УДК 517.9

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ АВТОНОМНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ НЬЮТОНА – КАНТОРОВИЧА*

С. М. Чуйко, И. А. Бойчук, О. Е. Пирус

Славян. гос. пед. ун-т
Украина, 84112, Славянск Донецкой обл., ул. Батюка, 19

We find necessary and sufficient conditions for existence of solutions of an autonomous Noether boundary-valued problem for a system of ordinary second order differential equations in the critical case. For the construction of solutions of a nonlinear Noether boundary-valued problem in the critical case, we propose a scheme combining the Newton – Kantorovich method and the least squares technique. The effectiveness of the proposed method is demonstrated for the analysis of the periodic problem for a Lienard type equation.

Встановлено необхідні та достатні умови існування розв'язків автономної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку в критичному випадку. Для побудови розв'язків нелінійної нетерової крайової задачі у критичному випадку запропоновано комбіновану ітераційну схему, побудовану з використанням методу Ньютона – Канторовича і техніки найменших квадратів. Ефективність запропонованої техніки продемонстровано на прикладі аналізу періодичної задачі для рівняння типу Льєнара.

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о построении решений [1 – 3]

$$z(t,\varepsilon) : z(\cdot,\varepsilon) \in C^2[a,b(\varepsilon)], \quad z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad b(\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

автономной краевой задачи для системы уравнений второго порядка

$$z'' = Az + Bz' + f + \varepsilon Z(z,z',\varepsilon), \quad \ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon), z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{1}$$

Решения нетеровой $(m \neq n)$ задачи (1) ищем в малой окрестности решения

$$z_0(t) : z_0(\cdot) \in C^2[a,b^*], \quad b^* := b(0),$$

порождающей задачи

$$z_0'' = Az_0 + Bz_0' + f, \quad A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad f \in \mathbb{R}^n, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

Здесь $Z(z,z',\varepsilon)$ — нелинейная функция, непрерывно дифференцируемая по z и z' в окрестности решения порождающей задачи и непрерывно дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot,\varepsilon)$ — линейный и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелинейный векторный функционалы $\ell z(\cdot,\varepsilon),\ J(z(\cdot,\varepsilon),\ z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) : C[a,b(\varepsilon)] \to \mathbb{R}^m$, причем второй функционал

* Выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Германии (DFG; номер регистрации GZ:436UKR 13/103/0-1) и Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0109U000381).

непрерывно дифференцируем по z, z' и по малому параметру ε в окрестности решения порождающей задачи и на отрезке $[0, \varepsilon_0]$.

Задача (2) является частным случаем неавтономной нетеровой краевой задачи, исследованной в статье [4]. В критическом случае $(P_{Q^*} \neq 0)$ при условии

$$P_{Q^*} \{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} = 0$$

порождающая задача (2) имеет семейство решений [4]

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f; \alpha](t), \quad X_r(t) = X(t)P_{Q_r}, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$-матрица, $\operatorname{rank} Q = n_1$, $n - n_1 = r$, P_{Q^*} — $(m \times m)$-матрица-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$, $X(t)$ — фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (2); P_{Q_r} — $(n \times r)$-матрица, составленная из r линейно независимых столбцов $(n \times n)$-матрицы-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \to N(Q)$;

$$G[f; \alpha](t) = X(t)Q^+ \{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} + K[f](t)$$

— обобщенный оператор Грина задачи (2), Q^+ – псевдообратная матрица по Муру – Пенроузу [1], $K[f](t)$ — оператор Грина задачи Коши [4] для дифференциальной системы (2). Для упрощения выкладок предположим, что дифференциальная система (1) не содержит диссипативного члена Bz', либо его величина мала и слагаемое Bz' может быть отнесено к нелинейности. В этом случае дифференциальная система (2) не содержит диссипативного члена Bz_0', а оператор Грина задачи Коши принимает вид

$$K[f](t) = X(t) \int_a^t Y(s) f \, ds, \quad Y(t) := V^{-1}(t) \begin{pmatrix} O \\ I_n \end{pmatrix}.$$

Здесь $V(t)$ — нормальная фундаментальная матрица системы

$$V'(t) = \begin{pmatrix} O & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} V(t), \quad V(a) = I_{2n}.$$

В качестве фундаментальной матрицы $X(t)$ однородной части дифференциальной системы (2) используем блок матрицы $V(t)$:

$$V(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ X'(t) \end{pmatrix}.$$

В критическом случае задача (1) существенно отличается от аналогичных неавтономных краевых задач; в отличие от последних правый конец $b(\varepsilon)$ промежутка $[a, b(\varepsilon)]$ неизвестен. Выполняя в задаче (1) замену переменной [2, 3]

$$t = a + (\tau - a)(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)), \quad b(\varepsilon) = b^* + \varepsilon(b^* - a)\beta(\varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0], \quad \beta(0) = \beta^*,$$

приходим к задаче об отыскании решения $z(\tau, \varepsilon) \in C^2[a, b^*]$, $C[0, \varepsilon_0]$ системы уравнений

$$z'' = Az + f + \varepsilon \left[Z(z, z', \varepsilon) + \beta(\varepsilon)(2 + \varepsilon\beta(\varepsilon))(Az + f + \varepsilon Z(z, z', \varepsilon)) \right], \qquad (3)$$

удовлетворяющих краевому условию

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon \left[\tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon), z'(\cdot,\varepsilon), \varepsilon) + \beta(\varepsilon)(2+\varepsilon\beta(\varepsilon))(\alpha + \varepsilon \tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon), z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)) \right]. \qquad (4)$$

Здесь $\ell z(\cdot,\varepsilon)$ — линейный и $\tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелинейный векторные функционалы

$$\ell z(\cdot,\varepsilon), \quad \tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) : C[a,b^*] \to \mathbb{R}^m.$$

Решение задачи (3), (4) ищем в виде $z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau,c_r) + x(\tau,\varepsilon)$. Для нахождения возмущения $x(\tau,\varepsilon) : x(\cdot,\varepsilon) \in C^2[a,b^*]$, $x(\tau,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$ получаем задачу

$$\begin{aligned} x'' &= Ax + \varepsilon \left[Z(z_0 + x, z_0' + x', \varepsilon) + \beta(2+\varepsilon\beta)(Az + f + \varepsilon Z(z,z',\varepsilon)) \right], \\ \ell x(\cdot,\varepsilon) &= \varepsilon \Big[\tilde{J}(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon), z_0'(\cdot,c_r^*) + x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) + \\ &\quad + \beta(\varepsilon)(2+\varepsilon\beta(\varepsilon))(\alpha + \varepsilon\tilde{J}(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon), z_0'(\cdot,c_r^*) + x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)) \Big]. \end{aligned} \qquad (5)$$

Обозначая через $P_{Q_d^*}$ $(d \times m)$-мерную матрицу, составленную из $d := m - n$ линейно независимых строк матрицы-ортопроектора P_{Q^*},

$$\varphi_0(c^*) = 2\alpha\beta^* + J(z_0(\cdot,c_r^*), z_0'(\cdot,c_r^*), 0),$$

$$f_0(s,c^*) = 2\beta^* \left[Az_0(s,c_r^*) + f \right] + Z(z_0(s,c_r^*), z_0'(s,c_r^*), 0)$$

аналогично [2, 3], приходим к необходимому условию разрешимости задачи (5).

Лемма. *Если краевая задача (1) в критическом случае* $(P_{Q^*} \neq 0)$ *имеет решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t,0) = z_0(t,c_r^*)$, *то вектор* $(c_r^*,\beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}$ *удовлетворяет уравнению [2]*

$$F(c_r^*,\beta^*) = P_{Q_d^*}\{\varphi_0(c^*) - \ell K[f_0(s,c^*)](\cdot)\} = 0. \qquad (6)$$

Предположим, что уравнение (6) имеет действительный корень $(c_r^*,\beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}$.

2. Достаточное условие существования решения. Для нахождения решения задачи (3), (4) разлагаем функцию $Z(z,z',\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $z_0(\tau,c_r^*)$, его производной $z_0'(\tau,c_r^*)$ и точки $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} Z(z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon), z_0'(\tau,c_r^*) + x'(\tau,\varepsilon),\varepsilon) &= Z(z_0(\tau,c_r^*), z_0'(\tau,c_r^*),0) + \\ &+ A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon) + A_2(\tau)x'(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_3(z_0(\tau,c_r^*)) + \\ &+ R_1(z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon), z_0'(\tau,c_r^*) + x'(\tau,\varepsilon),\varepsilon), \end{aligned}$$

где

$$A_1(\tau) = Z_z'(z_0(\tau,c_r^*), z_0'(\tau,c_r^*),0), \quad A_2(\tau) = Z_{z'}'(z_0(\tau,c_r^*), z_0'(\tau,c_r^*),0),$$

$$A_3(\tau) = Z'_\varepsilon(z_0(\tau, c_r^*), z'_0(\tau, c_r^*), 0).$$

Аналогично, используя непрерывную дифференцируемость (в смысле Фреше) по первым двум аргументам функционала $J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ и непрерывную дифференцируемость (в смысле Фреше) по третьему аргументу, выделяем линейные части этого функционала [5]

$$\ell_1 x(\cdot, \varepsilon) := \tilde{J}'_z(z_0(\cdot, c_r^*), z'_0(\cdot, c_r^*), 0), \quad \ell_2 x'(\cdot, \varepsilon) := \tilde{J}'_{z'}(z_0(\cdot, c_r^*), z'_0(\cdot, c_r^*), 0),$$

$$\varepsilon \cdot \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*)) := \varepsilon \cdot \tilde{J}'_\varepsilon(z_0(\cdot, c_r^*), z'_0(\cdot, c_r^*), 0)$$

в окрестности точек $x = 0$, $x' = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$\tilde{J}(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = J(z_0(\cdot, c_r^*), z'_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \ell_2 x'(\cdot, \varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon).$$

С учетом разложений нелинейностей задача (5) принимает вид

$$x'' = Ax + \varepsilon \{\beta(\varepsilon)(2 + \varepsilon\beta(\varepsilon))(Az + f) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)(2 + \varepsilon\beta(\varepsilon))) \times$$
$$\times [Z(z_0(\tau, c_r^*), z'_0(\tau, c_r^*), 0) + A_1(\tau)x(\tau, \varepsilon) + A_2(\tau)x'(\tau, \varepsilon) + \varepsilon A_3(z_0(\tau, c_r^*)) +$$
$$+ R_1(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), z'_0(\tau, c_r^*) + x'(\tau, \varepsilon), \varepsilon)]\},$$
$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon\alpha\beta(\varepsilon)(2 + \varepsilon\beta(\varepsilon)) + \varepsilon(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)(2 + \varepsilon\beta(\varepsilon))) \times$$
$$\times \left[J(z_0(\cdot, c_r^*), z'_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \ell_2 x'(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*)) +\right.$$
$$\left.+ J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\right].$$

Введем $(d \times m)$-матрицу

$$B_\beta := F'_\beta(c_r^*, \beta^*) = 2P_{Q_d^*} \{\alpha - \ell K[Az_0(\tau, c_r^*) + f](\cdot)\}.$$

Для нахождения функции $\beta(\varepsilon)$ приходим к уравнению

$$B_\beta \cdot \beta(\varepsilon) = -P_{Q_d^*} \left\{\varepsilon\alpha\beta^2(\varepsilon) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)(2 + \varepsilon\beta(\varepsilon))) \times\right.$$
$$\times [J(z_0(\cdot, c_r^*), z'_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \ell_2 x'(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*)) +$$
$$+ J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), z'_0(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\big] - \ell K \{2\beta A x(\tau, \varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon\beta^2[Az(\tau, \varepsilon) + f] + (1 + \varepsilon\beta(2 + \varepsilon\beta))[Z(z_0(\tau, c_r^*), z'_0(\tau, c_r^*), 0) + A_1(\tau)x(\tau, \varepsilon) +$$
$$\left.+ A_2(\tau)x'(\tau, \varepsilon) + \varepsilon A_3(z_0(\tau, c_r^*)) + R_1(z(\tau, \varepsilon), z'(\tau, \varepsilon), \varepsilon)]\}(\cdot)\right\}.$$

Пусть $P_{B_\beta^*}$ — матрица-ортопроектор: $\mathbb{R}^d \to N(B_\beta^*)$. При условии $P_{B_\beta^*}P_{Q_d^*} = 0$ по меньшей мере одно из решений задачи (3), (4) определяет операторная система

$$\begin{aligned}
z(\tau,\varepsilon) = {} & X_r(\tau)(c_r^* + c_r(\varepsilon)) + \varepsilon G\left\{\beta(\varepsilon)(2+\varepsilon\beta(\varepsilon))(Az+f) + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\,(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)))\times\right.\\
& \times\left[Z(z_0(\tau,c_r^*), z_0'(\tau,c_r^*),0) + A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon) + A_2(\tau)x'(\tau,\varepsilon) +\right.\\
& \left.+\ \varepsilon A_3(z_0(\tau,c_r^*)) + R_1(z(\tau,\varepsilon), z'(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\right], \quad \alpha\beta(\varepsilon)(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)) +\\
& + (1+\varepsilon\beta(2+\varepsilon\beta))[J(z_0(\cdot,c_r^*), z_0'(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) +\\
& \left.+\ \ell_2 x'(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon), z_0'(\cdot,c_r^*) + x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)]\right\}(\tau),\\
\beta(\varepsilon) = {} & -B_\beta^+ P_{Q_d^*}\left\{\varepsilon\alpha\beta^2(\varepsilon) + (1+\varepsilon\beta(2+\varepsilon\beta))\left[J(z_0(\cdot,c_r^*), z_0'(\cdot,c_r^*),0)\ +\right.\right.\\
& \left.+\ \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \ell_2 x'(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z(\cdot,\varepsilon), z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right] -\\
& - \ell K\left\{2\beta(\varepsilon)Ax(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\beta^2(\varepsilon)[Az(\tau,\varepsilon)+f] +\right.\\
& + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon)(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)))\left[Z(z_0(\tau,c_r^*), z_0'(\tau,c_r^*),0) + A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon) +\right.\\
& \left.\left.\left.+\ \ A_2(\tau)x'(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_3(z_0(\tau,c_r^*)) + R_1(z(\tau,\varepsilon), z'(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\right]\right\}(\cdot)\right\}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Для нахождения этого решения в статье [6] предложена итерационная схема с линейной сходимостью, построенная по методу наименьших квадратов. Целью данной статьи является построение итерационной техники по методу Ньютона с квадратичной сходимостью. Обозначим

$$\begin{aligned}
\psi(\beta(\varepsilon), z(\tau,\varepsilon)) = {} & -B_\beta^+ P_{Q_d^*}\left\{\varepsilon\alpha\beta^2(\varepsilon) + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon)(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)))\left[J(z_0(\cdot,c_r^*), z_0'(\cdot,c_r^*),0)\ +\right.\right.\\
& + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \ell_2 x'(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) +\\
& \left.+\ x(\cdot,\varepsilon), z_0'(\cdot,c_r^*) + x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right] - \ell K\left\{2\beta Ax(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\beta^2[Az(\tau,\varepsilon)+f] +\right.\\
& + (1+\varepsilon\beta(2+\varepsilon\beta))\left[Z(z_0(\tau,c_r^*), z_0'(\tau,c_r^*),0) + A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon) + A_2(\tau)x'(\tau,\varepsilon) +\right.\\
& \left.\left.\left.+\ \ \varepsilon A_3(z_0(\tau,c_r^*)) + R_1(z(\tau,\varepsilon), z'(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\right]\right\}(\cdot)\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(z(\tau,\varepsilon)\beta(\varepsilon)) = {} & X_r(\tau)(c_r^* + c_r(\varepsilon)) + \varepsilon G\left\{\beta(\varepsilon)(2+\varepsilon\beta(\varepsilon))(Az+f) +\right.\\
& + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon)(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)))\left[Z(z_0(s,c_r^*), z_0'(s,c_r^*),0) + A_1(s)x(s,\varepsilon) +\right.\\
& \left.+ A_2(s)x'(s,\varepsilon) + \varepsilon A_3(z_0(s,c_r^*)) + R_1(z(s,\varepsilon), z'(s,\varepsilon),\varepsilon)\right],\\
& \alpha\beta(\varepsilon)(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)) + (1+\varepsilon\alpha\beta(2+\varepsilon\beta))\left[J(z_0(\cdot,c_r^*), z_0'(\cdot,c_r^*),0) +\right.\\
& + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \ell_2 x'(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) +\\
& \left.\left. + x(\cdot,\varepsilon), z_0'(\cdot,c_r^*) + x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right]\right\}(\tau).
\end{aligned}$$

Для построения решения второго уравнения системы (7) введем оператор

$$\Psi(\beta(\varepsilon), z(\tau, \varepsilon))(\varepsilon) := \beta(\varepsilon) + \psi\{\beta(\varepsilon), z(\tau, \varepsilon)\}(\varepsilon) : C[0, \varepsilon_0] \to C[0, \varepsilon_0].$$

Предположим, что для вектор-функций $x(\tau, \varepsilon) \in C^2[a, b]$, $C[0, \varepsilon_0]$, $\|x(\tau, \varepsilon)\| \leq q$ имеют место неравенства

$$\|\Psi(\beta^*, g(z_0(s, c_r^*), \beta^*))(\varepsilon)\| \leq \gamma_1,$$

$$\left\| \left[\Psi'_\beta(\beta^*, g(z_0(s, c_r^*), \beta^*))\right]^{-1}(\varepsilon)\right\| \leq \gamma_2,$$

$$\left\|\Psi''_{\beta^2}(\beta(\varepsilon), g(z(s, \varepsilon), \beta(\varepsilon)))(\varepsilon)\right\| \leq \gamma_3.$$

Согласно теореме Ньютона – Канторовича [5, с. 680, 682] при условиях $P_{\mathfrak{B}_0^*} P_{Q_d^*} = 0$ и $2\gamma_1\gamma_2\gamma_3 < 1$ для построения по меньшей мере одного из решений операторной системы (7) применима итерационная схема

$$z_{k+1}(\tau, \varepsilon) = g(z_k(\tau, \varepsilon), \beta_k(\varepsilon))(\tau), \quad z_0(\tau, \varepsilon) := z_0(\tau, c_r^*), \quad \beta_0(\varepsilon) := \beta^*, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta_k(\varepsilon) - \left[1 - \frac{\partial\Psi(\beta_k(\varepsilon), z_{k+1}(\tau, \varepsilon))}{\partial\beta}\right]^{-1} [\beta_k(\varepsilon) - \Psi(\beta_k(\varepsilon), z_{k+1}(\tau, \varepsilon))]. \tag{8}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *В критическом случае* ($P_{Q^*} \neq 0$) *для корня* $(c_r^*, \beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}$ *уравнения* $F(c^*) = 0$ *при условии* $P_{B_\beta^*} P_{Q_d^*} = 0$ *задача (1) имеет по меньшей мере одно решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z_0(\tau, c_r^*)$. *Для построения решения задачи (1) в случае* $2\gamma_1\gamma_2\gamma_3 < 1$ *применима итерационная схема (8).*

3. Периодическая задача для уравнения Льенара. Исследуем далее задачу о нахождении решения автономной периодической краевой задачи

$$y'' + y = \varepsilon \cdot Y(y, \varepsilon) \cdot y', \quad y(0, \varepsilon) - y(T_1(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \quad y'(0, \varepsilon) - y'(T_1(\varepsilon), \varepsilon) = 0. \tag{9}$$

Решение задачи (9) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$y_0'' + y_0 = 0, \quad y_0(0) - y_0(2\pi) = 0, \quad y_0'(0) - y_0'(2\pi) = 0.$$

Здесь $Y(y, \varepsilon)$ — нелинейная скалярная функция, непрерывно дифференцируемая по y в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно дифференцируемая по ε на отрезке $[0, \varepsilon_0]$. Любое решение $z(t, \varepsilon)$ задачи (9) существует наряду с серией решений $z(t + h, \varepsilon)$. Зафиксируем начало отсчета независимой переменной таким образом, чтобы решение порождающей задачи стало однопараметрическим, например, $y_0(t) = \hat{c} \cdot \cos t$, $\hat{c} \in \mathbb{R}^1$. Для задачи (9) имеет место критический случай. Для произвольной функции $f(t) \in C[0, 2\pi]$ периодическая задача

$$y_0'' + y_0 = f(t), \quad y_0(0) - y_0(2\pi) = 0, \quad y_0'(0) - y_0'(2\pi) = 0$$

разрешима тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^{2\pi} \left[\begin{array}{c} \cos s \\ -\sin s \end{array} \right] f(s)\, ds = 0,$$

и при соответствующей фиксации начала отсчета независимой переменной имеет общее решение вида

$$y_0(t, \hat{c}) = \hat{c} \cdot \cos t + g[f(s)]\,(t), \quad \hat{c} \in \mathbb{R}^1; \quad g[f(s)](t) := \int\limits_0^t \sin(t-s) f(s)\, ds.$$

Замена переменной $t = \tau(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))$ приводит к задаче о нахождении 2π-периодических решений уравнения

$$y''(\tau, \varepsilon) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))^2\, y(\tau, \varepsilon) = \varepsilon(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))\, Y(y(\tau, \varepsilon), \varepsilon)\, y'(\tau, \varepsilon). \tag{10}$$

Условие разрешимости периодической задачи для уравнения (10)

$$\int\limits_0^{2\pi} \left(\begin{array}{c} \cos s \\ -\sin s \end{array} \right) \big[(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))\, Y(y(s, \varepsilon), \varepsilon)\, y'(s, \varepsilon) - \beta(\varepsilon)(2 + \varepsilon\beta(\varepsilon))\, y(s, \varepsilon)\big]\, ds = 0$$

приводит к уравнению для порождающих амплитуд

$$F(\hat{c}, \beta) := \int\limits_0^{2\pi} \left(\begin{array}{c} \cos s \\ -\sin s \end{array} \right) (Y(y_0(s, \hat{c}), 0)\, y_0'(s, \hat{c}) - 2\beta\, y_0(s, \hat{c}))\, ds = 0.$$

Предположим, что уравнение для порождающих амплитуд имеет простой $(\det B_0 \neq 0)$ действительный корень $(\hat{c}^*, \beta^*) \in \mathbb{R}^2$; здесь

$$B_0 := \left. \frac{\partial F(\hat{c}, \beta)}{\partial(\hat{c}, \beta)} \right|_{\substack{\hat{c}=\hat{c}^* \\ \beta=\beta^*}}.$$

В этом случае периодическая задача (9) имеет единственное решение [2, 3], следовательно, в достаточно малой окрестности точек $y(t, \varepsilon) = y_0(t, \hat{c}^*)$ и $\varepsilon = 0$ уравнение

$$\Omega(y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\, \beta(\varepsilon) = \omega(y(\cdot, \varepsilon), \beta(\varepsilon))$$

имеет единственное решение

$$\beta(\varepsilon) = \Omega^+(y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\, \omega(y(\cdot, \varepsilon)\beta(\varepsilon)).$$

Здесь

$$\Omega(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) := \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{pmatrix} [\varepsilon Y(y(s,\varepsilon),\varepsilon)\, y'(s,\varepsilon) - 2y(s,\varepsilon)]\, ds,$$

$$\omega(y(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon)) := \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{pmatrix} [Y(y(s,\varepsilon),\varepsilon)\, y'(s,\varepsilon) - \varepsilon\beta^2(\varepsilon) y(s,\varepsilon)]\, ds.$$

Таким образом, задача о нахождении 2π-периодических решений уравнения (10) приводит к операторной системе

$$y(\tau,\varepsilon) = \hat{c}^* \cos\tau + \varepsilon g(y(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon))(\tau), \quad \beta(\varepsilon) = \Omega^+(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\, \omega(y(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon)),$$

где

$$g(y(s,\varepsilon),\beta(\varepsilon))(\tau) := g[(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))Y(y(s,\varepsilon),\varepsilon)\, y'(s,\varepsilon) - \beta(\varepsilon)(2+\varepsilon\beta(\varepsilon))y(s,\varepsilon)](\tau) + c(\varepsilon)\cos\tau.$$

Введем оператор

$$\Phi(\beta(\varepsilon), y(s,\varepsilon))(\varepsilon) := \beta(\varepsilon) - \Omega^+(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\omega(y(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon)) : C[0,\varepsilon_0] \to C[0,\varepsilon_0].$$

Предположим, что для функций $x(\tau,\varepsilon) \in C^2[0,T]$, $C[0,\varepsilon_0]$, $\|x(\tau,\varepsilon)\| \leq q$ имеют место неравенства

$$\|\Phi(\beta^*, g(y_0(s,\hat{c}^*),\beta^*))(\varepsilon)\| \leq \mu_1,$$

$$\left\| \left[\Phi'_\beta(\beta^*, g(y_0(s,\hat{c}^*),\beta^*))\right]^{-1}(\varepsilon) \right\| \leq \mu_2, \quad \left\| \Phi''_{\beta^2}(\beta(\varepsilon), g(y(s,\varepsilon),\beta(\varepsilon)))(\varepsilon) \right\| \leq \mu_3.$$

Согласно теореме Ньютона–Канторовича [5, с. 680, 682] при условиях $\det B_0 \neq 0$ и $2\mu_1\mu_2\mu_3 < 1$ для построения решения периодической задачи для уравнения Льенара применима итерационная схема

$$y_{k+1}(\tau,\varepsilon) = g(y_k(s,\varepsilon),\beta_k(\varepsilon))(\tau), \quad y_0(\tau,\varepsilon) := y_0(\tau,\hat{c}^*), \quad \beta_0(\varepsilon) := \beta^*, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta_k(\varepsilon) - \left[1 - \frac{\partial\Phi(\beta_k(\varepsilon), y_{k+1}(s,\varepsilon))}{\partial\beta}\right]^{-1} [\beta_k(\varepsilon) - \Phi(\beta_k(\varepsilon), y_{k+1}(s,\varepsilon))]\,.$$

На практике для построения решения периодической задачи для уравнения Льенара более эффективна гибридная итерационная схема, сочетающая достоинства метода Ньютона и техники наименьших квадратов. Положим $Y'_\varepsilon(y_0(\tau,\hat{c}^*),\varepsilon) \equiv 0$. Разложим функцию $Y(y,\varepsilon)$ в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$Y(y_0(\tau,\hat{c}^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon) = Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0) + \mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*))x(\tau,\varepsilon) + \mathcal{R}(y_0(\tau,\hat{c}^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon),$$

где $\mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*)) := Y'_y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)$. Первое приближение $y_1(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_1(\tau,\varepsilon)$ к решению 2π-периодической задачи для уравнения (10) ищем как 2π-периодическое решение уравнения

$$x''_1(\tau,\varepsilon) + x_1(\tau,\varepsilon) = \varepsilon(1+\varepsilon\beta^*)\left\{Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)\,[y'_0(\tau,\hat{c}^*) + x'_1(\tau,\varepsilon)] + \right.$$
$$\left. + \mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*))y'_0(\tau,\hat{c}^*)x_1(\tau,\varepsilon)\right\} -$$
$$- \left[y''_0(\tau,\hat{c}^*) + (1+\varepsilon\beta^*)^2\, y_0(\tau,\hat{c}^*)\right] - \varepsilon\beta^*(2+\varepsilon\beta^*)x_1(\tau,\varepsilon). \qquad (11)$$

Пусть
$$\left\{\varphi^{(j)}(t)\right\}_{j=0}^{\infty} \in C^2[0,2\pi]$$

— система линейно независимых 2π-периодических скалярных функций. Приближение к решению 2π-периодической задачи для уравнения (11) ищем в виде

$$x_1(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) = \varphi_1(\tau)c_1(\varepsilon), \quad \varphi_1(\tau) := \left[\varphi_1^{(1)}(\tau)\varphi_1^{(2)}(\tau)\ldots\varphi_1^{(\mu_1)}(\tau)\right], \quad c_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_1}.$$

В случае
$$\det\left[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))\right] \neq 0, \quad \Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)) := \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\mathcal{F}_1(\tau,\varepsilon)\,d\tau$$

находим вектор

$$c_1(\varepsilon) = -\left[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot\varepsilon))\right]^{-1}\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\left\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta^*)Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)\,y'_0(\tau,\hat{c}^*) - \right.$$
$$\left. - \left[y''_0(\tau,\hat{c}^*) + (1+\varepsilon\beta^*)^2\,y_0(\tau,\hat{c}^*)\right]\right\}\,d\tau.$$

Здесь

$$\mathcal{F}_1(\tau,\varepsilon) = (1+\varepsilon\beta^*)\,\left[\varepsilon\mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*))y'_0(\tau,\hat{c}^*) - (1+\varepsilon\beta^*)\right]\varphi_1(\tau) +$$
$$+ \varepsilon(1+\varepsilon\beta^*)Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)\varphi'_1(\tau) - \varphi''_1(\tau).$$

При условии $c_1(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0]$, $2\,\mu_1(\varepsilon_0)\,\mu_2(\varepsilon_0)\,\mu_3(\varepsilon_0) < 1$ первое приближение $\beta_1(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0]$ к функции $\beta(\varepsilon)$ определим как

$$\beta_1(\varepsilon) = \beta^* - \left[1 - \frac{\partial\Phi(\beta^*, y_1(s,\varepsilon))(\varepsilon)}{\partial\beta}\right]^{-1}\,\left[\beta^* - \Phi(\beta^*, y_1(s,\varepsilon))(\varepsilon)\right].$$

Продолжая рассуждения, предположим, что найдено приближение

$$x_k(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\tau,\varepsilon), \quad \xi_k(\tau,\varepsilon) = \varphi_k(\tau)\,c_k(\varepsilon), \quad c_k(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_k}, \quad k = 1,2,\ldots,$$

к решению 2π-периодической задачи для уравнения (10) и приближение $\beta_k(\varepsilon)$ к функции $\beta(\varepsilon)$. Следующее приближение ищем в виде

$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon), \quad \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varphi_{k+1}(\tau) c_{k+1}(\varepsilon), \quad c_{k+1}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_{k+1}}.$$

Предположим, что найденное приближение $y_k(\tau,\varepsilon) \approx y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_k(\tau,\varepsilon)$ принадлежит области определения функции $Y(y,\varepsilon)$. Разлагаем функцию $Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ в окрестности точек $\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$Y(y_k(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon) = Y(y_k(\tau,\varepsilon),0) + \mathcal{A}_1(y_k(\tau,\varepsilon))\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \mathcal{R}(y_k(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon),$$

где $\mathcal{A}_1(y_k(\tau,\varepsilon)) := Y'_y(y_k(\tau,\varepsilon),0)$. При условии

$$\det\,[\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon))] \neq 0, \quad \Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)) = \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\,\mathcal{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon)\,d\tau$$

находим вектор

$$c_{k+1}(\varepsilon) = -\,[\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon))]^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\times$$

$$\times \left\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))\,Y(y_k(\tau,\varepsilon),0)\,y'_k(\tau,\varepsilon) - (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2\,y_k(\tau,\varepsilon) - y''_k(\tau,\varepsilon)\right\}\,d\tau.$$

Здесь

$$\mathcal{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon) = (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))\,\left[\varepsilon\mathcal{A}_1(y_k(\tau,\varepsilon))y'_k(\tau,\varepsilon) - (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))\right]\varphi_{k+1}(\tau) +$$

$$+\,\varepsilon(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))Y(y_k(\tau,\varepsilon),0)\varphi'_{k+1}(\tau) - \varphi''_{k+1}(\tau).$$

В случае $c_{k+1}(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0]$, $2\,\mu_1(\varepsilon_0)\,\mu_2(\varepsilon_0)\,\mu_3(\varepsilon_0) < 1$ приближение $\beta_{k+1}(\varepsilon)$ к функции $\beta(\varepsilon)$ определим как

$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta_k(\varepsilon) - \left[1 - \frac{\partial\Phi(\beta_k(\varepsilon), y_{k+1}(s,\varepsilon))}{\partial\beta}\right]^{-1}\,[\beta_k(\varepsilon) - \Phi(\beta_k(\varepsilon), y_{k+1}(s,\varepsilon))]\,.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Следствие. *Для каждого простого* $(\det B_0 \neq 0)$ *корня* $(\hat{c}^*,\beta^*) \in \mathbb{R}^2$ *уравнения для порождающих амплитуд задача (10) имеет единственное* 2π*-периодическое решение*

$$y(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x(\tau,\varepsilon), \quad x(\cdot,\varepsilon) \in C^2[0,T],$$

$$x(\tau,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad \|x(\tau,\varepsilon)\| \leq q,$$

при $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $y_0(\tau,\hat{c}^*)$. *При условии*

$$2\,\mu_1(\varepsilon_0)\,\mu_2(\varepsilon_0)\,\mu_3(\varepsilon_0) < 1, \quad c_k(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0], \quad \det\,[\Gamma(\mathcal{F}_k(\cdot,\varepsilon))] \neq 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

это решение можно определить с помощью итерационного процесса

$$x_1(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) = \varphi_1(\tau)\, c_1(\varepsilon), \quad c_1(\varepsilon) = -\left[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))\right]^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\times$$

$$\times \left\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta^*)Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)y_0'(\tau,\hat{c}^*) - \left[y_0''(\tau,\hat{c}^*) + (1+\varepsilon\beta^*)^2 y_0(\tau,\hat{c}^*)\right]\right\} d\tau,$$

$$\beta_1(\varepsilon) = \beta^* - \left[1 - \frac{\partial\Phi(\beta^*, y_1(s,\varepsilon))(\varepsilon)}{\partial\beta}\right]^{-1} \left[\beta^* - \Phi(\beta^*, y_1(s,\varepsilon))(\varepsilon)\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon), \quad \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varphi_{k+1}(\tau)c_{k+1}(\varepsilon), \tag{12}$$

$$c_{k+1}(\varepsilon) = -\left[\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon))\right]^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{F}_{k+1}^*(\tau,\varepsilon)\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))\times$$

$$\times\, Y(y_k(\tau,\varepsilon),0)\, y_k'(\tau,\varepsilon) - (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2\, y_k(\tau,\varepsilon) - y_k''(\tau,\varepsilon)\}\, d\tau,$$

$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta_k(\varepsilon) - \left[1 - \frac{\partial\Phi(\beta_k(\varepsilon), y_{k+1}(s,\varepsilon))(\varepsilon)}{\partial\beta}\right]^{-1} \times$$

$$\times \left[\beta_k(\varepsilon) - \Phi(\beta_k(\varepsilon), y_{k+1}(s,\varepsilon))(\varepsilon)\right], \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

С учетом замены независимой переменной итерационная схема (12) определяет приближенное решение периодической задачи для уравнения Льенара (9).

Пример. Итерационная схема (12) применима для построения периодического решения уравнения Ван дер Поля [2, 10–12]

$$y'' + y = \varepsilon\,(1-y^2)\,y',$$

частного случая уравнения Льенара.

Условия доказанного следствия в данном случае выполнены. Уравнение для порождающих амплитуд имеет простой действительный корень $\hat{c}^* = 2$, $\beta^* = 0$. Положим, например,

$$\varphi_1(\tau) = [\sin\tau\ \sin 3\tau\ \sin 5\tau\ \sin 7\tau\ \cos\tau\ \cos 5\tau\ \cos 7\tau].$$

Матрица Грама, соответствующая порождающему решению $y_0(t,\hat{c}^*) = 2\cos t$,

$$\det[\Gamma\big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\big)] \approx 4\,057\,816\,381\,784\,064\pi^7\varepsilon^4 + 2\,143\,386\,517\,635\,072\pi^7\varepsilon^6 + \ldots \neq 0$$

невырождена. Предложенная итерационная процедура определяет функцию

$$\xi_1(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\frac{\sin\tau-\sin 3\tau}{4} + \varepsilon^2\left(-\frac{3\cos\tau}{128} - \frac{5}{96}\cos 5\tau\right) +$$

$$+\,\varepsilon^3\,\frac{-397\sin\tau + 297\sin 3\tau + 100\sin 5\tau + 70\sin 7\tau}{9\,216} +$$

$$+\,\varepsilon^4\,\frac{4\,293\cos\tau + 9\,196\cos 5\tau + 2\,380\cos 7\tau}{884\,736} +$$

$$+\,\varepsilon^5\,\frac{197\,173\sin\tau - 138\,573\sin 3\tau - 58\,600\sin 5\tau - 46\,366\sin 7\tau}{21\,233\,664} +$$

$$+\,\varepsilon^6\,\frac{-5\,867\,397\cos\tau - 4\,460\,092\cos 5\tau - 1\,576\,804\cos 7\tau}{2\,038\,431\,744} +$$

$$+\,\varepsilon^7\frac{-147\,152\,989\sin\tau + 116\,416\,989\sin 3\tau + 30\,736\,000\sin 5\tau + 25\,022\,662\sin 7\tau}{48\,922\,361\,856},$$

а также первое приближение

$$\beta_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{16} - \frac{17\varepsilon^3}{3\,072} + \frac{40\,781\varepsilon^5}{28\,311\,552} - \frac{13\,979\varepsilon^7}{20\,897\,579}$$

к функции $\beta(\varepsilon)$. Матрица Грама, соответствующая первому приближению $y_1(\tau,\varepsilon)$,

$$\det[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))] \approx 4\,057\,816\,381\,784\,064\pi^7\varepsilon^4 + 2\,143\,386\,517\,635\,072\pi^7\varepsilon^6 + \ldots \neq 0$$

невырождена. Положим $\varphi_1(\tau) = \varphi_2(\tau)$. Предложенная итерационная процедура определяет функцию

$$\xi_2(\tau,\varepsilon) = \frac{3}{128}\,\varepsilon^2\cos\tau + \varepsilon^3\left(\frac{41}{1\,024}\sin\tau - \frac{21}{1\,024}\sin 3\tau - \frac{5}{768}\sin 5\tau + \frac{7}{1\,536}\sin 7\tau\right) +$$

$$+\,\varepsilon^4\left(-\frac{3\,787}{589\,824}\cos\tau - \frac{473}{73\,728}\cos 5\tau - \frac{7}{8\,192}\cos 7\tau\right) +$$

$$+\,\varepsilon^5\left(-\frac{65\,663}{4\,718\,592}\sin\tau + \frac{15\,181}{1\,572\,864}\sin 3\tau + \frac{395}{147\,456}\sin 5\tau + \frac{487}{1\,179\,648}\sin 7\tau\right) +$$

$$+\,\varepsilon^6\left(-\frac{13\,786\,913}{243\,024\,443}\cos\tau + \frac{5\,399\,155}{1\,138\,742\,666}\cos 5\tau + \frac{1\,938\,002}{2\,560\,428\,281}\cos 7\tau\right) +$$

$$+\varepsilon^7\left(-\frac{9\,009\,047}{249\,230\,597}\sin\tau+\frac{84\,430\,978}{3\,627\,550\,289}\sin 3\tau-\right.$$

$$\left.-\frac{1\,817\,844}{2\,810\,321\,573}\sin 5\tau-\frac{1\,854\,818}{1\,720\,405\,007}\sin 7\tau\right)+$$

$$+\varepsilon^8\left(\frac{17\,284\,649}{496\,497\,510}\cos\tau+\frac{11\,564\,805}{1\,549\,162\,486}\cos 5\tau-\frac{572\,747}{5\,213\,617\,729}\cos 7\tau\right)+$$

$$+\varepsilon^9\left(\frac{14\,502\,929}{522\,989\,888}\sin\tau-\frac{14\,718\,563}{669\,621\,228}\sin 3\tau-\frac{1\,438\,656}{1\,577\,943\,161}\sin 5\tau-\frac{4\,842\,238}{1\,980\,404\,069}\sin 7\tau\right)+$$

$$+\varepsilon^{10}\left(-\frac{9\,692\,105}{797\,934\,848}\cos\tau-\frac{6\,818\,500}{865\,183\,731}\cos 5\tau-\frac{12\,590\,253}{29\,454\,573\,767}\cos 7\tau\right),$$

а также второе приближение

$$\beta_2(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{16}-\frac{5\,\varepsilon^3}{3\,072}-\frac{30\,343\,\varepsilon^5}{28\,311\,552}-\frac{12\,343\,254\,\varepsilon^7}{1\,476\,900\,065}+\frac{13\,824\,881\,\varepsilon^9}{2\,020\,507\,543}+\frac{1\,728\,959\,\varepsilon^{11}}{12\,523\,369\,468}$$

к функции $\beta(\varepsilon)$. Положим

$$\varphi_3(\tau)=[\sin\tau\ \sin 3\tau\ \sin 5\tau\ \sin 7\tau\ \sin 9\tau\ \cos\tau\ \cos 5\tau\ \cos 7\tau\ \cos 9\tau].$$

Предложенная итерационная процедура определяет функцию

$$\begin{aligned}\xi_3(\tau,\varepsilon)=&\frac{101}{65\,536}\varepsilon^4\cos\tau+\frac{19\,373}{326\,813}\varepsilon^6\cos\tau-\frac{5\,433}{110\,210}\varepsilon^8\cos\tau-\\&-\frac{5}{89\,722}\varepsilon^{10}\cos\tau-\frac{301}{142\,781}\varepsilon^6\cos 5\tau-\frac{648}{89\,003}\varepsilon^8\cos 5\tau+\\&+\frac{1\,541}{140\,291}\varepsilon^{10}\cos 5\tau-\frac{3}{55\,934}\varepsilon^6\cos 7\tau+\frac{2}{31\,467}\varepsilon^8\cos 7\tau+\\&+\frac{59}{140\,495}\varepsilon^{10}\cos 7\tau+\frac{61}{20\,480}\varepsilon^4\cos 9\tau-\frac{51}{107\,809}\varepsilon^6\cos 9\tau-\\&-\frac{\varepsilon^8}{18\,035}\cos 9\tau+\frac{\varepsilon^{10}}{293\,867}\cos 9\tau+\frac{986}{401\,461}\varepsilon^5\sin\tau+\frac{4\,349}{111\,350}\varepsilon^7\sin\tau-\\&-\frac{3\,240}{85\,351}\varepsilon^9\sin\tau-\frac{148}{68\,973}\varepsilon^5\sin 3\tau-\frac{2\,813}{109\,512}\varepsilon^7\sin 3\tau+\\&+\frac{2\,201}{69\,913}\varepsilon^9\sin 3\tau-\frac{5}{79\,608}\varepsilon^7\sin 5\tau+\frac{46}{50\,211}\varepsilon^9\sin 5\tau+\\&+\frac{54}{108\,779}\varepsilon^5\sin 7\tau+\frac{17}{57\,396}\varepsilon^7\sin 7\tau+\frac{251}{102\,335}\varepsilon^9\sin 7\tau-\\&-\frac{76}{120\,037}\varepsilon^5\sin 9\tau+\frac{3}{89\,837}\varepsilon^7\sin 9\tau+\frac{2}{92\,313}\varepsilon^9\sin 9\tau,\end{aligned}$$

а также третье приближение

$$\beta_3(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{16} - \frac{5\varepsilon^3}{3\,072} - \frac{129\varepsilon^5}{264\,805} + \frac{\varepsilon^7}{55\,669} + \frac{322\varepsilon^9}{113\,355} - \frac{7\varepsilon^{11}}{48\,701}$$

к функции $\beta(\varepsilon)$. Итак, найдено третье приближение $y_3(\tau,\varepsilon)$ к решению периодической задачи для уравнения Ван дер Поля. Примем для определенности $\varepsilon_0 = 1,0$; при этом

$$\|\Phi(\beta^*, y_1(\cdot,\varepsilon))(\cdot)\| \le \mu_1 \approx 0,0577\,377.$$

Поскольку $\omega'_\beta(y_1(\cdot,\varepsilon),\beta^*) = 0,$

$$\mu_2 = \left\|\Phi'_\beta(\beta^*, y_1(\cdot,\varepsilon))(\cdot)\right\| = \left\|\left[\Phi'_\beta(\beta^*, y_1(\cdot,\varepsilon))(\cdot)\right]^{-1}\right\| = 1.$$

Аналогично

$$\left\|\Phi''_{\beta^2}(\beta(\varepsilon), y(s,\varepsilon))(\cdot)\right\| \le \mu_3 \approx 1,06\,177.$$

Таким образом, для $\varepsilon_0 = 1,0$ условие сходимости

$$2\,\mu_1(\varepsilon_0)\,\mu_2(\varepsilon_0)\,\mu_3(\varepsilon_0) \approx 0,122\,609 < 1$$

итерационной схемы (12) выполнено. Для оценки точности найденных первых трех приближений к решению периодической задачи для уравнения Ван дер Поля, полученных с помощью схемы (12), определим невязки ($k = 1, 2, 3$)

$$\Delta_k(\varepsilon) := \left\|y''_k(\tau,\varepsilon) + (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2\, y_k(\tau,\varepsilon) - \varepsilon\,(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))\,(1-y_k^2(\tau,\varepsilon))\, y'_k(\tau,\varepsilon)\right\|_{C[0;2\pi]},$$

а также невязку приближения, полученного в статье [12]:

$$\Delta_a(\varepsilon) := \left\|y''_a(\tau,\varepsilon) + (1+\varepsilon\beta_a(\varepsilon))^2\, y_a(\tau,\varepsilon) - \varepsilon\,(1+\varepsilon\beta_a(\varepsilon))\,(1-y_a^2(\tau,\varepsilon))\, y'_a(\tau,\varepsilon)\right\|_{C[0;2\pi]}.$$

При $\varepsilon = 0,1$ имеем

$$\Delta_1(0,1) \approx 0,000\,399507, \quad \Delta_2(0,1) \approx 0,0000\,247\,583, \quad \Delta_3(0,1) \approx 8,68\,717 \cdot 10^{-7}.$$

Для $\varepsilon = 0,01$ невязки меньше:

$$\Delta_1(0,01) \approx 3,81\,303 \cdot 10^{-7}, \Delta_2(0,01) \approx 2,39\,377 \cdot 10^{-9}, \Delta_3(0,01) \approx 8,97\,377 \cdot 10^{-12}.$$

Заметим, что точность найденного нами третьего приближения выше точности приближений $y_a(\tau,\varepsilon)$, $\beta_a(\varepsilon)$ к периодическому решению уравнения Ван дер Поля

$$\Delta_a(0,1) \approx 0,000\,202, \quad \Delta_a(0,01) \approx 2,01\,398 \cdot 10^{-8},$$

полученного в статье [12].

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 p.
2. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференц. уравнения. — 1992. — **28**, № 10. — С. 1668–1674.
3. *Чуйко С. М., Бойчук И. А.* Автономная нетерова краевая задача в критическом случае // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 3. — С. 405–416.
4. *Шовкопляс Т. В.* Критерій розв'язності лінійної крайової задачі для системи другого порядку // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 6. — С. 861–864.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с.
6. *Чуйко С. М., Старкова О. В.* О приближенном решении автономных краевых задач методом наименьших квадратов // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 4. — С. 556–573.
7. *Чуйко С.М.* О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 4. — С. 554–573.
8. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. — 408 с.
9. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961. — 778 с.
10. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.
11. *Ван дер Поль Б.* Нелинейная теория электрических колебаний. — М.: Связьиздат, 1935. — 42 с.
12. *Andersen C. M., Geer J. F.* Power expansion for the frequency and period of limit cycle of the Van der Pol equation // SIAM J. Appl. Math. — 1982. — **42**. — P. 678–693.

Получено 03.11.11