УДК 517.968

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОБМЕЖЕННЯМИ

А. Ю. Лучка, В. Ф. Мельничук

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

We find conditions for existence and construction of solutions to weakly nonlinear integral equations with constraints.

Установлены условия существования и построения решений слабонелинейных интегральных уравнений с ограничениями.

У статті [1] обґрунтовано застосування апроксимаційно-ітеративного методу до слабконелінійних інтегральних рівнянь з обмеженнями та керуванням. У даній статті встановлено умови сумісності та побудовано наближені розв'язки вказаних задач, які не містять керування.

1. Об'єкт дослідження. Розглянемо квазілінійне інтегральне рівняння вигляду

$$x(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds + \varepsilon \int_a^b H(t,s)F(s,x(s))\,ds, \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

і поставимо задачу знаходження його розв'язку $x(t)$ із класу $L_2([a,b])$, який задовольняє обмеження

$$\int_a^b S(t)x(t)\,dt = \alpha + \varepsilon \int_a^b E(t,x(t))\,dt. \tag{2}$$

Обмежимось випадком, коли задані величини задовольняють наступні умови:

1) $f \in L_2([a,b])$;

2) елементи $(l \times 1)$-матриці $S(t)$ сумовні з квадратом на відрізку $[a,b]$;

3) ядра $K(t,s)$ та $H(t,s)$ сумовні з квадратом в області $[a,b] \times [a,b]$;

4) $\varepsilon \in \mathbb{R}$ — невід'ємний параметр і $\alpha \in \mathbb{R}^l$;

5) функції $F : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та $E : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняють умову Ліпшиця за другою змінною.

Зазначимо, що до задачі (1), (2) зводяться крайові задачі для слабконелінійних інтегро-диференціальних рівнянь з обмеженнями, методику дослідження яких висвітлено в низці праць (див., наприклад, [2–5]).

2. Підхід до дослідження задачі. Згідно з методикою, розробленою в [2–5], поряд із задачею (1), (2) потрібно дослідити задачу

$$y(t) = f(t) + C(t)\lambda + \int_a^b K(t,s)y(s)\,ds + \varepsilon \int_a^b H(t,s)F(s,y(s))\,ds, \quad t \in [a,b], \tag{3}$$

$$\int_a^b S(t)y(t)\,dt = \alpha + \varepsilon \int_a^b E(t,y(t))\,dt \tag{4}$$

і встановити зв'язок між обома задачами. Тут елементи $(1 \times l)$-матриці $C(t)$ сумовні з квадратом на відрізку $[a,b]$ і задані, функція $y(t)$ із класу $L_2([a,b])$ та параметр $\lambda \in \mathbb{R}^l$ є невідомими.

Задачу (3), (4) можна звести до рівносильного інтегрального рівняння способом, описаним у [1]. Для цього розглядається допоміжна задача

$$y(t) = C(t)\lambda + \int_a^b P(t)Q(s)y(s)\,ds + z(t), \quad \int_a^b S(t)y(t)\,dt = \beta, \tag{5}$$

в якій $(1 \times n)$-матриця $P(t)$ та $(n \times 1)$-матриця $Q(s)$ із сумовними з квадратом на $[a,b]$ елементами, $z \in L_2([a,b])$ та $\beta \in \mathbb{R}^l$ є заданими.

Побудова розв'язку задачі (5), як відомо, зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\Lambda_{11}\lambda + \Lambda_{12}\mu = d_1, \quad \Lambda_{21}\lambda + \Lambda_{22}\mu = d_2, \tag{6}$$

де матриці

$$\Lambda_{11} = \int_a^b S(t)C(t)\,dt, \quad \Lambda_{12} = \int_a^b S(t)P(t)\,dt,$$

$$\Lambda_{21} = \int_a^b Q(t)C(t)\,dt, \quad \Lambda_{22} = \int_a^b Q(t)P(t)\,dt - I \tag{7}$$

мають розмірності $l \times l$, $l \times n$, $n \times l$ та $n \times n$ відповідно і

$$d_1 = \beta - \int_a^b S(t)z(t)\,dt, \quad d_2 = -\int_a^b Q(t)z(t)\,dt, \tag{8}$$

до того ж $d_1 \in \mathbb{R}^l$, $d_2 \in \mathbb{R}^n$, I — одинична матриця в $\mathbb{R}^n$.

Припустимо, що матриці $P(t)$ та $Q(s)$ підібрано таким чином, що матриця

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \tag{9}$$

невироджена. Тоді, як стверджується у лемі 1 із [1], існують функція $R(t,s)$, матриці $D(t)$, $V(s)$ та Δ розмірностей $1\times l$, $l\times 1$ та $l\times l$ відповідно, явні вигляди яких вказано у зазначеній лемі, такі, що розв'язок задачі (5) визначається за формулами

$$\lambda = \Delta\beta - \int\limits_a^b V(s)z(s)\,ds, \tag{10}$$

$$y(t) = D(t)\beta + z(t) - \int\limits_a^b R(t,s)z(s)\,ds. \tag{11}$$

Покладемо

$$z(t) = f(t) + \int\limits_a^b B(t,s)y(s)\,ds + \varepsilon\int\limits_a^b H(t,s)F(s,y(s))\,ds, \tag{12}$$

$$\beta = \alpha + \varepsilon\int\limits_a^b E(t,y(t))\,dt, \tag{13}$$

де

$$B(t,s) = K(t,s) - P(t)Q(s). \tag{14}$$

Тоді задача (3), (4) набере вигляду допоміжної задачі (5), єдиний розв'язок якої виражається формулами (10), (11). Якщо в нього підставити вирази (12), (13) і виконати нескладні перетворення, то отримаємо інтегральне рівняння

$$y(t) = g(t) + \int\limits_a^b M(t,s)y(s)\,ds + \varepsilon\int\limits_a^b \Omega(t,s,y(s))\,ds, \tag{15}$$

а формула (10) набере вигляду

$$\lambda = \gamma - \int\limits_a^b \Phi(s)y(s)\,ds + \varepsilon\int\limits_a^b \Theta(s,y(s))\,ds. \tag{16}$$

Зауважимо, що у формулах (15), (16)

$$g(t) = D(t)\alpha + f(t) - \int_a^b R(t,\xi)f(\xi)\,d\xi, \quad \gamma = \Delta\alpha - \int_a^b V(s)f(s)\,ds, \tag{17}$$

$$M(t,s) = B(t,s) - \int_a^b R(t,\xi)B(\xi,s)d\xi, \quad \Phi(s) = \int_a^b V(\xi)B(\xi,s)\,d\xi, \tag{18}$$

$$\Omega(t,s,y(s)) = D(t)E(s,y(s)) + N(t,s)F(s,y(s)), \tag{19}$$

$$N(t,s) = H(t,s) - \int_a^b R(t,\xi)H(\xi,s)\,d\xi, \tag{20}$$

$$\Theta(s,y(s)) = \Delta E(s,y(s)) - \int_a^b V(\xi)H(\xi,s)F(s,y(s))\,d\xi. \tag{21}$$

У роботі [1] доведено наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо матриця Λ (9) невироджена, то розв'язок задачі (3), (4) існує тоді і тільки тоді, коли існує розв'язок інтегрального рівняння (15). Задача (3), (4) і рівняння (15) одночасно мають єдині розв'язки.*

Лема 1. *Будь-який розв'язок задачі (1), (2) задовольняє співвідношення*

$$\int_a^b \Phi(s)x^*(s)\,ds = \gamma + \varepsilon\int_a^b \Theta(s,x^*(s))\,ds. \tag{22}$$

Доведення. Нехай $x^*(t)$ — розв'язок задачі (1), (2), тобто виконуються рівності

$$x^*(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s)x^*(s)\,ds + \varepsilon\int_a^b H(t,s)F(s,x^*(s))\,ds, \tag{23}$$

$$\int_a^b S(t)x^*(t)\,dt = \alpha + \varepsilon\int_a^b E(t,x^*(t))\,dt. \tag{24}$$

Врахувавши вираз (14), рівність (23) запишемо у вигляді

$$x^*(t) = f(t) + \int_a^b B(t,s)x^*(s)\,ds + \int_a^b P(t)Q(s)x^*(s)\,ds + \varepsilon \int_a^b H(t,s)F(s,x^*(s))\,ds,$$

або, поклавши

$$z^*(t) = f(t) + \int_a^b B(t,s)x^*(s)\,ds + \varepsilon \int_a^b H(t,s)F(s,x^*(s))\,ds, \tag{25}$$

$$\beta^* = \alpha + \varepsilon \int_a^b E(t,x^*(t))\,dt, \quad \mu^* = \int_a^b Q(s)x^*(s)\,ds, \tag{26}$$

у скороченому вигляді

$$x^*(t) = z^*(t) + P(t)\mu^*. \tag{27}$$

Розглянемо тепер систему (6), праві частини якої мають вигляд

$$d_1 = \beta^* - \int_a^b S(t)z^*(t)\,dt, \quad d_2 = -\int_a^b Q(t)z^*(t)\,dt, \tag{28}$$

де функція $z^*(t)$ визначається формулою (25). Оскільки за припущенням матриця Λ, що визначається формулою (9), невироджена, система (6) при вказаній правій частині має єдиний розв'язок. Зокрема, врахувавши формули (25), (10) та (16), отримаємо

$$\lambda = \gamma - \int_a^b \Phi(s)z^*(s)\,ds + \varepsilon \int_a^b \Theta(s,z^*(s))\,ds. \tag{29}$$

З іншого боку, величини (28) із урахуванням співвідношень (27) і (24), позначень (26) та (7) мають вигляд

$$d_1 = \beta^* - \int_a^b S(t)x^*(t)\,dt + \int_a^b S(t)P(t)\,dt\mu^* = \Lambda_{12}\mu^*,$$

$$d_2 = -\int_a^b Q(t)x^*(t)\,dt + \int_a^b Q(t)P(t)\,dt\mu^* = -\mu^* + (\Lambda_{22} + I)\mu^* = \Lambda_{22}\mu^*.$$

Отже, система (6) набере вигляду

$$\Lambda_{11}\lambda + \Lambda_{12}(\mu - \mu^*) = 0, \quad \Lambda_{21}\lambda + \Lambda_{22}(\mu - \mu^*) = 0,$$

єдиним розв'язком якої, очевидно, є

$$\lambda = 0, \quad \mu = \mu^*. \tag{30}$$

Тепер із першої рівності (30) та виразу (29) очевидним чином випливає правильність рівності (22), а отже, і леми 1.

Теорема 2. *Якщо матриця Λ невироджена, то розв'язок задачі (1), (2) існує тоді і тільки тоді, коли існує розв'язок $y^*(t)$ інтегрального рівняння (15), який задовольняє умову*

$$\gamma - \int\limits_a^b \Phi(s)y^*(s)\,ds + \varepsilon\int\limits_a^b \Theta(s, y^*(s))\,ds = 0. \tag{31}$$

Доведення. Нехай $y^*(t)$ — розв'язок інтегрального рівняння (15) та виконується умова (31). Тоді $x^*(t) = y^*(t)$ — розв'язок задачі (1), (2). Справді, згідно з теоремою 1 існує розв'язок задачі (3), (4) $(y(t), \lambda)$, до того ж $y(t) = y^*(t)$,

$$\lambda = \gamma - \int\limits_a^b \Phi(s)y^*(s)\,ds + \varepsilon\int\limits_a^b \Theta(s, y^*(s))\,ds.$$

Враховуючи тепер умову (31), отримуємо $\lambda = 0$, тобто $(y^*(t), 0)$ — розв'язок задачі (3), (4). Отже, очевидно, $x^*(t) = y^*(t)$ є розв'язком задачі (1), (2).

Навпаки, нехай $x^*(t)$ — розв'язок задачі (1), (2). Тоді, очевидно, що $(x^*(t), 0)$ є розв'язком задачі (3), (4), а згідно з теоремою 1 $x^*(t)$ буде розв'язком інтегрального рівняння (15). Виконання умови (31) безпосередньо випливає із леми 1.

Зауваження 1. Таким самим способом, як при доведенні теореми 2 із [1], можна встановити, що задача (1), (2) має єдиний розв'язок лише тоді, коли існує єдиний розв'язок інтегрального рівняння (15), який задовольняє умову (31).

3. Побудова наближених розв'язків. Застосуємо до задачі (1), (2) апроксимаційно-ітеративний метод. Суть методу полягає в тому, що, маючи вже побудоване наближення $(y_{k-1}(t), \lambda_{k-1})$, знаходимо

$$z_k(t) = f(t) + \int\limits_a^b B(t,s)y_{k-1}(s)\,ds + \varepsilon\int\limits_a^b H(t,s)F(s, y_{k-1}(s))\,ds, \tag{32}$$

$$\beta_k = \alpha + \varepsilon\int\limits_a^b E(t, y_{k-1}(t))\,dt \tag{33}$$

і наступне наближення визначаємо із задачі

$$y_k(t) = C(t)\lambda_k + \int_a^b P(t)Q(s)y_k(s)\,ds + z_k(t), \tag{34}$$

$$\int_a^b S(t)y_k(t)\,dt = \beta_k. \tag{35}$$

Початкове наближення знаходимо із задачі (34), (35) при $k = 0$ і довільно заданих функції $z_0(t)$ і векторі β_0.

За умови, що матриця Λ, яка визначається формулою (9), невироджена, метод (32) – (35) рівнозначний методу послідовних наближень щодо інтегрального рівняння (15). Справді, оскільки задача (34), (35) має вигляд задачі (5), розв'язок якої зображується формулами (10), (11), то, враховуючи їх, маємо

$$\lambda_k = \Delta\beta_k - \int_a^b V(s)z_k(s)\,ds,$$

$$y_k(t) = D(t)\beta_k + z_k(t) - \int_a^b R(t,s)z_k(s)\,ds.$$

Підставивши тепер вирази (32), (33) в останні рівності та використавши позначення (17) – (21), отримаємо

$$y_k(t) = g(t) + \int_a^b M(t,s)y_{k-1}(s)\,ds + \varepsilon\int_a^b \Omega(t,s,y_{k-1}(s))\,ds, \tag{36}$$

$$\lambda_k = \gamma - \int_a^b \Phi(s)y_{k-1}(s)\,ds + \varepsilon\int_a^b \Theta(s,y_{k-1}(s))\,ds. \tag{37}$$

Отже, дослідження апроксимаційно-ітеративного методу (32) – (35) звелося до дослідження методу послідовних наближень (36) щодо інтегрального рівняння (15), достатні умови збіжності якого відомі. Зазначимо, що у випадку, коли матриця Λ (9) невироджена та виконуються умови 1 – 5, у праці [1] встановлено достатні умови збіжності та оцінки похибки методу (32) – (35).

Теорема 3. *Якщо виконуються достатні умови існування єдиного розв'язку $y^*(t)$ інтегрального рівняння (15) і збіжності до нього послідовності (36) та справджується співвідношення*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0, \tag{38}$$

то існує єдиний розв'язок $x^*(t)$ задачі (1), (2) і послідовність $\{y_k(t), k \geq 0\}$, побудована за апроксимаційно-ітеративним методом (32)–(35), збігається за нормою в $L_2([a,b])$ до цього розв'язку.

Доведення. Оскільки за умовою теореми маємо

$$\lim_{k\to\infty} y_k(t) = y^*(t), \tag{39}$$

то, виконавши граничний перехід при $k \to \infty$ у рівностях (36), (37) із урахуванням виразу (39), отримаємо

$$\lim_{k\to\infty} y_k(t) = y^*(t) = g(t) + \int\limits_a^b M(t,s)y^*(s)\,ds + \varepsilon \int\limits_a^b \Omega(t,s,y^*(s))\,ds, \tag{40}$$

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \gamma - \int\limits_a^b \Phi(s)y^*(s)\,ds + \varepsilon \int\limits_a^b \Theta(s,y^*(s))\,ds. \tag{41}$$

Із співвідношень (41) та (38) випливає, що розв'язок інтегрального рівняння (15) задовольняє умову (31). Отже, за теоремою 2 задача (1), (2) сумісна і згідно із зауваженням 1 її єдиним розв'язком є $x^*(t) = y^*(t)$.

Зауваження 2. Із аналізу рівності (41) випливає, що умову (38) можна замінити умовою (31).

1. *Лучка А. Ю., Мельничук В. Ф.* Апроксимаційно-ітеративний метод для слабконелінійних інтегральних рівнянь з обмеженнями // Нелінійні коливання. — 2012. — **15**, № 1. — С. 89–111.
2. *Лучка А. Ю.* Методи дослідження систем диференціальних рівнянь з обмеженнями // Диференціальні рівняння і нелінійні коливання: Пр. Укр. мат. конгр. (Київ, 2002 р.). — 2002. — С. 43–59.
3. *Лучка А. Ю., Нестеренко О. Б.* Методи розв'язування крайових задач для слабконелінійних інтегро-диференціальних рівнянь з параметрами та обмеженнями // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 5. — С. 672–679.
4. *Лучка А. Ю., Ферук В. А.* Модифікований проекційно-ітеративний метод для систем квазілінійних диференціальних рівнянь із запізненням та обмеженнями // Нелінійні коливання. — 2004. — **7**, № 2. — С. 188–207.
5. *Лучка А. Ю., Match Вознюк О. М.* Ітераційний метод для інтегральних рівнянь з обмеженнями // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 2. — С. 179–192.

Одержано 04.04.11,
після доопрацювання — 22.09.11