УДК 517.929

СЛАБКОЗБУРЕНІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

І. А. Головацька

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

We obtain conditions for bifurcation, at the point $\varepsilon = 0$, of solutions of weakly perturbed systems of linear integro-differential equations on the line segment $[a, b]$. A converging iteration procedure for finding a solution as a partial sum of the Laurent series is proposed.

Получены условия бифуркации из точки $\varepsilon = 0$ решений слабовозмущенных систем линейных интегро-дифференциальных уравнений на отрезке $[a, b]$. Предложена сходящаяся итерационная процедура нахождения решений в виде части ряда Лорана.

1. Постановка задачі. Вивченню умов існування розв'язків систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь і побудові методів відшукання розв'язків таких задач присвячено роботи [1–3].

Розглянемо систему інтегро-диференціальних рівнянь зі збуренням вигляду

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)]\, ds = f(t) + \varepsilon \int_a^b [K(t,s)x(s) + K_1(t,s)\dot{x}(s)]\, ds. \qquad (1)$$

Припустимо, що $A(t)$, $B(t)$ — $(m \times n)$-, $\Phi(t)$ — $(n \times m)$-, $f(t)$ — $(n \times 1)$-, $K(t,s)$ і $K_1(t,s)$ — $(n \times n)$-вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a,b]$; стовпчики матриці $\Phi(t)$ лінійно незалежні на $[a,b]$.

Будемо вважати, що породжуюча система

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)]\, ds = f(t), \qquad (2)$$

яку отримаємо з (1) при $\varepsilon = 0$, нерозв'язна, тобто встановлений у роботі [1] критерій розв'язності неоднорідної системи (2) не виконується. Відповідно

$$\tilde{b} = \int_a^b \left[A(s)\tilde{f}(s) + B(s)f(s)\right] ds, \quad \tilde{f}(t) = \int_a^t f(s)\, ds,$$

$$\Psi(t) = \int_a^t \Phi(s)\, ds, \quad \Psi_0(t) = [\Psi(t), I_n],$$

I_n — одинична матриця порядку n,

$$D = \left[I_m - \int\limits_a^b [A(s)\Psi(s) + B(s)\Phi(s)]\, ds, -\int\limits_a^b A(s)\, ds \right]$$

— відома $(m \times (m+n))$-вимірна матриця, P_D — ортопроектор на ядро матриці D, $P_{D_{r_1}}$ — $((m+n) \times r_1)$-вимірна матриця, яка складається з повної системи r_1 лінійно незалежних стовпчиків матриці-ортопроектора P_D, $r_1 = m + n - n_1 > 0$, $d_1 = m - n_1$, $n_1 = \operatorname{rank} D$, $X_{r_1}(t) = \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}$, $X_{r_1}(t)$ — $(n \times r_1)$-вимірна матриця, P_{D^*} — ортопроектор на ядро матриці D^*, $P_{D^*_{d_1}}$ — $(d_1 \times m)$-вимірна матриця, яка складається з повної системи d_1 лінійно незалежних рядків матриці-проектора P_{D^*}, D^+ — псевдообернена (за Муром – Пенроузом) [3] до D матриця.

Теорема 1. *Нехай* $\operatorname{rank} D = n_1$. *Система інтегро-диференціальних рівнянь (2) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли функція* $f(t)$ *задовольняє умову*

$$P_{D^*_{d_1}} \tilde{b} = 0.$$

При виконанні цієї умови система (2) має r_1*-параметричну сім'ю розв'язків*

$$x(t) = X_{r_1}(t)c_{r_1} + F(t), \quad F(t) = \tilde{f}(t) + \Psi_0(t)D^+\tilde{b}.$$

Отже, припустимо, що умова $P_{D^*_{d_1}} \tilde{b} = 0$ не виконується.

Виникає питання: чи можна за допомогою лінійного збурення звести систему (2) до розв'язної? А якщо можна, то якими повинні бути складові збурених матриць $K(t,s)$, $K_1(t,s)$ в інтегро-диференціальній системі (1), щоб вона стала розв'язною при довільних неоднорідностях $f(t) \in L_2[a,b]$?

2. Основний результат. Розв'язок системи (1) будемо шукати у класі вектор-функцій $x(t)$ таких, що

$$x = x(t,\varepsilon) : x(\cdot,\varepsilon) \in D_2[a,b], \quad \dot{x}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b], \quad x(t,\cdot) \in C(0,\varepsilon_0].$$

Буде показано, що існування розв'язку задачі (1) істотно залежить від $(d_1 \times r_1)$-вимірної матриці

$$B_0 := P_{D^*_{d_1}} \left(\int\limits_a^b \left[A(s) \int\limits_a^s \int\limits_a^b \left[K(\tau,s)X_{r_1}(s) + K_1(\tau,s)\dot{X}_{r_1}(s) \right] ds\, d\tau \; + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \; B(s) \int\limits_a^b \left[K(s,\tau)X_{r_1}(\tau) + K_1(s,\tau)\dot{X}_{r_1}(\tau) \right] d\tau \right] ds \right).$$

Теорема 2. *Нехай* $\operatorname{rank} B_0 = n_2 < d_1$ *і система інтегро-диференціальних рівнянь (1) зі збуренням задовольняє вказані вище умови так, що породжуюча* ($\varepsilon = 0$) *система (2) не є розв'язною. Тоді якщо виконується умова*

$$P_{B_0^*} P_{D_{d_1}^*} = 0, \tag{3}$$

то система (1) має ρ*-параметричну* ($\rho = n + m - n_1 - n_2$) *сім'ю розв'язків у вигляді збіжного ряду при фіксованому* $\varepsilon \in (0; \varepsilon_*]$:

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t, c_\rho) \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho \quad \forall t \in [a,b]. \tag{4}$$

Доведення. Для доведення даного факту застосуємо метод Вішика – Люстерника [4], який дозволяє знайти ефективні коефіцієнти умови виникнення розв'язків системи (1) для будь-якого $t \in [a,b]$ у вигляді частини ряду Лорана за степенями малого параметра ε :

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t, c_\rho) = \frac{x_{-1}(t, c_\rho)}{\varepsilon} + x_0(t, c_\rho) + \varepsilon x_1(t, c_\rho) + \varepsilon^2 x_2(t, c_\rho) + \ldots . \tag{5}$$

Підставимо ряд (5) у систему (1) і зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε.

При ε^{-1} для знаходження $x_{-1}(t)$ отримаємо однорідну систему

$$\dot{x}_{-1}(t) - \Phi(t) \int_a^b \left[A(s) x_{-1}(s) + B(s) \dot{x}_{-1}(s)\right] ds = 0.$$

Згідно з [3] однорідна система інтегро-диференціальних рівнянь завжди має r_1 лінійно незалежних розв'язків $x_{-1}(t, c_{-1}) = X_{r_1}(t) c_{-1}$, де r_1 — вимірний вектор, стовпчик $c_{-1} \in \in R^{r_1}$ буде визначено з умови розв'язності рівняння відносно $x_0(t)$.

При ε^0 для визначення $x_0(t)$ одержимо систему

$$\dot{x}_0(t) - \Phi(t) \int_a^b \left[A(s) x_0(s) + B(s) \dot{x}_0(s)\right] ds = f_{-1}(t), \tag{6}$$

де $f_{-1}(t) = f(t) + \int_a^b \left[K(t,s) x_{-1}(s, c_{-1}) + K_1(t,s) \dot{x}_{-1}(s, c_{-1})\right] ds$.

Умова розв'язності системи (6) має вигляд $P_{D_{d_1}^*} \tilde{b}_{-1} = 0$, де $\tilde{b}_{-1} = \int_a^b [A(s) \tilde{f}_{-1}(s) + +B(s) f_{-1}(s)]\, ds$, $\tilde{f}_{-1}(t) = \int_a^t f_{-1}(s)\, ds$. Підставимо значення $\tilde{b}_{-1}$ у вказану умову розв'язності:

$$P_{D^*_{d_1}} \left(\int\limits_a^b \left[A(s) \int\limits_a^s \int\limits_a^b \Big[K(\tau,s) X_{r_1}(s) + K_1(\tau, s\dot{X}_{r_1}(s) \Big] \, ds\, d\tau \; + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \; B(s) \int\limits_a^b \Big[K(s,\tau) X_{r_1}(\tau) + K_1(s,\tau)\dot{X}_{r_1}(\tau) \Big] \, d\tau \right] \, ds \right) \, c_{-1} =$$

$$= -P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Big[A(s) \tilde{f}(s) + B(s) f(s) \Big] \, ds.$$

Звідси отримаємо алгебраїчну систему відносно $c_{-1} \in R^{r_1}$:

$$B_0 c_{-1} = -P_{D^*_{d_1}} \tilde{b}, \tag{7}$$

де

$$B_0 := P_{D^*_{d_1}} \left(\int\limits_a^b \left[A(s) \int\limits_a^s \int\limits_a^b \Big[K(\tau,s) X_{r_1}(s) + K_1(\tau,s) \dot{X}_{r_1}(s) \Big] \, ds\, d\tau \; + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \; B(s) \int\limits_a^b \Big[K(s,\tau) X_{r_1}(\tau) + K_1(s,\tau)\dot{X}_{r_1}(\tau) \Big] \, d\tau \right] \, ds \right).$$

Для того щоб система (7) була розв'язною для довільних неоднорідностей $f(t) \in L_2[a;b]$, достатньо, щоб виконувалась умова $P_{B_0^*} P_{D^*_{d_1}} = 0$. Тоді

$$\bar{c}_{-1} := -B_0^+ P_{D^*_{d_1}} \tilde{b}, \quad c_{-1} = \bar{c}_{-1} + P_\rho c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho,$$

де B_0^+ — псевдообернена до B_0 матриця. У цьому випадку система відносно $x_{-1}(t)$ має ρ-параметричну сім'ю розв'язків

$$\bar{x}_{-1}(t, \bar{c}_{-1}) := X_{r_1}(t) \bar{c}_{-1}, \quad x_{-1}(t, c_\rho) = \bar{x}_{-1}(t, \bar{c}_{-1}) + X_{r_1}(t) P_\rho c_\rho \quad \forall c_\rho \in R^\rho.$$

Оскільки $\operatorname{rank} P_{B_0} = r_1 - \operatorname{rank} B_0 = r_1 - n_2 = n - m - n_1 - n_2 = \rho$, то $(r_1 \times r_1)$-вимірну матрицю P_{B_0} замінимо на $(r_1 \times \rho)$-вимірну матрицю P_ρ, яка складена із ρ лінійно незалежних стовпців матриці P_{B_0}, де P_{B_0} — ортопроектор, який проектує простір R^{r_1} на $\ker B_0$. Система (6) при умові $P_{B_0^*} P_{D^*_{d_1}} = 0$ має r_1-параметричну сім'ю розв'язків $x_0(t, c_0) = X_{r_1}(t) c_0 + F_{-1}(t)$, де c_0 — r_1-вимірний вектор констант, який буде однозначно визначено на наступному кроці з умови розв'язності системи для $x_1(t)$, $F_{-1}(t)$ — частинний розв'язок, $F_{-1}(t) = \tilde{f}_{-1}(t) + \Psi_0(t) B_0^+ \tilde{b}$. Методом підстановки отримаємо

$$\bar{F}_{-1}(t) := \tilde{f}(t) + \left(\int\limits_a^t \int\limits_a^b [K(\tau,s) X_{r_1}(s) + K_1(\tau,s)\dot{X}_{r_1}(s)] ds d\tau \right) \bar{c}_{-1} + \Psi_0(t) B_0^+ \tilde{b},$$

$$L(t) := \int\limits_a^b [K(t,s)X_{r_1}(s) + K_1(t,s)\dot{X}_{r_1}(s)]\, ds, \quad F_{-1}(t) = \bar{F}_{-1}(t) + L(t)P_\rho c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

При ε^1 для знаходження $x_1(t)$ отримаємо лінійну неоднорідну систему

$$\dot{x}_1(t) - \Phi(t)\int\limits_a^b [A(s)x_1(s) + B(s)\dot{x}_1(s)]\; ds = \int\limits_a^b [K(t,s)x_0(s) + K_1(t,s)\dot{x}_0(s)]\; ds.$$

Нехай $f_0(t) := \int_a^b [K(t,s)x_0(s) + K_1(t,s)\dot{x}_0(s)]\; ds$, тоді система матиме вигляд

$$\dot{x}_1(t) - \Phi(t)\int\limits_a^b [A(s)x_1(s) + B(s)\dot{x}_1(s)]\; ds = f_0(t). \tag{8}$$

Із умови розв’язності рівняння (8)

$$P_{D^*_{d_1}}\tilde{b_0} = 0, \tag{9}$$

де $\tilde{b_0} = \int_a^b \Big[A(s)\tilde{f}_0(s) + B(s)f_0(s)\Big]\; ds$, $\tilde{f}_0(t) = \int_a^t f_0(s)\, ds$, одержимо

$$P_{D^*_{d_1}}\tilde{b_0} = P_{D^*_{d_1}}\left(\int\limits_a^b \left[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b [K(\tau,s)x_0(s) + K_1(\tau,s)\dot{x}_0(s)]\; ds\, d\tau \; + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \; B(s)\int\limits_a^b [K(s,\tau)x_0(\tau) + K_1(s,\tau)\dot{x}_0(\tau)]\; d\tau\right]\; ds\right) = 0.$$

Врахувавши, що

$$x_0(t,c_0) = X_{r_1}(t)c_0 + F_{-1}(t),$$

$$M_{-1}(t) := \int\limits_a^b \Big[K(t,s)\bar{F}_{-1}(s) + K_1(t,s)\dot{\bar{F}}_{-1}(s)\Big]\; ds,$$

$$\tilde{M}_{-1}(t) = \int\limits_a^t M_{-1}(s) ds, \quad \tilde{L}(t) = \int\limits_a^t L(s)\, ds,$$

$$\tilde{b_0} = \left(\int\limits_a^b \Big[A(t)\tilde{L}(t) + B(t)L(t)\Big]\, dt\right) c_0 + \int\limits_a^b \Big[A(t)\tilde{M}_{-1}(t) + B(t)M_{-1}(t)\Big]\, dt +$$

$$+ \left(\int\limits_a^b \left[A(t)\int\limits_a^t \int\limits_a^b \Big[K(\tau,s)\tilde{L}(s) + K_1(\tau,s)L(s)\Big]\, ds\, d\tau \; + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \; B(t)\int\limits_a^b \Big[K(t,s)\tilde{L}(s) + K_1(t,s)L(s)\Big]\, ds\right] dt\right) P_\rho\, c_\rho,$$

і підставивши $\tilde{b}_0$ в умову (9), отримаємо алгебраїчну систему відносно c_0

$$B_0 c_0 = -P_{D^*_{d_1}} \left(\int\limits_a^b \Big[A(t)\tilde{M}_{-1}(t) + B(t)M_{-1}(t)\Big]\, dt + \right.$$

$$+ \left(\int\limits_a^b \left[A(t)\int\limits_a^t \int\limits_a^b \Big[K(\tau,s)\tilde{L}(s) + K_1(\tau,s)L(s)\Big]\, ds\, d\tau \; + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \; B(t)\int\limits_a^b \Big[K(t,s)\tilde{L}(s) + K_1(t,s)L(s)\Big]\, ds\right] dt\right) P_\rho c_\rho\right),$$

яка при виконанні умови $P_{B_0^*}P_{D^*_{d_1}} = 0$ має ρ-параметричну сім'ю розв'язків

$$\bar{c}_0 := B_0^+ P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Big[A(t)\tilde{M}_{-1}(t) + B(t)M_{-1}(t)\Big]\, dt,$$

$$D_0 := E_{r_1} - B_0^+ P_{D^*_{d_1}} \left(\int\limits_a^b \left[A(t)\int\limits_a^t \int\limits_a^b \Big[K(\tau,s)\tilde{L}(s) + K_1(\tau,s)L(s)\Big]\, ds\, d\tau \; + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \; B(t)\int\limits_a^b \Big[K(t,s)\tilde{L}(s) + K_1(t,s)L(s)\Big]\, ds\right] dt\right),$$

$$c_0 = \bar{c}_0 + D_0 P_\rho c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

Тоді система (6) має ρ-параметричну сім'ю розв'язків

$$\bar{x}_0(t,\bar{c}_0) := X_{r_1}(t)\bar{c}_0 + \bar{F}_{-1}(t,\bar{c}_{-1}), \quad \bar{X}_0(t) := X_{r_1}(t)D_0 + \tilde{L}(t),$$

$$x_0(t,c_\rho) = \bar{x}_0(t,\bar{c}_0) + \bar{X}_0(t)P_\rho c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

Система (8) при виконанні умови $P_{B_0^*}P_{D_{d_1}^*} = 0$ має r_1-параметричну сім'ю розв'язків $x_1(t,c_1) = X_{r_1}(t)c_1 + F_0(t)$, де $F_0(t) = \tilde{f_0}(t) + \Psi_0(t)B_0^+\tilde{b_0}$ — частинний розв'язок, c_1 — r_1-вимірний вектор констант, який буде однозначно визначено на наступному кроці з умови розв'язності рівняння для $x_2(t)$.

Як і у попередньому випадку, отримаємо

$$\bar{F}_0(t) := \left(\tilde{L}(t) + \Psi_0(t)B_0^+\int\limits_a^b\left[A(t)\tilde{L}(t) + B(t)L(t)\right]\,dt\right)\bar{c}_0 +$$

$$+\left(\tilde{M}_{-1}(t) + \Psi_0(t)B_0^+\int\limits_a^b\left[A(t)\tilde{M}_{-1}(t) + B(t)M_{-1}(t)\right]\,dt\right),$$

$$H_0(t) := \int\limits_a^t\int\limits_a^b\left[K(\tau,s)\bar{X}_0(s) + K_1(\tau,s)\dot{\bar{X}}_0(s)\right]\,ds\,d\tau +$$

$$+\,\Psi_0(t)B_0^+\left(\int\limits_a^b\left[A(t)\int\limits_a^t\int\limits_a^b\left[K(\tau,s)\bar{X}_0(s) + K_1(\tau,s)\dot{\bar{X}}_0(s)\right]\,ds\,d\tau\; +\right.\right.$$

$$\left.\left. +\; B(t)\int\limits_a^b\left[K(t,s)\bar{X}_0(s) + K_1(t,s)\dot{\bar{X}}_0(s)\right]ds\right]\,dt\right),$$

$$F_0(t) = \bar{F}_0(t) + H_0(t)P_\rho c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

При ε^2 для знаходження $x_2(t)$ отримаємо лінійну неоднорідну систему

$$\dot{x}_2(t) - \Phi(t)\int\limits_a^b[A(s)x_2(s) + B(s)\dot{x}_2(s)]\,ds = \int\limits_a^b[K(t,s)x_1(s) + K_1(t,s)\dot{x}_1(s)]\,ds.$$

Нехай $f_1(t) = \int_a^b[K(t,s)x_1(s) + K_1(t,s)\dot{x}_1(s)]\,ds$, тоді система матиме вигляд

$$\dot{x}_2(t) - \Phi(t)\int\limits_a^b[A(s)x_2(s) + B(s)\dot{x}_2(s)]\,ds = f_1(t). \tag{10}$$

Методом підстановки знаходимо

$$f_1(s) = L(s)c_1 + \int\limits_a^b\left[K(\tau,s)F_0(s) + K_1(\tau,s)\dot{F}_0(s)\right]\,ds, \quad \tilde{f}_1(t) = \int\limits_a^t f_1(s)\,ds,$$

$$\tilde{b_1} = \int\limits_a^b \Big[A(t)\tilde{f}_1(t) + B(s)f_1(t)\Big]\, dt = \left(\int\limits_a^b \Big[A(t)\tilde{L}(t) + B(t)L(t)\Big]\, dt\right) c_1 +$$

$$+ \left(\int\limits_a^b \left[A(t)\int\limits_a^t\int\limits_a^b \Big[K(\tau,s)F_0(s) + K_1(\tau,s)\dot{F}_0(s)\Big]\, ds\, d\tau \; + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \; B(t)\int\limits_a^b \Big[K(t,s)F_0(s) + K_1(t,s)\dot{F}_0(s)\Big]\, ds\right] dt\right).$$

Із умови розв'язності системи (10) $P_{D^*_{d_1}}\tilde{b_1} = 0$ отримаємо алгебраїчну систему відносно c_1 :

$$B_0c_1 = -P_{D^*_{d_1}}\left(\int\limits_a^b \left[A(t)\int\limits_a^t\int\limits_a^b \Big[K(\tau,s)F_0(s) + K_1(\tau,s)\dot{F}_0(s)\Big]\, ds\, d\tau \; + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \; B(t)\int\limits_a^b \Big[K(t,s)F_0(s) + K_1(t,s)\dot{F}_0(s)\Big]\, ds\right] dt\right),$$

яка буде розв'язною при виконанні умови $P_{B_0^*}P_{D^*_{d_1}} = 0$ і матиме ρ-параметричну сім'ю розв'язків. Нехай

$$M_0(t) := \int\limits_a^b \Big[K(t,s)\bar{F}_0(s) + K_1(t,s)\dot{\bar{F}}_0(s)\Big]\, ds, \quad \tilde{M}_0(t) = \int\limits_a^t M_0(\tau)d\tau,$$

$$\bar{c}_1 := B_0P_{D^*_{d_1}}\left(\int\limits_a^b \Big[A(t)\tilde{M}_0(t) + B(t)M_0(t)\Big]\, dt\right),$$

$$D_1 := E_{r_1} - B_0^+P_{D^*_{d_1}}\left(\int\limits_a^b \left[A(t)\int\limits_a^t\int\limits_a^b \Big[K(\tau,s)H_0(s) + K_1(\tau,s)\dot{H}_0(s)\Big]\, ds\, d\tau + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \; B(t)\int\limits_a^b \Big[K(t,s)H_0(s) + K_1(t,s)\dot{H}_0(s)\Big]\, ds\right] dt\right).$$

Тоді $c_1 = \bar{c}_1 + D_1P_\rho c_\rho \;\; \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$. Таким чином, одержимо

$$\bar{x}_1(t,\bar{c}_1) := X_{r_1}(t)\bar{c}_1 + \bar{F}_0(t), \quad \bar{X}_1(t) := X_{r_1}D_1 + H_0(t).$$

Розв'язок системи (8) має вигляд

$$x_1(t, c_\rho) = \bar{x}_1(t, \bar{c}_1) + \bar{X}_1(t) P_\rho c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

Аналогічно розв'язок системи (10) має вигляд $x_2(t, c_2) = X_{r_1}(t)c_2 + F_1(t)$, де $F_1(t)$ — частинний розв'язок, $F_1(t) = \tilde{f}_1(t) + \Psi_0(t)B_0^+\tilde{b_1}$, c_2 — r_1-вимірний вектор констант, який буде однозначно визначено на наступному кроці з умови розв'язності системи для $x_3(t)$. Тоді маємо

$$\bar{F}_1(t) = \left(\tilde{L}(t) + \Psi_0(t)B_0^+ \int\limits_a^b \Big[A(t)\tilde{L}(t) + B(t)L(t)\Big]\, dt\right)\bar{c}_1 +$$

$$+ \left(\tilde{M}_0(t) + \Psi_0(t)B_0^+ \int\limits_a^b \Big[A(t)\tilde{M}_0(t) + B(t)M_0(t)\Big]\, dt\right),$$

$$H_1(t) := \tilde{L}(t)D_1 + \int\limits_a^t \int\limits_a^b \Big[K(\tau, s)H_0(s) + K_1(\tau, s)\dot{H}_0(s)\Big]\, ds\, d\tau +$$

$$+ \Psi_0(t)B_0^+ D_1 \int\limits_a^b \Big[A(t)\tilde{L}(t) + B(t)L(t)\Big]\, dt +$$

$$+ \Psi_0(t)B_0^+ \left(\int\limits_a^b \left[A(t) \int\limits_a^t \int\limits_a^b \Big[K(\tau, s)H_0(s) + K_1(\tau, s)\dot{H}_0(s)\Big]\, ds\, d\tau\ +\right.\right.$$

$$\left.\left. +\ B(t) \int\limits_a^b \Big[K(\tau, s)H_0(s) + K_1(\tau, s)\dot{H}_0(s)\Big]\, ds\right]\, dt\right),$$

$$F_1(t) = \bar{F}_1(t) + H_1(t)P_\rho c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

Нехай

$$M_1(t) := \int\limits_a^b \Big[K(t, s)\bar{F}_1(s) + K_1(t, s)\dot{\bar{F}}_1(s)\Big]\, ds, \quad \tilde{M}_1(t) = \int\limits_a^t M_1(\tau)d\tau,$$

$$\bar{c}_2 := B_0 P_{D_{d_1}^*} \left(\int\limits_a^b \Big[A(t)\tilde{M}_1(t) + B(t)M_1(t)\Big]\, dt\right),$$

$$D_2 := E_{r_1} - B_0^+ P_{D_{d_1}^*} \left(\int\limits_a^b \left[A(t) \int\limits_a^t \int\limits_a^b \left[K(\tau,s) H_1(s) + K_1(\tau,s) \dot{H}_1(s) \right] ds\, d\tau \ + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \ B(t) \int\limits_a^b \left[K(t,s) H_1(s) + K_1(t,s) \dot{H}_1(s) \right] ds \right] dt \right).$$

Таким чином, $c_2 = \bar{c}_2 + D_2 P_\rho c_\rho \ \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$. Загальний розв'язок системи (9) має вигляд

$$x_2(t, c_\rho) = \bar{x}_2(t, \bar{c}_2) + \bar{X}_2(t) P_\rho c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho,$$

де $\bar{x}_2(t, \bar{c}_2) := X_{r_1}(t)\bar{c}_2 + \bar{F}_1(t)$, $\bar{X}_2(t) := X_{r_1} D_2 + H_1(t)$.

Використовуючи метод математичної індукції, легко показати, що для знаходження коефіцієнтів ряду Лорана $x_k(t, c_k)$ на кожному наступному кроці отримуємо інтегро-диференціальну систему

$$\dot{x}_k(t) - \Phi(t) \int\limits_a^b \left[A(s) x_k(s) + B(s) \dot{x}_k(s) \right] ds = f_{k-1}(t), \tag{11}$$

де $f_{k-1}(t) = \int_a^b \left[K(t,s) x_{k-1}(s) + K_1(t,s) \dot{x}_{k-1}(s) \right] ds$.

Якщо умова $P_{B_0^*} P_{D_{d_1}^*} = 0$ виконується, то система (11) має r_1-параметричну сім'ю розв'язків

$$x_k(t, c_k) = X_{r_1}(t) c_k + F_{k-1}(t), \tag{12}$$

де складові елементи (12) визначаються із такої ітераційної процедури:

$$\bar{F}_{k-1}(t) = \left(\tilde{L}(t) + \Psi_0(t) B_0^+ \int\limits_a^b \left[A(t)\tilde{L}(t) + B(t) L(t) \right] dt \right) \bar{c}_{k-1} +$$

$$+ \left(\tilde{M}_{k-2}(t) + \Psi_0(t) B_0^+ \int\limits_a^b \left[A(t) \tilde{M}_{k-2}(t) + B(t) M_{k-2}(t) \right] dt \right),$$

$$H_{k-1}(t) := \tilde{L}(t)D_{k-1} + \int\limits_a^t \int\limits_a^b \Big[K(\tau,s)H_{k-2}(s) + K_1(\tau,s)\dot{H}_{k-2}(s)\Big]\, ds\, d\tau +$$

$$+ \Psi_0(t)B_0^+ D_{k-1} \int\limits_a^b \Big[A(t)\tilde{L}(t) + B(t)L(t)\Big]\, dt +$$

$$+ \Psi_0(t)B_0^+ \left(\int\limits_a^b \left[A(t) \int\limits_a^t \int\limits_a^b \Big[K(\tau,s)H_{k-2}(s) + K_1(\tau,s)\dot{H}_{k-2}(s)\Big]\, ds\, d\tau \; + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \; B(t) \int\limits_a^b \Big[K(\tau,s)H_{k-2}(s) + K_1(\tau,s)\dot{H}_{k-2}(s)\Big]\, ds \right] dt \right),$$

$$F_{k-1}(t) = \bar{F}_{k-1}(t) + H_{k-1}(t)P_\rho c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

Нехай

$$M_{k-1}(t) := \int\limits_a^b \Big[K(t,s)\bar{F}_{k-1}(s) + K_1(t,s)\dot{\bar{F}}_{k-1}(s)\Big]\, ds, \quad \tilde{M}_{k-1}(t) = \int\limits_a^t M_{k-1}(\tau) d\tau,$$

тоді

$$\bar{c}_k := -B_0 P_{D^*_{d_1}} \left(\int\limits_a^b \Big[A(t)\tilde{M}_{k-1}(t) + B(t)M_{k-1}(t)\Big]\, dt \right),$$

$$D_k := E_{r_1} - B_0^+ P_{D^*_{d_1}} \left(\int\limits_a^b \left[A(t) \int\limits_a^t \int\limits_a^b \Big[K(\tau,s)H_{k-1}(s) + K_1(\tau,s)\dot{H}_{k-1}(s)\Big]\, ds\, d\tau \; + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \; B(t) \int\limits_a^b \Big[K(t,s)H_{k-1}(s) + K_1(t,s)\dot{H}_{k-1}(s)\Big]\, ds \right] dt \right).$$

Таким чином, $c_k = \bar{c}_k + D_k P_\rho c_\rho \;\; \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$. Загальний розв'язок системи (11) має вигляд

$$x_k(t, c_\rho) = \bar{x}_k(t, \bar{c}_k) + \bar{X}_k(t) P_\rho c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho,$$

де $\bar{x}_k(t,\bar{c}_k) := X_{r_1}(t)\bar{c}_k + \bar{F}_{k-1}(t)$, $\bar{X}_k(t) := X_{r_1} D_k + H_{k-1}(t)$.

Отже, при виконанні умови $P_{B_0^*} P_{D^*_{d_1}} = 0$ система (1) має ρ-параметричну сім'ю розв'язків при будь-яких $f(t) \in L_2[a;b]$ у вигляді ряду (4), який збігається при фіксованих $\varepsilon \in (0;\varepsilon_*]$:

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k \left(\bar{x}_k(t,\bar{c}_k) + \bar{X}_k(t)P_\rho c_\rho \right) \quad \forall c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

Доведемо збіжність даного ряду, мажоруючи відповідні ряди:

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k \bar{x}_k(t,\bar{c}_k) + \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k \bar{X}_k(t) P_\rho c_\rho.$$

Спочатку доведемо збіжність ряду $\sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k \bar{x}_k(t,\bar{c}_k)$. Оцінимо коефіцієнти $\bar{x}_k(t,\bar{c}_k)$ і $\bar{c}_k$ для $t \in [a;b]$. Нехай

$$\alpha = \|A(t)\|, \quad \beta = \|B(t)\|, \quad \beta_0 = \|B_0(t)\|, \quad p = \|P_{D^*_{d_1}}\|,$$

$$k = \|K(t,s)\|, \quad k_1 = \|K_1(t,s)\|, \quad \psi_0 = \|\Psi_0(t)\|, \quad \omega = \|X_{r_1}(t)\|, \quad \gamma = \alpha+\beta, \quad \gamma_1 = k+k_1.$$

Далі подамо $\|\bar{x}_k(t,\bar{c}_k)\|$ через $\|\bar{x}_0(t,\bar{c}_0)\|$. На першому кроці отримаємо

$$\bar{x}_1(t,\bar{c}_1) = X_{r_1}\bar{c}_1 + \bar{F}_0(t,\bar{c}_0),$$

$$\|\bar{F}_0(t,\bar{c}_0)\| \le \gamma_1(1+\psi_0\beta_0\gamma)\|\bar{x}_0(t,\bar{c}_0)\|.$$

Таким чином, $\|\bar{c}_1\| \le \beta_0 p\gamma_1^2\gamma(1+\psi_0\beta_0\gamma)\|\bar{x}_0(t,\bar{c}_0)\|$, тоді

$$\|\bar{x}_1(t,\bar{c}_1)\| \le \omega\|\bar{c}_1\| + \|\bar{F}_0(t,\bar{c}_0)\| \le (\omega\beta_0 p\gamma_1\gamma+1)(1+\psi_0\beta_0\gamma)\gamma_1\|\bar{x}_0(t,\bar{c}_0)\|.$$

Відповідно

$$\|\bar{c}_2\| \le \beta_0 p\gamma_1\gamma\|\bar{F}_1(t,\bar{c}_1)\| \le \beta_0 p\gamma_1^3\gamma(1+\psi_0\beta_0\gamma)^2(\omega\beta_0 p\gamma_1\gamma+1)\|\bar{x}_0(t,\bar{c}_0)\|,$$

$$\|\bar{x}_2(t,\bar{c}_2)\| \le \omega\|\bar{c}_2\| + \|\bar{F}_1(t,\bar{c}_1)\| \le \left[(\omega\beta_0 p\gamma_1\gamma+1)(1+\psi_0\beta_0\gamma)\gamma_1\right]^2\|\bar{x}_0(t,\bar{c}_0)\|.$$

Продовжуючи цей процес, легко помітити, що для коефіцієнтів $\bar{c}_k \in \mathbb{R}^{r_1}$, $\bar{x}_k(t,\bar{c}_k)$ справджуються оцінки

$$\|\bar{c}_k\| \le \beta_0 p\gamma_1\gamma\gamma_1^{k+1}(1+\psi_0\beta_0\gamma)^k(\omega\beta_0 p\gamma_1\gamma+1)\|\bar{x}_0(t,\bar{c}_0)\|,$$

$$\|\bar{x}_k(t,\bar{c}_k)\| \le \left[\gamma_1(\omega\beta_0 p\gamma_1\gamma+1)(1+\psi_0\beta_0\gamma)\right]^k\|\bar{x}_0(t,\bar{c}_0)\|, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Нехай $N_1 = \gamma_1(\omega\beta_0 p\gamma_1\gamma+1)(1+\psi_0\beta_0\gamma)$, тоді для будь-якого $t \in [a,b]$ відповідний мажорантний ряд матиме вигляд $\varepsilon^{-1}\|\bar{x}_{-1}(t,\bar{c}_{-1})\| + \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^k N_1^k\|\bar{x}_0(t,\bar{c}_0)\|$. При цьому $\|\bar{x}_{-1}(t,\bar{c}_{-1})\|$ та $\|\bar{x}_0(t,\bar{c}_0)\|$ обмежені. Тому для будь-якого $t \in [a,b]$ і фіксованого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_*]$, де $\varepsilon_* < \dfrac{1}{N_1}$, даний ряд рівномірно збіжний. Розглянемо ряд $\sum_{k=-1}^{\infty}\varepsilon^k\bar{X}_k(t)P_\rho c_\rho$. Подамо $\|\bar{X}_k(t)\|$ через $\|\bar{X}_0(t)\|$. На першому кроці отримаємо

$$\bar{X}_1(t) = X_{r_1}D_1 + H_0(t,s), \quad \|H_0(t)\| \le \gamma_1(1+\psi_0\beta_0\gamma)\|\bar{X}_0(t)\|,$$

тоді

$$\|\bar{X}_1(t)\| \le (\omega\gamma\gamma_1+1)\|H_0(t)\| \le (\omega\gamma\gamma_1+1)(1+\psi_0\beta_0\gamma)\gamma_1\|\bar{X}_0(t)\|.$$

На другому кроці

$$\|\bar{X}_2(t)\| \leq (\omega\gamma\gamma_1 + 1)\|H_1(t)\| \leq (\omega\gamma\gamma_1 + 1)(1 + \psi_0\beta_0\gamma)\gamma_1\|\bar{X}_1(t)\| \leq$$
$$\leq \left[(\omega\gamma\gamma_1 + 1)(1 + \psi_0\beta_0\gamma)\gamma_1\right]^2 \|\bar{X}_0(t)\|.$$

Продовжуючи цей процес, бачимо, що для коефіцієнтів $\bar{X}_k(t)$ справджуються оцінки

$$\|\bar{X}_k(t)\| \leq \left[(\omega\gamma\gamma_1 + 1)(1 + \psi_0\beta_0\gamma)\gamma_1\right]^k \|\bar{X}_0(t)\|, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Нехай $N_2 = (\omega\gamma\gamma_1 + 1)\,(1 + \psi_0\beta_0\gamma)\gamma_1$, тоді для будь-якого $t \in [a, b]$ маємо

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k \bar{X}_k(t) P_\rho c_\rho \leq \left[\varepsilon^{-1}\|\bar{X}_{-1}(t)\| + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i N_2^i \|\bar{X}_0(t)\|\right] \|P_\rho c_\rho\|.$$

При цьому $\|\bar{X}_{-1}(t)\|$ та $\|\bar{X}_0(t)\|$ обмежені. Тому при будь-якому $t \in [a, b]$ і фіксованому $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, де $\varepsilon_* < \dfrac{1}{N_2}$, даний ряд рівномірно збіжний.

Виберемо $\varepsilon_* < \min\left(\dfrac{1}{N_1}, \dfrac{1}{N_2}\right)$, тоді ряд (4) буде рівномірно збіжним:

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k (\bar{x}_k(t, \bar{c}_k) + \bar{X}_k(t) P_\rho c_\rho) \leq \varepsilon^{-1}\left[\|\bar{x}_{-1}(t, \bar{c}_{-1})\| + \|\bar{X}_{-1}(t)\|\|P_\rho c_\rho\|\right] +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k\, N^k \left[\|\bar{x}_0(t, \bar{c}_0)\| + \|\bar{X}_0(t)\|\|P_\rho c_\rho\|\right] \ \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_*] \ \ \forall c_\rho \in R^\rho.$$

Аналогічно показуємо збіжність ряду з похідних.

Зауваження 1. Умова (3) є достатньою умовою існування розв'язку системи (1). Якщо умова (3) не виконується, то розв'язок системи (1) у вигляді ряду (4) не існує, але може існувати у вигляді частини ряду Лорана типу (4) за степенями $-2, -3, \ldots$ малого параметра ε.

Зауваження 2. Якщо додатково вимагати виконання умови $P_{B_0} = 0$, то система (1) буде мати єдиний розв'язок у вигляді збіжного ряду

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k \bar{x}_k(t, \bar{c}_k).$$

Автор висловлює подяку професору О. А. Бойчуку за постановку задачі та увагу до роботи.

1. *Самойленко А. М., Бойчук О. А., Кривошея С. А.* Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 11. — С. 1576 – 1579.

2. *Кривошея С. А.* Умови розв'язності нетерових крайових задач для інтегро-диференціальних систем // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. — 2001. — Вип. 4.

3. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht, The Netherlands: Koninklijke Brill NV, 2004.

4. *Vishik M. I., Lyusternik I. A.* Solution of some perturbation problems for matrices, self-adjoint and nonself-adjoint differential equations // Uspechi Mat. Nauk. — 1960. — **15**, № 3. — S. 3–80.

Одержано 02.12.11