УДК 531.36

КАНОНІЧНА ФРОБЕНІУСОВА ФОРМА МАТРИЦЬ МЕХАНІЧНОЇ АНАЛОГІЇ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ПАРНОГО ПОРЯДКУ

В. В. Новицький, М. О. Зінчук, А. М. Приз

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: novyc@imath.kiev.ua

For an even order dynamical system in the Frobenius form, we find a canonic form of its mechanical counterpart. The matrix for transformation to such a form does not depend on the parameters of the transformed system, hence the obtained result can be extended to a class of pseudolinear nonstationary systems.

Для динамической системы четного порядка в форме Фробениуса найдена ее каноническая форма механической аналогии. Матрица преобразования к такой форме не зависит от параметров преобразованных систем, поэтому полученный результат можно распространить на класс псевдолинейных нестационарных систем.

Роботу присвячено побудові фробеніусової канонічної форми матриць механічної аналогії для лінійних та нелінійних систем парного порядку.

Нелінійна система. Розглянемо нелінійні динамічні системи у псевдолінійному вигляді

$$\dot{x} = A(x,t)x + b(x,t)u, \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}_{2n}$ — вектор стану системи, $A(x,t) \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$ — матриця коефіцієнтів системи, $b(x,t) \in \mathbb{R}_{2n\times 1}$ — вектор розподілу керувань. Будемо припускати, що матриця $A(x,t)$ і вектор $b(x,t)$ рівномірно обмежені та мають рівномірно обмежені частинні похідні довільного порядку до $4n-1$ включно, а також рівномірну повну керованість пари $(A(x,t), b(x,t))$ [1].

Канонічну фробеніусову форму матриць механічної аналогії будемо знаходити з форми Фробеніуса [2]. Для цього спочатку наведемо теорему 1 із роботи [3] про існування та єдиність перетворення

$$y = S(x,t)x, \tag{2}$$

яке забезпечує для матриці $A(x,t)$ коефіцієнтів системи (1) форму Фробеніуса. Зазначимо, що в явному вигляді матрицю $S(x,t) \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$ перетворення (2) отримано в [1].

Теорема 1 [1]. *Для існування та єдиності перетворення (2) необхідною і достатньою є повна рівномірна невиродженість матриці керованості $W(x,t)$ системи (1), тобто виконання умови*

$$\exists\, \varepsilon > 0 : |\det W(x,t)| > \varepsilon,$$

де

$$W(x,t) = |b(x,t),\ L_1(x,t)b(x,t),\ldots,L_{n-1}(x,t)b(x,t)|,$$

$L_i(x,t)$ — *матриця похідної Лі, тобто матриця i-ї похідної від вектора $x(t)$ в силу однорідної системи $\dot{x} = A(x,t)x$.*

Якщо справджується теорема 1, то матриця системи (1) перетворенням (2) зводиться до форми Фробеніуса

$$\dot{y} = \tilde{A}_F(y,t)y + \tilde{b}(y,t)u, \quad y(t_0) = y_0, \tag{3}$$

де

$$\tilde{A}_F(y,t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0(y,t) & -a_1(y,t) & \ldots & -a_{2n-1}(y,t) \end{bmatrix}.$$

Лінійна система. Розглянемо лінійний стаціонарний випадок системи (1) парного порядку у формі Коші без керування

$$\dot{x} = \tilde{A}x, \quad x(t_0) = x_0, \tag{4}$$

де $x \in \mathbb{R}_{2n}$, $\tilde{A} \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$, t_0 — початковий момент часу.

Якщо у матриці $\tilde{A}$ з (4) кожному різному власному значенню відповідає лише одна жорданова клітина, то її можна звести за допомогою деякого невиродженого перетворення $y = Sx$, $S \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$ до канонічної форми Фробеніуса [4–6]

$$\tilde{A}_F = S\tilde{A}S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{2n-1} \end{bmatrix}.$$

Тут a_i, $i = \overline{0, 2n-1}$, — коефіцієнти характеристичного многочлена

$$\tilde{f}(\lambda) = \lambda^{2n} + a_{2n-1}\lambda^{2n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \tag{5}$$

матриці $\tilde{A}_F$, тому матрицю $\tilde{A}_F$ ще називають супроводжуючою матрицею [2].

Відомо, що з (4) при виконанні умови $\operatorname{rang}(\tilde{A} - \lambda_i I) \geq n \ \ \forall \lambda_i$ [7] за допомогою невиродженого лінійного перетворення $y = Tx$, $T \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$, можна отримати систему

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & I \\ -C & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad y(t_0) = y_0, \tag{6}$$

де $y_i \in \mathbb{R}_n$, $B, C \in \mathbb{R}_{n\times n}$, I — одинична матриця, O — нульова матриця.

Означення 1. *Механічною аналогією системи (4) називається система n диференціальних рівнянь другого порядку*

$$\ddot{z} + B\dot{z} + Cz = 0, \quad z(t_0) = z_{01}, \quad \dot{z}(t_0) = z_{02},$$

яку отримано з (6), де $\begin{bmatrix} z \\ \dot z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = y, z \in \mathbb{R}_n$.

Матриці B та C традиційно інтерпретують [8] як суму матриць дисипативних і гіроскопічних та консервативних (потенціальних) і неконсервативних сил відповідно.

Канонічна фробеніусова форма матриць механічної аналогії. Розглянемо систему (4) у формі Фробеніуса

$$\dot x = \tilde A_F\, x, \quad x(t_0) = x_0, \tag{7}$$

та побудуємо для неї канонічну фробеніусову форму механічної аналогії.

Означення 2. *Якщо матриці* $-C$ *та* $-B$ *з (6) мають вигляд*

$$-C = C_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \ldots & -c_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$-B = B_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -b_0 & -b_1 & \ldots & -b_{n-1} \end{bmatrix},$$

то матрицю

$$A_F = \begin{bmatrix} 0 & I \\ C_F & B_F \end{bmatrix} \tag{8}$$

будемо називати канонічною фробеніусовою формою механічної аналогії (6) лінійної стаціонарної системи парного порядку (7).

Аналогічно формулюється означення для нестаціонарної нелінійної системи (3). Для (7) отримаємо алгоритм побудови канонічної фробеніусової форми механічної аналогії (8) за допомогою деякого невиродженого лінійного перетворення

$$v = Mx, \quad M \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}. \tag{9}$$

Спочатку знайдемо зв'язок між коефіцієнтами a_i, $i = \overline{0, 2n-1}$, та c_j, b_j, $j = \overline{0, n-1}$, при умові, що характеристичні многочлени $f(\lambda)$ та $\tilde f(\lambda)$ матриць A_F і $\tilde A_F$ відповідно збігаються.

Лема. *Нехай* $\tilde f(\lambda) = f(\lambda)$, *тоді зв'язок між коефіцієнтами* a_k *з* $\tilde A_F$ *та* c_i, b_i *з* A_F *буде таким:*

$$a_k = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\binom{n-i-1}{k-2i} c_i + \binom{n-i-1}{k-2i-1} b_i \right], \quad k = \overline{0, 2n-1}, \tag{10}$$

де $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ *обчислюється за формулою*

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{p!}{q!(p-q)!}, & \textit{якщо} \quad p \geq q \geq 0, \\ 0 \quad - \textit{ у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Доведення. Розглянемо визначник матриці $\lambda I - A_F$. Легко показати [2], що

$$f(\lambda) = |\lambda I - A_F| = \begin{vmatrix} \lambda I & -I \\ -C_F & \lambda I - B_F \end{vmatrix} = |\lambda^2 I - \lambda B_F - C_F| =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda^2 & -(\lambda+1) & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -(\lambda+1) \\ b_0\lambda + c_0 & b_1\lambda + c_1 & \ldots & \lambda^2 + b_{n-1}\lambda + c_{n-1} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Розкладемо визначник (11) за останнім рядком:

$$\begin{aligned} f(\lambda) = &(-1)^{2n}(\lambda^2 + b_{n-1}\lambda + c_{n-1})\lambda^{2n-2} + \\ &+ (-1)^{2n-1}(b_{n-2}\lambda + c_{n-2})\lambda^{2n-4}(-1)^1(\lambda+1) + \ldots \\ &\ldots + (-1)^{n+2}(b_1\lambda + c_1)\lambda^2(-1)^{n-2}(\lambda+1)^{n-2} + \\ &+ (-1)^{n+1}(b_0\lambda + c_0)(-1)^{n-1}(\lambda+1)^{n-1} = \\ = &\lambda^{2n} + \sum_{i=0}^{n-1}(b_i\lambda + c_i)\lambda^{2i}(\lambda+1)^{n-i-1}. \end{aligned} \tag{12}$$

При розкладі ми врахували той факт, що визначник верхньої трикутної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі. Підставивши в (12) замість $(\lambda+1)^i$ розклад за елементами λ [9]

$$(\lambda+1)^i = \sum_{j=0}^{i} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \lambda^j,$$

отримаємо

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^{2n} + \sum_{i=0}^{n-1}(b_i\lambda + c_i)\lambda^{2i} \sum_{j=0}^{n-i-1} \begin{pmatrix} n-i-1 \\ j \end{pmatrix} \lambda^j = \\ &= \lambda^{2n} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i-1} \begin{pmatrix} n-i-1 \\ j \end{pmatrix} (b_i\lambda + c_i)\lambda^{2i+j}. \end{aligned} \tag{13}$$

У виразі (13) введемо новий індекс k :

$$k = 2i + j \Rightarrow j = k - 2i.$$

Оскільки $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, n-i-1}$, то індекс $k = \overline{0, 2n-2}$. Тоді (13) набере вигляду

$$f(\lambda) = \lambda^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-2} \lambda^k \sum_{i=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-i-1 \\ k-2i \end{pmatrix} (b_i\lambda + c_i) =$$

$$= \lambda^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1} \lambda^k \sum_{i=0}^{n-1} \left[\begin{pmatrix} n-i-1 \\ k-2i \end{pmatrix} c_i + \begin{pmatrix} n-i-1 \\ k-2i-1 \end{pmatrix} b_i \right]. \tag{14}$$

Порівнюючи (14) та (5), отримуємо (10).

Лему доведено.

З леми, зокрема, випливає, що $a_0 = c_0$, $a_{2n-1} = b_{n-1}$.

Знайдемо в аналітичному вигляді матрицю перетворення (9). Нехай матриці A_F та $\tilde{A}_F$ є довільними, тоді справджується наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо характеристичні многочлени $f(\lambda)$ і $\tilde{f}(\lambda)$ матриць A_F і $\tilde{A}_F$ відповідно збігаються, то дані матриці подібні. При цьому елементи матриці перетворення M обчислюються за формулами*

$$m_{ik} = \begin{pmatrix} n-i \\ k-2i+1 \end{pmatrix}, \quad m_{n+i,k} = \begin{pmatrix} n-i \\ k-2i \end{pmatrix},$$
$$i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, 2n}. \tag{15}$$

Доведення. Побудуємо таку невироджену матрицю перетворення $M = \{m_{ij}\}_1^{2n}$, для якої буде виконуватися рівність

$$A_F = M\tilde{A}_F M^{-1}. \tag{16}$$

Оскільки $f(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)$, то згідно з лемою виконується рівність (10), яку можна записати у вигляді

$$-a_k = [c^T\, b^T]\alpha_k, \quad k = \overline{0, 2n-1}, \tag{17}$$

де

$$c = \begin{bmatrix} -c_0 \\ \vdots \\ -c_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{n\times 1}, \quad b = \begin{bmatrix} -b_0 \\ \vdots \\ -b_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{n\times 1},$$

$$\alpha_k^T = \left[\begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} \ \ldots \ \begin{pmatrix} 0 \\ k-2n+2 \end{pmatrix} \ \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \ \ldots \ \begin{pmatrix} 0 \\ k-2n+1 \end{pmatrix} \right] \in \mathbb{R}_{1\times 2n}.$$

Якщо позначити

$$M_0 = [\alpha_0, \ldots, \alpha_{2n-1}], \quad a^T = [-a_0, \ldots, -a_{2n-1}],$$

то (17) можна записати у матричній формі

$$a^T = [c^T\, b^T]\, M_0. \tag{18}$$

З (15) – (18) випливає, що матриця M_0 збігається з матрицею M.

Далі покажемо, що $M_0 = M$ задовольняє (16). З (17) отримуємо $a_{2n-1} = b_{n-1}$, тобто останній стовпчик матриці M_0 дорівнює одиничному вектору e_{2n}. З іншого боку, для $k = \overline{0, 2n-2}$ маємо $k < 2i+1$ при $i = n-1$, тому $m_{2n,j} = 0$ для $j = \overline{1, 2n-1}$. Отже, матриця M_0 має вигляд

$$M_0 = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

з урахуванням якого легко записати співвідношення

$$W = M_0^{-1} A_F M_0 = \begin{bmatrix} H \\ a^T \end{bmatrix}, \tag{19}$$

де $H \in \mathbb{R}_{2_{n-1} \times 2n}$ — деяка матриця. Із (19) видно, що характеристичний многочлен і останній рядок матриці W збігаються з характеристичним многочленом і останнім рядком матриці $\tilde{A}_F$, тому $W = \tilde{A}_F$, як супроводжуюча матриця [2].

Теорему 2 доведено.

В загальному випадку з рівності характеристичних многочленів двох матриць не випливає їх подібність. Але, згідно з теоремою 2, для довільних матриць спеціального вигляду $\tilde{A}_F$ і A_F це твердження є справедливим. Крім цього, матриця перетворення M має кілька цікавих властивостей та певним чином пов'язана з теорією графів (детальніше див. у роботі [10]).

Знайдемо обернену матрицю $M^{-1} = \{m_{ij}^-\}_1^{2n} = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2n}]$ перетворення (16). Для цього помножимо (18) на неї справа. Отриману рівність

$$a^T M^{-1} = [c^T\, b^T]\, M M^{-1}$$

запишемо повекторно

$$a^T \beta_k = [c^T\, b^T]\, M \beta_k = \begin{cases} c_k, & k = \overline{0, n-1}, \\ b_{k-n}, & k = \overline{n, 2n-1}, \end{cases}$$

або в розгорнутому вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} \left(c_{i-1} \sum_{j=1}^{2n} m_{ij} m_{jk}^- + b_{i-1} \sum_{j=1}^{2n} m_{n+i,j} m_{jk}^- \right) = \begin{cases} c_{k-1}, & k = \overline{1, n}, \\ b_{k-n-1}, & k = \overline{n+1, 2n}. \end{cases}$$

Звідси маємо [10] такі співвідношення для елементів M^{-1} :

$$m_{ij}^{-} = (-1)^{i+1} \begin{pmatrix} n+j-i-1 \\ 2j-i-1 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,2n}, \quad j = \overline{1,n},$$

$$m_{ij}^{-} = (-1)^{i} \begin{pmatrix} j-i-1 \\ 2j-2n-i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,2n}, \quad j = \overline{n+1,2n}, \tag{20}$$

$$i + j < 4n, \quad m_{2n,2n}^{-} = 1.$$

Таким чином, з (20) обчислюється вся матриця M^{-1}. Зазначимо, що процес знаходження елементів матриць M і M^{-1} можна оптимізувати завдяки їх спеціальним структурам [10].

Матриця M перетворення до канонічної фробеніусової форми A_F не залежить від параметрів перетворюваної матриці $\tilde{A}_F$. Така властивість матриці перетворення дозволяє перенести теоретичні результати на нестаціонарні нелінійні системи. Відповідні матриці механічної аналогії наберуть вигляду

$$A_F(y,t) = \begin{bmatrix} O & I \\ C_F(y,t) & B_F(y,t) \end{bmatrix}.$$

Застосування. Використаємо фробеніусову канонічну форму механічної аналогії та теорему Тета – Томсона – Четаєва [8] при дослідженні стійкості механічної системи.

Теорема 3 (Тета – Томсона – Четаєва). *Додавання до системи довільних гіроскопічних і дисипативних сил (з додатним опором) зберігає стійкість її рівноваги за умови, що ця система стійка лише при потенціальних силах.*

Якщо в системі (6) матрицю коефіцієнтів звести до канонічної форми A_F, то відповідна механічна аналогія набере вигляду

$$\ddot{z} - B_F\dot{z} - C_F z = 0. \tag{21}$$

Помноживши (21) зліва на $P = P^T > 0$, отримаємо механічну аналогію загального вигляду

$$P\ddot{z} - PB_F\dot{z} - PC_F z = 0. \tag{22}$$

Для застосування теореми 3 знайдемо симетричну додатно визначену матрицю P таку, щоб матриця PC_F була симетричною і від'ємно визначеною. Розкладемо PC_F на симетричну і кососиметричну складові:

$$PC_F = \frac{PC_F + C_F^T P}{2} + \frac{PC_F - C_F^T P}{2}.$$

Тоді для визначення шуканої матриці P отримаємо співвідношення

$$\begin{aligned} PC_F + C_F^T P &= -2Q, \\ PC_F - C_F^T P &= O, \end{aligned} \tag{23}$$

де Q — деяка невідома симетрична додатно визначена матриця. Згідно з [11] система (23) еквівалентна наступній:

$$P = -QC_F^{-1}, \tag{24}$$

$$C_F^T Q - QC_F = O. \tag{25}$$

Рівняння (25), завдяки кососиметричності матриці $C_F^T Q - QC_F$, має $\frac{n(n-1)}{2}$ рівнянь щодо $\frac{n(n+1)}{2}$ невідомих елементів матриці Q. Надлишкові змінні в подальшому можуть бути використані для надання додатної визначеності матриці Q.

Зауважимо, що матричне рівняння типу (25) і його узагальнення було розглянуто у роботах [5, 12], де досліджено умови його розв'язності. Зокрема, умовою існування симетричного розв'язку $Q > 0$ є наявність лише дійсного від'ємного спектра матриці C_F. Після розв'язання системи (24), (25) отримуємо одночасну симетричність та додатну визначеність P та Q. Звідси випливає, що матриця $PC_F = -Q$ в механічній аналогії загального вигляду (22) буде від'ємно визначеною.

Таким чином, канонічна фробеніусова форма механічної аналогії, в порівнянні з загальним випадком, дозволяє значно спростити дослідження стійкості. Дійсно, нехай матриця $-C_F$ має додатний спектр, що можна перевірити, зокрема, теоремою Сільвестра [9]. Перевіримо симетричну частину $-\frac{PB_F + (PB_F)^T}{2}$ матриці $-PB_F$. Якщо вона є додатно визначеною матрицею (тобто відповідає дисипативним силам з додатним опором), то матриця $\tilde{A}_F$ вдвічі більшого порядку буде стійкою згідно з теоремою 3.

Зазначимо, що фробеніусова форма матриць B_F, C_F та простий запис оберненої матриці C_F дозволяють отримати в явному вигляді матрицю $QC_F^{-1}B_F = V = \{v_{ij}\}_1^n$. Оскільки $P = -QC_F^{-1}$, то

$$-\frac{PB_F + (PB_F)^T}{2} = -\frac{V + V^T}{2},$$

де

$$v_{ij} = q_{i1}\left(-\frac{c_{j-1}}{c_0} + \frac{b_{j-1}}{c_0}\right) + q_{ij}, \quad q_{ij} = q_{ji}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad Q = \{q_{ij}\}_1^n.$$

Приклад. Задано матрицю механічної аналогії 4-го порядку в канонічній формі

$$A_F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -b_0 & -b_1 \end{bmatrix}.$$

Знайти достатні умови стійкості матриці A_F.

Згідно з умовою задачі

$$-C_F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ c_0 & c_1 \end{bmatrix}.$$

Матрицю Q шукаємо у вигляді [5]

$$Q = \begin{bmatrix} \dfrac{q_{12}^2}{q_{22}} + k & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Матриця (26) при додатних значеннях q_{22} і параметра k буде додатно визначеною. З рівняння (25) отримаємо кососиметричну матрицю

$$\begin{bmatrix} 0 & -c_0 q_{22} - \dfrac{q_{12}^2}{q_{22}} - k + c_1 q_{12} = 0 \\ c_0 q_{22} + \dfrac{q_{12}^2}{q_{22}} + k - c_1 q_{12} & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

з якої знаходимо

$$k = -\frac{c_0 q_{22}^2 + q_{12}^2 - c_1 q_{12} q_{22}}{q_{22}}.$$

Розв'яжемо нерівність $k > 0$ відносно q_{12}, після чого отримаємо

$$q_{12} \in \left(\frac{c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_0}}{2} q_{22}, \; \frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_0}}{2} q_{22} \right). \tag{27}$$

Отже, якщо для матриці C_F виконуються умови

$$c_1^2 - 4c_0 > 0, \quad c_1 > 0, \quad c_0 > 0,$$

то для всіх значень параметра q_{12} з проміжку (27) матриці Q, P та $-PC_F$,

$$-PC_F = \begin{bmatrix} \dfrac{q_{12}^2}{q_{22}} + k & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix},$$

будуть симетричними додатно визначеними. Насамкінець необхідно перевірити симетричну частину

$$-\frac{PB_F + (PB_F)^T}{2}$$

матриці $-PB_F$. Якщо вона є додатно визначеною матрицею (тобто відповідає дисипативним силам з додатним опором), то матриця $\tilde{A}_F$ вдвічі більшого порядку буде стійкою згідно з теоремою 3.

Висновки. Наведені в статті дослідження дозволяють знаходити матриці еквівалентного перетворення канонічних форм Фробеніуса, які не залежать від параметрів перетворюваних динамічних систем. Така властивість матриці перетворення дозволяє перенести теоретичні результати на нестаціонарні нелінійні системи. Канонічну форму механічної аналогії можна застосувати для спрощення дослідження стійкості еквівалентної лінійної стаціонарної системи вдвічі більшого порядку.

1. *Зубер И. Е.* Синтез канонических преобразований подобия для нелинейных нестационарных систем управления // Дифференц. уравнения и процессы управления. — 2003. — № 4. — С. 38 – 51 (http://www.neva.ru/journal).
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
3. *Зубер И. Е.* О некоторых свойствах матриц Фробениуса // Дифференц. уравнения и процессы управления. — 2002. — № 4 (http://www.neva.ru/journal).
4. *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. — М.: Наука, 1970. — 564 с.
5. *Новицький В. В.* Декомпозиція та керування в лінійних системах. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2008. — 252 с.
6. *Стрейц В.* Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем уравнений. — М.: Наука, 1985. — 296 с.
7. *Новицький В. В., Петришина Л. В.* Декомпозиція та механічні аналогії. 1. Лінійні стаціонарні системи // Вопросы аналитической механики и ее применений: Праці Ін-ту математики НАН України. — 1999. — **26**. — С. 251 – 256.
8. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. — М.: Наука, 1971. — 312 с.
9. *Прасолов В. В.* Многочлены. — М.: МЦНМО, 1999. — 336 с.
10. *Новицький В. В., Зінчук М. О., Приз А. М.* Канонічні форми матриць механічної аналогії лінійних систем парного порядку. — Київ, 2011. — 74 с. — (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 11.3).
11. *Barnett S., Kameron R. G.* Introduction to mathematical control theory. — 2nd ed. — Oxford: Clarendon Press, 1985. — 404 p.
12. *Мазко А. Г.* Локализация спектра и устойчивость динамических систем. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999. — 216 с.

Одержано 24.02.11,
після доопрацювання — 20.09.11