г. Митина, 1997

свободного пробега τ вводится естественным образом:

$$\frac{1}{\tau} = \int W(\mathrm{p}, \mathrm{p}')d^3p' \; ; \quad I\{f\} = -\frac{f(\mathrm{p})}{\tau} . \qquad (2)$$

При этом, естественно, возникает существенное упрощение: отпадает необходимость решения интегрального уравнения, а τ имеет смысл «универсального времени свободного пробега».

Когда для τ-приближения нет оснований, универсального времени релаксации и/или универсальной длины свободного пробега l не существует. Необходимо решение кинетического уравнения, которое зависит от конкретной постановки задачи. Для того чтобы уточнить, о чем идет речь, ниже мы рассмотрим две задачи, отличающиеся друг от друга лишь видом воздействия на электроны проводимости. В настоящей статье ограничиваемся случаем, когда поверхность Ферми сферическая, столкновения электронов упругие и электронный газ ($T = 0$) предельно вырожден. Рассеяние изменяет направление движения электрона, которое задается единичным вектором $\mathbf{n}$.

Интеграл столкновений можно записать в такой форме:

$$I\{f\} = \int W(\mathrm{n}, \mathrm{n}')\, f(\mathrm{n}')dO' - \int W(\mathrm{n}', \mathrm{n})\, f(\mathrm{n})dO' ,$$

$$\mathrm{n} = \mathrm{p}/p , \qquad (3)$$

где dO' — элемент телесного угла единичного вектора $\mathbf{n}'$. В изотропном случае (которым мы ограничиваемся)

$$W(\mathrm{n}, \mathrm{n}') = W(\theta) , \quad \cos\theta = \mathrm{nn}' , \qquad (4)$$

и

$$I\{f\} = \int W(\theta)\, f(\mathrm{n}')dO' - \int W(\theta)dO'\, f(\mathrm{n}) . \qquad (5)$$

Для формулировки задачи (той ее части, которая относится к кинетике) необходимо еще знание функции $W(\theta)$ — плотности вероятности рассеяния электрона на угол θ. Ее вычисление не входит в нашу задачу: функция $W = W(\theta)$ будет считаться известной и не зависящей от конкретизации постановки задачи. Это вполне допустимо, пока причина неравновесности состояния электронов проводимости — это макроскопические поля (электромагнитные, звуковые), неоднородность которых невелика по сравнению с длиной волны де-Бройля фермиевского электрона. При неупругих столкновениях электронов возникает дополнительное довольно жесткое требованиие к частоте макроскопических полей ω, при нарушении которого вероятность рассеяния не универсальна и оказывается функцией частоты ω (см. [3, § 47]). Неупругие столкновения мы не рассматриваем.

2. Основная цель нашей статьи — демонстрация того, что при аномальном скин-эффекте проявляются детали функции $W(\theta)$, так что нельзя ограничиться ее нулевым моментом (как при τ-приближении, см. (2) и (5)). Но прежде мы рассмотрим, как изменяется «время свободного пробега» в зависимости от характера воздействия на металл или, иначе, от того, какой кинетический коэффициент мы вычисляем. Как известно, удельная электропроводность металла определяется транспортным временем свободного пробега τ_{tr}:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau_{\mathrm{tr}}}{m^*} ; \quad \frac{1}{\tau_{\mathrm{tr}}} = \int W(\theta)\left(1 - \cos\theta\right)dO ;$$

$$m^* = p_F/v_F . \qquad (6)$$

При рассмотрении поглощения звука электронами проводимости интегральное уравнение для определения «времени релаксации» можно записать в виде тензорного уравнения:

$$\int W(\theta)\left[\Psi_{ik}(\mathrm{n}) - \Psi_{ik}(\mathrm{n}')\right]dO' = n_i n_k - \frac{1}{3}\delta_{ik} .$$

Отсюда $\Psi_{ik} = \tau_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{tens}}[n_i n_k - \delta_{ik}/3]$ и

$$\frac{1}{\tau_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{tens}}} = \frac{3}{2}\int W(\theta)\left(1 - \cos^2\theta\right)dO . \qquad (7)$$

Естественно, при $W(\theta) \equiv \mathrm{const}$ оба времени совпадают. Напомним, что $\int f dO = 0$, так что при $W(\theta) = \mathrm{const}$ справедливо τ-приближение.

Физические следствия соотношений (6) и (7) одинаковы: при малоугловом рассеянии за счет занижения вклада рассеяния на малые углы оба транспортных времени существенно превосходят обратную (суммарную) вероятность рассеяния. Однако при точном вычислении соответствующего кинетического коэффициента надо иметь в виду, что $\tau_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{tens}} \neq \tau_{\mathrm{tr}}$. При малоугловом рассеянии

$$\frac{1}{\tau_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{tens}}} = 3\frac{1}{\tau_{\mathrm{tr}}} .$$

3. В работе [1], как нам представляется, впервые поставлен вопрос о роли приходного члена интеграла столкновений в скин-эффекте. Apriori ясно и отмечено в [2], что роль приходного слагаемого важна в «промежуточном» случае. При $l/\delta \ll 1$ в нулевом приближении по l/δ можно пользоваться макроскопическим значением электропроводности σ (следует помнить, что в σ входит время τ_{tr},

зависящее от приходного слагаемого в интеграле столкновений. При $l/\delta \gg 1$ в нулевом приближении по δ/l импеданс не зависит от объемных диссипативных характеристик электронов проводимости. Поправочные слагаемые (к обоим предельным выражениям) зависят от приходного члена в интеграле столкновений. Важно то, что роль приходного слагаемого по-разному проявляется при различных значениях l/δ. Это означает, что единая зависимость электродинамических характеристик металла от l/δ отсутствует. При вычислении импеданса ξ и глубины проникновения δ необходимо фиксировать специальный параметр, описывающий приходное слагаемое. Специально вводить параметр, от величины или наличия которого зависит вклад приходного слагаемого, не нужно. Он возникает естественно, когда задана функция $W = W(\theta)$. В [1] роль приходного слагаемого продемонстрирована путем простейшего усложнения интеграла столкновений, точнее функции $W(\theta)$: было принято

$$W(\theta) = W_0\left(1 + \alpha\cos\theta\right), \qquad (8)$$

т.е. учтено не только s-рассеяние, когда $W(\theta) \equiv W_0$ и приходное слагаемое в задаче о скин-эффекте обращается в нуль, но и p-рассеяние, интенсивность которого описывается коэффициентом α ($|\alpha| < 1$).

Решение задачи о скин-эффекте с функцией $W(\theta)$, заданной выражением (8), облегчалось тем, что ядро приходного члена интеграла столкновений оказалось вырожденным. В результате его действие свелось к замене напряженности электрического поля $E(z)$ суммой

$$E(z) \to E(z) + \frac{\alpha}{3\sigma} j(z). \qquad (9)$$

Параметр α и определяет роль приходного слагаемого: $\alpha = 0$ соответствует τ-приближению.

В [1], как и в известной работе Ройтера и Зондгеймера [4], построена теория скин-эффекта в двух предельных по характеру взаимодействия электрона с границей образца случаях: рассмотрены зеркальное отражение электронов границей и диффузное рассеяние.

Как известно, при диффузном рассеянии для решения задачи необходимо использовать метод Винера-Хопфа. Как и в [4], удалось получить замкнутую формулу для импеданса, однако входящий в нее интеграл значительно сложнее, чем в [4]. Естественно, весьма усложнилось вычисление асимптотик. Это утверждение можно уточнить и тем самым оценить различие результатов, полученных в [1,4] (см. также [5]), и подчеркнуть сущность трудностей, которые удалось преодолеть.

Назовем функцию от κ (κ — волновой вектор, сопряженный координате z) функцией первого порядка сложности, если она, по определению, алгебраически зависит от фурье-преобразования $\overline{K}(\kappa)$ ядра интегральной связи между напряженностью электрического поля $E(z)$ и плотностью тока $j(z)$. Примером такой функции служит введенная в [1] функция

$$F(\kappa) = \kappa^2 - \left(\frac{\alpha}{3}\kappa^2 + \frac{2il^2}{\delta^2}\right)\overline{K}(\kappa) \qquad (10)$$

(см. [1, формула (37)]). Функция второго порядка сложности определяется как интеграл от функции первого порядка; пример — функции $G_{\pm}(\kappa)$ (там же):

$$G_{\pm}(\kappa) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mp i\varepsilon - \infty}^{\mp i\varepsilon + \infty} \frac{d\xi}{\xi - \kappa} \ln\frac{F(\xi)}{\xi^2 - \kappa_0^2} \qquad (11)$$

(см. [1, формула (38)]). Функция

$$H_+(\kappa) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\varepsilon - \infty}^{-i\varepsilon + \infty} \frac{d\xi}{\xi - \kappa_0} \frac{iE(0)\xi - E'(0)}{\xi - \kappa_0} \overline{K}(\xi) \exp\left[G_-(\xi)\right]$$

(см. [1, формула (39)]) — пример функции третьего порядка сложности.

Ответ, полученный Ройтером и Зондгеймером [4],

$$\zeta_{RS}^{\text{dif}} = \frac{\omega l}{c}\left(\kappa_0 - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\kappa \ln\frac{F(\kappa)}{\kappa^2 - \kappa_0^2}\right)^{-1} \qquad (12)$$

сводится к вычислению функции второго порядка сложности.

Промежуточные формулы работы [1] показывают, что для вычисления импеданса при $\alpha \neq 0$ требуется найти значение функции *третьего* порядка сложности (см. [1], Приложение, (П.19) и (П.20)). Математический результат работы [1] состоит в том, что вычисление импеданса *удалось свести к нахождению значения функции* G_+ *второго порядка сложности*: при $W(\theta) = W_0(1 + \alpha\cos\theta)$ и диффузном отражении электронов границей импеданс ζ равен

$$\zeta = \frac{\omega l}{c} i\xi_0 \frac{1 - S^2}{1 + S^2}; \qquad (13)$$

Здесь

$$S = \frac{\xi_0 \exp\left[-G_+(\xi_0)\right]}{\xi_0 + \kappa_0}, \quad \xi_0 = \frac{l}{\delta}\left(-6i/\alpha\right)^{1/2},$$

$G_+(k)$ определяется равенствами (10), (11).

В настоящем сообщении приведено обобщение результатов работы [1]. Принято, что

$$W(\theta) = W_0\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos^k \theta\right). \qquad (14)$$

Это выражение является существенно более общим, чем выражение (8). Естественное ограничение, накладываемое на коэффициенты α_k — положительность вероятности $W(\theta)$. Как правило, с ростом показателя степени k величины коэффициентов $|\alpha_k|$ уменьшаются, хотя, несомненно, для описания, например, малоуглового рассеяния сумма (14) должна содержать достаточно много членов.

Мы рассматриваем нормальное падение электромагнитной волны на металлическое полупространство $z > 0$. Импеданс (по определению) $\xi = E(0)/H(0)$. Как показано в [1], удобно ввести функцию $\chi = \chi(z, \vartheta)$, определяющую плотность тока:

$$j(z) = \frac{3\sigma}{4l}\int_0^{\pi} \chi(z, \vartheta) \sin^2 \vartheta \, d\vartheta, \qquad (15)$$

$$\mathbf{n} = \left(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta\right),$$

где длина свободного пробега l определена несколько иначе, чем в [1]:

$$\frac{1}{l} = 4\pi W_0\left(1 + \sum_{k=1}^{N/2} \frac{\alpha_{2k}}{2k+1}\right). \qquad (16)$$

Вероятность $W(\theta)$ (14) отличается от $W(\theta)$ из (6) и (7) множителем $1/v_F$, $[W_0] = [\text{см}^{-1}]$.

Функция $\chi(z, \vartheta)$ удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\cos\vartheta \frac{\partial\chi(z,\vartheta)}{\partial z} + \frac{1}{l}\chi(z,\vartheta) -$$

$$- \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} W(\theta)\chi(z,\vartheta')\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi')d\varphi' d\vartheta' =$$

$$= E(z)\sin\vartheta. \qquad (17)$$

Угол θ выражается через углы ϑ, ϑ' и φ, φ', связанные с векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$:

$$\cos\theta = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi'). \qquad (18)$$

Хотя конкретные результаты получены нами для зеркального отражения электронов границей образца, сначала мы рассмотрим весьма общий случай, обобщающий известные условия Фукса [6]:

$$\chi(0,\vartheta) = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\vartheta' \, Q(\vartheta,\vartheta')\chi(0,\vartheta')d\vartheta', \qquad (19)$$

$$0 \le \vartheta \le \pi/2.$$

Матрица $Q(\vartheta, \vartheta')$ может быть определена при рассмотрении рассеяния электрона шероховатой границей [см., например, 7]. Переход к условию Фукса осуществляется подстановкой $Q(\vartheta, \vartheta')$ в виде δ-функции:

$$\chi(0,\vartheta) = Q\chi(0,\pi-\vartheta), \quad 0 \le Q \le 1. \qquad (20)$$

Замена $W(\theta)$ в (8) выражением (14) приводит к тому, что на полуоси $z > 0$ вместо одного интегро-дифференциального уравнения приходится рассматривать систему обыкновенных интегральных уравнений, дополненную одним дифференциальным. Число таких уравнений $N = 1 + [n/2]^2$ (см. Приложение I).

Если при этом вместо граничных условий (19) взять условия Фукса (20), то матричное ядро системы заметно упрощается, принимает специальный вид — суммы разностного и «суммарного» ядер.

Наконец, если ограничиться случаем зеркального отражения ($Q = 1$), то рассматриваемая система превращается (после преобразований) в систему интегральных уравнений на всей оси с разностным ядром, которая, как известно, легко решается в явной форме.

В [1] для импеданса в случае зеркального отражения получено следующее выражение (напомним, вероятность $W(\theta)$ задана формулой (8)):

$$\zeta = \frac{\omega l}{i\pi c}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{\kappa^2 - 2i(l^2/\delta^2)\mu(\kappa,\alpha)}, \qquad (21)$$

где

$$\mu(\kappa,\alpha) = \frac{\overline{K}(\kappa)}{1 - 1/3\alpha\overline{K}(\kappa)};$$

$$\overline{K}(\kappa) \equiv \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1-y^2}{1+\kappa^2 y^2}dy = \qquad (22)$$

$$= -\frac{3}{2\kappa^2} + \frac{3}{4i\kappa}\left(1 + \frac{1}{\kappa^2}\right)\ln\frac{1+i\kappa}{1-i\kappa},$$

$\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$, причем σ зависит от длины пробега $l = (4\pi W_0)^{-1}$.

В общем случае (см. (14) и (16)), если отражение зеркально, то выражение (21) остается справедливым. Однако функция $\mu(\kappa, \alpha)$ существенно меняется. Она зависит от всех коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, т.е. $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Кроме того, перенормируется длина свободного пробега (см. (16)). Эта же функция $\mu(\kappa, \alpha)$ характеризует и напряженность электрического поля $E = E(z)$.

В Приложениях I–III выводится алгоритм вычисления функции $\mu(\kappa, \alpha)$:

$$\mu(\kappa, \alpha) = \frac{3}{4}\frac{D_{01}(\kappa, \alpha)}{D(\kappa, \alpha)}, \quad \alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}, \quad (23)$$

$D(\kappa, \alpha)$ — определитель, составленный из элементов

$$D_{(pq)(p'q')}(l\kappa) = \delta_{p-p'}\,\delta_{q-q'} - lW_0 A_{p'q'}\,\Pi_{p+p',\,q+q'}(l\kappa). \quad (24)$$

Параметр α опускаем. Поскольку неизвестные j_{pq} в системе уравнений (П.10) нумеруются двумя индексами, соответственно двумя индексами нумеруются строки и столбцы определителя; $D_{01}(l\kappa)$ — определитель, который получается из определителя D при замене в нем столбца номер (0, 1) столбцом $\Pi_{p,\,q+1}(l\kappa)$.

Функции $\Pi_{p+p',\,q+q'}$ определены следующим образом:

$$\Pi_{p+p',\,q+q'}(\lambda) \equiv \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^{(q+q')/2}\,\frac{t^{p+p'}}{1+\lambda^2 t^2}\,dt, & p+p' \text{ — четное;} \\ 2i\lambda\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^{(q+q')/2}\,\frac{t^{p+p'+1}}{1+\lambda^2 t^2}\,dt, & p+p' \text{ — нечетное.} \end{cases} \quad (25)$$

Коэффициенты

$$A_{p,q} = \alpha_{p+q}\,C^q_{p+q}\,B_q; \quad B_q = \begin{cases} 0, & q \text{ — четное;} \\ \dfrac{\pi}{2q}\,C^{(q+1)/2}_{q+1}, & q \text{ — нечетное;} \end{cases} \quad (26)$$

C^p_q — биномиальные коэффициенты.

В том же приближении, в каком получено выражение для импеданса (21), напряженность электрического поля в металле равна

$$E(z) = -\frac{i\omega l}{c}\,H(0)I(z), \quad (27)$$

где

$$I(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-iz\kappa/l)\,d\kappa}{\kappa^2 - 2i(l^2/\delta^2)\,\mu(\kappa)}. \quad (28)$$

В этих обозначениях

$$\zeta = \frac{\omega l}{ic}\,I(0). \quad (29)$$

Формулы (28), (29) вместе с формулами (23)–(26) решают поставленную задачу. Однако при большом числе коэффициентов $\alpha(n > 1)$ они очень громоздки (см. ниже). Но не только непосредственное использование интеграла (28) для нахождения асимптотических формул очень неудобно.

Если, например, $z >> l$, то подынтегральная функция быстро осциллирует, так что сам интеграл представляет собой «разностный эффект». Если l/δ очень мало или очень велико, то естественно пытаться разложить подынтегральную функцию в ряд по степеням l/δ или δ/l соответственно. Это, однако, недопустимо, так как отношение κ^2 к $2i(l^2/\delta^2)\,\mu(\kappa)$ не является малым или большим равномерно по k, каково бы ни было отношение l/δ. Поэтому целесообразно деформировать контур интегрирования, уведя его от точки $\kappa = 0$ и прижав к мнимой отрицательной полуоси, где множитель $\exp(-ikz/l)$ перестает быть осциллирующим, а при больших z/l быстро убывает.

Следует учесть, что функция $\mu(\kappa)$ имеет две точки ветвления ($\kappa = \pm i$). Это вытекает из явных выражений (25) для функций $\Pi\ldots(\kappa)$, функции $\mu(\kappa)$, которые, как можно убедиться, содержат логарифм $\ln[(1 + i\kappa)/(1 - i\kappa)]$.

Кроме того, оказывается, что при указанной деформации контур (его левое крыло) один раз пересекает нуль знаменателя, что приводит к появлению вычета.

Обозначим через $\ln^{(+)}[(1+i\kappa)/(1-i\kappa)]$ и $\ln^{(-)}[(1+i\kappa)/(1-i\kappa)]$ две аналитические в кольце $|\kappa|>1$ функции — такие, что функция $\ln[(1+i\kappa)/(1-i\kappa)]$ совпадает на полуоси $k>1$ с функцией $\ln^{(+)}[(1+i\kappa)/(1-i\kappa)]$, а на отрицательной полуоси — с функцией $\ln^{(-)}[(1+i\kappa)/(1-i\kappa)]$. Легко видеть, что две указанные функции задаются формулами

$$\ln^{(\pm)}\left(\frac{1+i\kappa}{1-i\kappa}\right) = \pm\pi i + \ln\left(\frac{1+1/i\kappa}{1-1/i\kappa}\right), \qquad |\kappa|>1 .$$

Заменяя в формулах (25) функцию $\ln[(1+i\kappa)/(1-i\kappa)]$ на $\ln^{(+)}[(1+i\kappa)/(1-i\kappa)]$ либо $\ln^{(-)}[(1+i\kappa)/(1-i\kappa)]$, мы получаем аналитические продолжения функций $\Pi\ldots$, а следовательно, и функции $\mu(\kappa)$ (ее аналитические продолжения $\mu^+(\kappa)$ и $\mu^-(\kappa)$).

Теперь можно прижать контур интегрирования в интеграле (28) к обоим берегам разреза $(-i, -i\infty)$. В результате после элементарных преобразований получаем

$$\mathrm{I}(z) = -i\frac{\exp(-i\kappa_0 z/l)}{\kappa_0 - i(l^2/\delta^2)\mu'(\kappa_0)} - 3i\frac{l^2}{\delta^2}\mathrm{II}(z),$$

$$\mathrm{II}(z) = \int_1^\infty \frac{\left(1/t\right)\left(1-1/t^2\right)\exp\left(-tz/l\right)dt}{\left[t^2 D_-(-it) + 3/2i\,(l^2/\delta^2)D_{01}^-(-it)\right]\left[t^2 D_+(-it) + 3/2i\,(l^2/\delta^2)D_{01}^+(-it)\right]}. \tag{30}$$

Эти функции пригодны для вычисления асимптотик, однако они по-прежнему очень громоздки из-за структуры функций $D(\kappa)$ и $D_{01}(\kappa)$ (см. (24)).

Естественное упрощение возникает, если отличны от нуля только коэффициенты α_1 и α_2:

$$W(\theta) = W_0\left(1+\alpha_1\cos\theta+\alpha_2\cos^2\theta\right), \tag{31}$$

т.е. если учтено s-, p- и d-рассеяние.

В этом случае

$$\mu(\kappa,\alpha) \doteq \frac{3}{4}\frac{\Pi_{02}(\kappa) - 4/3\,\beta_2\Pi_{22}(\kappa)}{1-\beta_1\Pi_{02}(\kappa) - \beta_2\left(1-4/3\,\beta_1\right)\Pi_{22}(\kappa)}, \tag{32}$$

где

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{4(1+\alpha_2/3)}; \quad \beta_2 = \frac{\alpha_2}{2(1+\alpha_2/3)}, \tag{33}$$

а функции $\Pi_{02}(\kappa)$, $\Pi_{22}(\kappa)$, согласно общим формулам (25), равны

$$\Pi_{02}(\kappa) = -\frac{2}{\kappa^2} + \frac{1}{i\kappa}\left(1+\frac{1}{\kappa^2}\right)\ln\frac{1+i\kappa}{1-i\kappa}.$$

$$\Pi_{22}(\kappa) = \frac{1}{2\kappa^4} + \frac{4}{3\kappa^2} - \frac{1}{i\kappa^3}\left(1+\frac{1}{\kappa^2}\right)\ln\frac{1+i\kappa}{1-i\kappa}. \tag{34}$$

В детерминанты (см. (23) и (24)) входила функция $\Pi_{12}(\kappa)$. Из-за существования соотношения

$$\Pi_{12}(\kappa) = 2ik\Pi_{02}(\kappa)$$

она не входит в ответ. По этой же причине детерминанты (числитель и знаменатель в формуле (32)) — линейные функции $\Pi_{02}(\kappa)$ и $\Pi_{22}(\kappa)$.

Подставив выражение (32) в формулу (21) или ее следствия, получим выражение для импеданса, справедливое при вероятности $W(\theta)$, учитывающей s-, p- и d-рассеяние. Оно, естественно, отличается от формулы, описывающей лишь s- и p-рассеяние (см. (2) и (21)). Особенно отчетливо проявляется отличие, если функции Π_{02} и Π_{22} выразить через компоненту Фурье оператора проводимости $\overline{K}(\kappa)$:

$$\Pi_{02}(\kappa) = \frac{4}{3}\overline{K}(\kappa); \quad \Pi_{22}(\kappa) = \frac{4}{3\kappa^2}\left(1-\overline{K}(\kappa)\right). \tag{35}$$

Положив α_2 (или β_2) $= 0$, возвращаемся к первой из формул (22), а значит, и ко всем следствиям, проанализированным в [1].

5. Исследуя выражения (21), (32) и (35) с функцией $\overline{K}(\kappa)$, выписанной среди формул (22), нетрудно убедиться, что при низких частотах (в пределе $l/\delta \to 0$) мы получаем обычное значение импеданса:

$$\zeta_{\mathrm{norm}} = \sqrt{\omega/4\pi\sigma_{\mathrm{tr}}}, \tag{36}$$

где

$$\sigma_{tr} = \sigma \frac{l_{tr}}{l}, \quad l_{tr}^{-1} = \int\int W(\theta)\left(1 - \cos\theta\right) dO . \tag{37}$$

В данном случае

$$\frac{1}{l_{tr}} = \frac{1}{l}\left(1 - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{3}\right); \quad \frac{1}{l} = 4\pi W_0 . \tag{38}$$

Уточнение классических формул (36)–(38) должно учитывать относительную поправку $\sim l^2/\delta^2$. Исходной является формула (30) для величины $I(z)$, которая связана с импедансом выражением (29). Первое слагаемое в (30) при $z = 0$ легко вычисляется с указанной точностью:

$$-\frac{i}{k_0 - i(l^2/\delta^2)\,\mu'(k_0)} = \frac{1+i}{2\sqrt{\mu(0)}}\frac{\delta}{l}\left(1 + i\frac{l^2}{\delta^2}\frac{\mu''(0)}{2}\right),$$

где функция $\mu(k)$ определяется равенством (23). Второе слагаемое в (30) имеет порядок малости l^2/δ^2, что позволяет его опустить. Таким образом,

$$\zeta_{spec} = \frac{1+i}{2}\frac{\omega\delta}{c}\frac{1}{\sqrt{\mu(0)}}\left(1 + i\frac{l^2}{\delta^2}\frac{\mu''(0)}{2}\right). \tag{39}$$

$$l \ll \delta .$$

Применим эту общую формулу к случаю, когда вероятность $W(\theta)$ имеет специальный вид (31), а функция $\mu(k)$ задается равенством (32). Для вычисления $\mu(0)$ и $\mu''(0)$ удобно воспользоваться интегральным представлением функций $\Pi_{02}(k)$ и $\Pi_{22}(k)$:

$$\Pi_{02}(k) = 2\int_0^1 \left(1 - t^2\right)\frac{dt}{1 + \kappa^2 t^2}; \qquad \Pi_{22}(k) = 2\int_0^1 \left(1 - t^2\right)\frac{t^2 dt}{1 + \kappa^2 t^2} \tag{40}$$

(см. (25)). Элементарный расчет дает

$$\zeta_{spec} = \frac{1-i}{2}\sqrt{\omega/2\pi\sigma_{tr}}\left(1 - \frac{1}{5}i\frac{l_{tr}^2}{\delta^2}\frac{1+\alpha_2/3}{1+\alpha_2/5}\right). \tag{41}$$

Обратим внимание: в поправочный член параметр α_2 входит не только в l_{tr}. Согласно формуле (32) из [1], параметр α_1 входит только в l_{tr}.

6. Для вычисления импеданса ζ в случае предельно аномального скин-эффекта ($l \gg \delta$) надо знать асимптотику функции $\mu = \mu(\kappa)$ при $k \gg 1$. Используя формулы (32)–(34) и (41), имеем

$$\mu(k) \approx \frac{3\pi}{4\kappa}\left[1 + \frac{1}{k}\left(\frac{\alpha_1\pi}{4(1+\alpha_2/3)} - \frac{4}{\pi} + \frac{8}{9\pi}\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2/3}\right)\right], \quad k > 0 . \tag{42}$$

Отсюда и из формулы (21) получаем обобщение формулы (33) из [1]*:

$$\zeta_{spec} \approx \zeta_{an}^{Q=1}\left[1 + A(\alpha_1, \alpha_2)\left(\delta^2/2l^2\right)^{1/3}\right], \tag{43}$$

$$A(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{8}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/3}\left(\sqrt{3} + i\right)\left[\frac{4}{\pi} - \frac{\alpha_1\pi}{4(1+\alpha_2/3)} - \frac{8}{9\pi}\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2/3}\right].$$

При получении формулы (43) удобно интеграл (21) преобразовать в интеграл по полуоси $\kappa > 0$, используя четность подынтегральной функции.

7. Несколько заключительных замечаний. Прежде всего нужно отметить, что мы считаем основным результатом этой работы не формулы (41) и (43) — аналитические выражения, содержащие небольшие поправки к хорошо известным предельным формулам. Основной результат — формулы (21), (23)-(26), дающие возможность вычислить импеданс в случае практически произвольной функции $W = W(\theta)$ (см. (14) и (18)). Естественно, чем

* Пользуемся возможностью отметить, что в работе [1] в формуле (33) допущена опечатка. Для исправления множитель $(\delta^2/3l^2)$ надо возвести в степень 1/3.

больше слагаемых необходимо для задания функции $W = W(\theta)$, тем более громоздкими будут численные расчеты. Нам представляется, что выведенные формулы могут быть пригодны для дальнейшего анализа, основанного на специальных свойствах функции рассеяния $W = W(\theta)$. Мы надеемся вернуться к этому вопросу в дальнейшем.

Мы неоднократно отмечали [1,2], что приходное слагаемое в интеграле столкновения — причина корреляции между поверхностным и объемным рассеянием. Формулы, выведенные здесь (и в [1], конечно) демонстрируют этот факт. Один, как нам кажется, любопытный пример: при $l >> \delta$ и при зеркальном отражении электронов основная поправка зависит от структуры приходного слагаемого (см. [1, формула (33)] и формулу (43) настоящей работы). Согласно формуле (46) из [1], описывающей случай диффузного рассеяния при $l/\delta >> 1$, слагаемое, содержащее параметр α (оно является следствием учета приходного слагаемого), добавляется к логарифмически большому члену $\ln \lambda$ ($\lambda = (3\pi l^2/2\delta^2)^{1/3}$), т.е. его роль значительно менее существенна, чем при зеркальном отражении электронов границей.

И последнее: при $l >> \delta$ параметры, связанные с приходным слагаемым, входят только в поправочные слагаемые. По-видимому, если ограничиться только предельно аномальным скин-эффектом, то можно воспользоваться теорией возмущений, приняв за возмущение интегральный член в уравнении (17). Такой подход мы также надеемся использовать в дальнейшем.

Приложение I

Покажем, каким образом кинетическое уравнение (17) вместе с граничным условием (19) может быть превращено в эквивалентную систему интегральных уравнений на полуоси. Будем считать $E(z)$ известной функцией. В качестве первого шага формально решим уравнение (17), переписав его перед этим в виде

$$\cos\vartheta \frac{\partial\chi}{\partial z} + \frac{1}{l} = S(z, \vartheta) ,$$

где (см. (17), (18))

$$S(z, \vartheta) = E(z) \sin\vartheta + \int_0^{\pi} \sin\vartheta' d\vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi' W(\theta)\, \chi(z, \theta') \cos\varphi' . \qquad (\text{П}.1)$$

Получим

$$\chi(z, \vartheta) = \begin{cases} \chi(0, \vartheta) \exp\left(-\dfrac{z}{l\cos\vartheta}\right) + \displaystyle\int_0^z \exp\left(\frac{\xi - z}{l\cos\vartheta}\right) \frac{S(\xi, \vartheta)}{\cos\vartheta} d\xi ; & 0 \le \vartheta \le \pi/2 ; \\ -\displaystyle\int_z^{\infty} \exp\left(\frac{\xi - z}{l\cos\vartheta}\right) \frac{S(\xi, \vartheta)}{\cos\vartheta} d\xi ; & \pi/2 \le \vartheta \le \pi . \end{cases} \qquad (\text{П}.2)$$

Слагаемое $\chi(0, \vartheta) \exp(-z/l\cos\vartheta)$, согласно граничному условию (13), равно

$$\chi(0, \vartheta) \exp\left(-\frac{z}{l\cos\vartheta}\right) = -\int_{\pi/2}^{\pi} \sin\vartheta' d\vartheta' Q(\vartheta, \vartheta') \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{\xi}{l\cos\vartheta'} - \frac{z}{l\cos\vartheta}\right) \frac{S(\xi, \vartheta')}{\cos\vartheta'} d\xi .$$

Рассмотрим более подробно структуру функции $S(z, \vartheta)$. Пользуясь связью (18) между θ и $\vartheta, \vartheta', \varphi$, напишем

$$W(\theta) = W_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos\varphi\right)^k\right] =$$

$$= W_0 \left[1 + \sum_{p+q \le n} \alpha_{p+q} C_{p+q}^q \cos^p\vartheta \cos^p\vartheta' \sin^q\vartheta \sin^q\vartheta' \cos^q\varphi\right],$$

C_p^q — биномиальные коэффициенты.

Подставляя в (П. 1), получаем

$$S(z, \vartheta) = E(z) \sin\vartheta + W_0 \sum_{p+q\le n}{}' A_{p,q} \cos^p\vartheta \sin^q\vartheta\, j_{pq}(z)\,, \tag{П.3}$$

где введены в рассмотрение новые неизвестные функции $j_{pq}(z)$:

$$j_{pq}(z) \equiv \int_0^\pi \chi(z, \vartheta'') \cos^p\vartheta' \sin^{q+1}\vartheta'\, d\vartheta' \tag{П.4}$$

и коэффициенты

$$A_{p,q} = \alpha_{p+q} C_{p+q}^q B_q\,; \quad B_q \equiv \int_0^{2\pi} \cos^{q+1}\varphi\, d\varphi = \begin{cases} 0, & q \text{ — четное}\,, \\ \dfrac{\pi}{2q} C_{q+1}^{(q+1)/2}, & q \text{ — нечетное}\,. \end{cases}$$

Заметим, что в сумме (П.3) индекс q пробегает только нечетные значения, поскольку $B_q = 0$, если q — четное. Штрих над знаком суммы напоминает об этом.

Теперь можно получить систему интегральных уравнений, определяющих все функции $j_{pq}(z)$ с нечетным q (функции $j_{pq}(z)$ с четным q нам не нужны). Для этого в определении (П.4) функции $j_{pq}(z)$ исключим функцию $\chi(z, \vartheta)$ с помощью равенства (П.2), так что $j_{pq}(z)$ представится интегралом, зависящим от $S(\xi, \vartheta)$. Второй и последний шаг состоит в замене под знаком этого интеграла функции $S(\xi, \vartheta)$ ее выражением (П.3) через функции $j_{p'q'}(\xi)$. В результате получим основную систему интегральных уравнений:

$$j_{pq}(z) - W_0 \sum_{p',q'}{}' A_{p'q'} \int_0^\infty j_{p'q'}(\xi) \left[T_{p+p',q+q'}(z-\xi) + T_{(pq)(p'q')}(z, \xi) \right] d\xi =$$

$$= \int_0^\infty E(\xi) \left[T_{p,q+1}(z-\xi) + T_{(pq)(01)}(z, \xi) \right] d\xi\,. \tag{П.5}$$

Введены обозначения

$$T_{pq}(z) \equiv \int_0^{\pi/2} \cos^{p-1}\vartheta \sin^{q+1}\vartheta \exp\left(-\frac{|z|}{l\cos\vartheta}\right) d\vartheta\, \mathrm{sgn}^{p+1} z\,,$$

$$T_{(pq)(p'q')}(z, \xi) \equiv -\int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_{\pi/2}^{\pi} d\vartheta' Q(\vartheta, \vartheta') \cos^p\vartheta \sin^{q+1}\vartheta \cos^{p'-1}\vartheta' \sin^{q'+1}\vartheta' \exp\left(\frac{\xi}{l\cos\vartheta'} - \frac{z}{l\cos\vartheta}\right). \tag{П.6}$$

Это и есть система N обыкновенных интегральных уравнений на полуоси, о которой сказано выше.

Приложение II

При переходе к граничным условиям типа Фукса эти уравнения остаются в силе, однако выражения для ядер $T_{(pq)(p'q')}(z, \xi)$ упрощаются:

$$T_{(pq)(p'q')}(z, \xi) = (-1)^{p'} QT_{p+p',q+q'}(z + \xi) .$$

Но и после этого упрощения систему уравнений можно решить либо при $k = 1$, а $Q = 0$ или 1, либо при произвольном значении k и $Q = 1$, т.е. в случае зеркального отражения.

В этом последнем случае, если доопределить функции $j_{pq}(z)$ и $E(z)$, положив при отрицательных z

$$j_{pq}(z) = (-1)^p j_{pq}(-z) , \quad E(z) = E(-z) , \quad z < 0 , \tag{П.7}$$

систему (П.5) можно привести к виду

$$j_{pq}(z) - W_0 \sum_{p',q}{}' A_{p'q'} \int_{-\infty}^{\infty} j_{p'q'}(\xi) T_{p+p',q+q'}(z - \xi) d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) T_{p,q+1}(z - \xi) d\xi , \quad -\infty < z < \infty . \tag{П.8}$$

Приложение III

Пусть отражение электронов от границы является зеркальноым. Система (П.8) решается стандартным образом путем перехода от функций $E(z)$ и $j_{pq}(z)$ к их фурье-образам $E(\kappa)$ и $J_{pq}(\kappa)$. Фурье-образы коэффициентов $T_{p+p',q+q'}(z)$ можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} T_{p+p',q+q'}(z) \exp(i\kappa z) dz = \Pi_{p+p',q+q'}(l\kappa) ,$$

где

$$\Pi_{p+p',q+q'}(\lambda) \equiv \begin{cases} 2 \int_0^1 (1 - t^2)^{(q+q')/2} \dfrac{t^{p+p'}}{1 + \lambda^2 t^2} dt , & p + p' \text{ — четное ;} \\ 2i\lambda \int_0^1 (1 - t^2)^{(q+q')/2} \dfrac{t^{p+p'+1}}{1 + \lambda^2 t^2} dt , & p + p' \text{ — нечетное .} \end{cases} \tag{П.9}$$

Система (П.8) становится алгебраической системой уравнений

$$J_{pq}(\kappa) - lW_0 \sum_{p',q'}{}' A_{p'q'} J_{p'q'}(\kappa) \Pi_{p+p',q+q'}(l\kappa) =$$

$$= E(k) \Pi_{p,q+1}(l\kappa) . \tag{П.10}$$

Решая эту систему относительно $J_{01}(\kappa)$, получаем:

$$J_{01}(\kappa) = \frac{D_{01}(l\kappa)}{D(l\kappa)} E(\kappa) , \tag{П.11}$$

$D(l\kappa)$ — определитель, элементы которого равны

$$D_{(pq)(p'q')}(l\kappa) = \delta_{p-p'} \delta_{q-q'} -$$

$$- lW_0 A_{p',q'} \Pi_{p+p',q+q'}(l\kappa) ;$$

$D_{01}(l\kappa)$ — определитель, который получается из определителя $D(l\kappa)$, если в нем заменить столбец с номером (0,1) столбцом $D_{(pq)} = \Pi_{p,q+1}(l\kappa)$.

Обозначим через $J(\kappa)$ фурье-образ плотности тока $j(z)$. Согласно определению $j_{pq}(z)$ (П.4), формула (15) означает, что плотность тока $j(z)$ равна

$$j(z) = \frac{3\sigma}{4l} j_{01}(z) .$$

Поэтому фурье-образ $J(\kappa)$ плотности тока равен

$$J(\kappa) = \frac{3\sigma}{4} \frac{D_{01}(l\kappa)}{D(l\kappa)} E(\kappa) . \tag{П.12}$$

Это — следствие кинетического уравнения и формулы (15), выражающей плотность тока через функцию $\chi(z, \vartheta)$.

Второе независимое соотношение между фурье-образами плотности тока и поля — следствие соответствующего уравнения Максвелла:

$$E''(z) + \frac{4\pi i\omega}{c^2} j(z) = 0 .$$

Производя преобразование Фурье и учитывая, что $E'(-0) = -E'(+0)$, имеем

$$-\kappa^2 E(\kappa) - 2E'(0) + \frac{4\pi i\omega}{c^2} J(\kappa) = 0 ,$$

$$E'(0) = \frac{i\omega}{c} H_y(0) . \qquad \text{(П.13)}$$

Исключая $J(\kappa)$ из соотношений (П.12) и (П.13), получаем

$$E(\kappa) = -\frac{2(i\omega/c)H_y(0)}{\kappa^2 - (3i/2\delta^2)(D_0(l\kappa)/D(l\kappa))} ;$$

$$\delta^2 \equiv \frac{c^2}{2\pi\sigma\omega} . \qquad \text{(П.14)}$$

Отсюда вытекает формула (23).

1. М. И. Каганов, Г. Я. Любарский, Е. Червонко, *ЖЭТФ* **101**, 1351 (1992).
2. М. И. Каганов, Г. Я. Любарский, Е. Червонко, *ЖЭТФ* **101**, 1563 (1992).
3. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
4. G. E. Reuter and H. Sondheimer, *Proc. Roy. Soc.* **A195**, 336 (1948).
5. G. Ya. Lubarskiy, *Cauchy Problem for a Class of Integrodifferential Equations on the Semiaxes with a Difference Kernel*, in: *Complex Variables* **27**, 287 (1955).
6. K. Fuchs, *Proc. Cambr. Phil. Soc.* **34**, 100 (1938).
7. L. Falkovsky, *Adv. Phys.* **32**, 753 (1983).

On the theory of skin-effect: inclusion of arriving term in the collision integral

M. I. Kaganov, G. Ya. Lyubarskiy, and A. G. Mitina

An algorithm is developed for a calculation of the surface impedance in normal isotropic metal that accounts for arriving term of a collision integral (the case of mirror reflection). The analytical expressions for a probability of scattering describing *s*-, *p*- and *d*-scattering are derived.