УДК 517.9

ГЛОБАЛЬНИЙ АТРАКТОР ПАРАБОЛІЧНОГО ВКЛЮЧЕННЯ З НЕАВТОНОМНОЮ ГОЛОВНОЮ ЧАСТИНОЮ*

О. В. Капустян, Т. Б. Шкляр

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, просп. Акад. Глушкова, 2, корп. 7

On solutions of an evolution inclusion with a nonautonomous parabolic operator, we construct a nonautonomous multivalued dynamical system for which we prove existence of an invariant, connected, stable, global attractor in the phase space.

На решениях эволюционного включения с неавтономным параболическим оператором построена неавтономная многозначная динамическая система, для которой доказано существование в фазовом пространстве инвариантного, связного, устойчивого глобального аттрактора.

Вступ. Теорія глобальних атракторів нескінченновимірних динамічних систем для широкого класу коректно розв'язних нелінійних дисипативних задач математичної фізики дає відповідь на питання про якісну поведінку розв'язків у термінах дослідження властивостей і структури мінімальних притягуючих множин у фазовому просторі [1 – 5]. Розвинення цих результатів для систем, для яких поряд з результатами про глобальну розв'язність невідомими або неприродними є результати про єдиність розв'язку задачі Коші, було здійснено в роботах [6, 7], для неавтономного випадку — у роботі [8]. Одним із основних застосувань отриманих результатів є диференціальні рівняння з багатозначною правою частиною [9, 10], для яких перші результати в цьому напрямку для автономного випадку було одержано в [11]. Для включень субдиференціального типу з неавтономним неліпшицевим багатозначним збуренням існування глобального атрактора досліджено в [12, 13]. Слід зазначити, що всі одержані в цьому напрямку результати як для нелінійних рівнянь [8, 17], так і для включень [12, 13] стосувались еволюційних об'єктів з незалежною від часу головною частиною, неавтономність яких визначалась наявністю часової змінної в нелінійному або багатозначному доданку. Оскільки при побудові неавтономної динамічної системи виникає сім'я параметризованих задач і основним моментом при доведенні у цієї сім'ї глобального атрактора є перевірка компактності множини розв'язків (див. теорему 1), а отже, обґрунтування граничних переходів у тих доданках рівняння або включення, де є неавтономний параметр, то наявність такого параметра в головній частині оператора не дає можливості використати результати робіт [12, 13].

У цій роботі з використанням G-збіжності параболічних операторів для включень з неавтономною головною частиною побудовано неавтономну багатозначну динамічну систему, для якої в фазовому просторі доведено існування інваріантного, зв'язного, стійкого глобального атрактора.

Постановка неавтономної задачі. Спочатку в метричному просторі (X, ρ) означимо основний об'єкт досліджень. Далі через $P(X)$ $(\beta(X))$ будемо позначати сукупність усіх

* Виконано при частковій підтримці гранта Президента №GP/F32/0029.

непорожніх (непорожніх обмежених) підмножин X, $\mathbb{R}_d = \{(t,\tau) \in \mathbb{R}^2 | t \geq \tau\}$, $O_\varepsilon(A) = \{x \in X | \inf_{y\in A} \rho(x,y) < \varepsilon\}$ для $A \subset X$.

Означення 1. *Відображення $U : \mathbb{R}_d \times X \mapsto P(X)$ називається багатозначним процесом (БП) на X, якщо:*

1) $U(\tau,\tau,x) = x \; \forall x \in X \; \forall \tau \in \mathbb{R}$;

2) $U(t,\tau,x) \subset U(t,s,U(s,\tau,x)) \; \forall (t,s),(s,\tau) \in \mathbb{R}_d \; \forall x \in X$, *де* $U(t,s,A) = \bigcup_{x\in A} U(t,s,x)$ *для* $A \subset X$.

БП будемо називати строгим, якщо $U(t,\tau,x) = U(t,s,U(s,\tau,x)) \; \forall (t,s),(s,\tau) \in \mathbb{R}_d \; \forall x \in X$.

Розглянемо сім'ю БП $\{U_\sigma | \sigma \in \Sigma\}$, де Σ — деяка множина, і означимо відображення

$$U_\Sigma(t,\tau,x) = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma(t,\tau,x).$$

Означення 2. *Компактна множина $\Theta_\Sigma \subset X$ називається рівномірним глобальним атрактором сім'ї БП $\{U_\sigma | \sigma \in \Sigma\}$, якщо:*

1) Θ_Σ *є рівномірно притягуючою множиною, тобто для довільних* $\tau \in \mathbb{R}$, $B \in \beta(X)$ *і довільного* $\varepsilon > 0$ *існує* $T = T(\tau,B,\varepsilon) \geq \tau$ *таке, що*

$$U_\Sigma(t,\tau,B) \subset O_\varepsilon(\Theta_\Sigma) \quad \forall\, t \geq T;$$

2) *для довільної рівномірно притягуючої множини* Y *виконується* $\Theta_\Sigma \subset \mathrm{cl}_X Y$.

Глобальний атрактор $\Theta_\Sigma \subset X$ *називається інваріантним відносно сім'ї БП* $\{U_\sigma | \sigma \in \Sigma\}$, *якщо* $\forall\, (t,\tau) \in \mathbb{R}_d : \Theta_\Sigma = U_\Sigma(t,\tau,\Theta_\Sigma)$.

Глобальний атрактор $\Theta_\Sigma \subset X$ *називається стійким відносно сім'ї БП* $\{U_\sigma | \sigma \in \Sigma\}$, *якщо* $\forall\, \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \; \forall (t,\tau) \in \mathbb{R}_d : U_\Sigma(t,\tau,O_\delta(\Theta_\Sigma)) \subset O_\varepsilon(\Theta_\Sigma)$.

Наступні достатні умови існування атрактора випливають з теорем 22–25 [8].

Теорема 1. *Нехай задано сім'ю строгих БП* $\{U_\sigma | \sigma \in \Sigma\}$, Σ — *компакт,* $\{T(h) : \Sigma \mapsto \Sigma\}_{h\in\mathbb{R}}$ — *неперервна група відображень, до того ж*

$$U_\sigma(t+h,\tau+h,x) = U_{T(h)\sigma}(t,\tau,x) \;\; \forall\, (t,\tau) \in \mathbb{R}_d, \;\; h \in \mathbb{R}_+, \;\; x \in X, \;\; \sigma \in \Sigma.$$

Тоді якщо виконуються умови

$$\exists\, B_0 \in \beta(H) \; \forall\, B \in \beta(H) \; \exists\, T = T(B) \; \forall\, t \geq T : U_\Sigma(t,0,B) \subset B_0, \tag{1}$$

$$\forall\, B \in \beta(H) \; \forall\, t > 0 : U_\Sigma(t,0,B) \quad - \quad \textit{передкомпакт в} \quad H, \tag{2}$$

$$\forall\, t_n \to t_0 \; \forall\, \sigma_n \to \sigma_0 \; \forall\, \eta_n \to \eta_0 \; \forall\, \xi_n \in U_{\sigma_n}(t_n,0,\eta_n)$$

$$\textit{принаймні по підпослідовності} \quad \xi_n \to \xi \in U_{\sigma_0}(t_0,0,\eta_0), \tag{3}$$

то існує інваріантний, стійкий глобальний атрактор $\Theta_\Sigma \subset X$. *Якщо, крім того,* Σ *зв'язна,* $\Theta_\Sigma \subset B_1 \in \beta(X)$, B_1 *зв'язна і для будь-яких* $(t,\tau) \in \mathbb{R}_d$, $x \in X$, $\sigma \in \Sigma$ $U_\sigma(t,\tau,x)$ *зв'язна, то* Θ_Σ — *зв'язна множина.*

Перейдемо до постановки навтономної задачі. Нехай маємо триплет гільбертових просторів $V \subset H \subset V^*$ з компактними, щільними вкладеннями, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — канонічна двоїстість між V та V^*. Через $\|\cdot\|$ і $(\cdot,\cdot)$ позначимо норму і скалярний добуток у просторі H, через $\|\cdot\|_V$ — норму в просторі V. Будемо вважати, що виконується нерівність $\|u\|^2 \le \le C\|u\|_V^2$.

Розглянемо сім'ю $\{A(t) : V \to V^*\}_{t\in\mathbb{R}}$ лінійних неперервних операторів, які для констант $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ та для всіх $t \in \mathbb{R}$ задовольняють такі умови [14]:

$$\forall u \in V : \langle A(t)u, u\rangle \ge \lambda_1 \|u\|_V^2 , \tag{4}$$

$$\forall u, v \in V : |\langle A(t)u, v\rangle| \le \lambda_2^{\frac{1}{2}} \langle A(t)u, u\rangle^{\frac{1}{2}} \|v\|_V , \tag{5}$$

$$\forall u, v \in V : t \mapsto \langle A(t)u, v\rangle \quad \text{є вимірним.} \tag{6}$$

З умови (5) маємо оцінку $|\langle A(t)u, v\rangle| \le \lambda_2\|u\|_V\|v\|_V$. Тоді за лемою Лакса – Мільграма для будь-якого $t \in \mathbb{R}$ існує $A^{-1}(t) \in L(V^*, V)$, до того ж для норм операторів справджуються оцінки [14]

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|A^{-1}(t)\| \le \frac{1}{\lambda_1}, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} \|A(t)\| \le \lambda_2. \tag{7}$$

Нехай багатозначне збурення $F : H \mapsto P(H)$ задовольняє умови:

$$\text{для будь-якого} \quad y \in H \quad F(y) \quad — \quad \text{опукла, замкнена, обмежена підмножина} \quad H; \tag{8}$$

F є w-напівнеперервним зверху (w-н.н.зв.) і має не більш як лінійне зростання, тобто

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \forall y_0 \in H\, \exists \delta > 0,\ \ y \in O_\delta(y_0) : F(y) \subset O_\varepsilon(F(y_0)), \tag{9}$$

$$\exists\, C_1, C_2 \ge 0\, \forall\, y \in H : \|F(y)\| \le C_1 + C_2\|y\|. \tag{10}$$

Розглянемо задачу

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A(t)y \in F(y) + h(t), \\ &y(\tau) = y_\tau, \end{aligned} \tag{11}$$

де $h \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$, оператор A і багатозначна функція F задовольняють умови (4) – (6), (8) – (10). У роботі показано, що для будь-якого $y_\tau \in H$ існує принаймні один розв'язок

(11) на $(\tau, +\infty)$ в тому сенсі, що існують $y \in L^2_{\mathrm{loc}}(\tau, +\infty; V)$ з $\dfrac{dy}{dt} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\tau, +\infty; V^*)$ та $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\tau, +\infty; H)$, $f(t) \in F(y(t))$ майже скрізь такі, що

$$\frac{dy}{dt} + A(t)y = f(t) + h(t) \quad \text{майже скрізь},$$

$$y(\tau) = y_\tau.$$

Мета роботи — показати, що за додаткової умови дисипативності та неперервності операторнозначної функції $t \mapsto A(t)$ розв'язки задачі (11) породжують сім'ю БП, для якої у фазовому просторі H існує компактний, інваріантний, стійкий глобальний атрактор.

Властивості розв'язків. Дослідимо властивості розв'язків задачі (11) на довільному скінченному інтервалі (τ, T). Для цього розглянемо задачу

$$Py := \frac{dy}{dt} + A(t)y = f(t), \quad t \in (\tau, T),$$
$$y(\tau) = y_\tau, \tag{12}$$

де $A(t)$ задовольняє умови (4) – (6), $f \in L^2(\tau, T; H)$. Згідно з теоремою 3.4 [1, с. 74] задача (12) для будь-якого $y_\tau \in H$ має єдиний розв'язок у гільбертовому просторі

$$W(\tau, T) = \left\{ y | y \in L^2(\tau, T; V),\ \frac{dy}{dt} \in L^2(\tau, T; V^*) \right\},$$

і цей розв'язок, наслідуючи [15, с. 369], будемо позначати $y = P^{-1}(f, y_\tau)$.

Наступна лема встановлює неперервну залежність розв'язку (12) від коефіцієнтів A, f та початкових даних y_τ. Цей результат є відомим при фіксованому f [14, с. 20] (лема 3) та при сильно збіжних початкових даних [15, с. 370] (твердження 2.1).

Лема 1. *Нехай маємо послідовність задач (12) з операторами $A_n(t)$, що задовольняють умови (4) – (6) з константами, що не залежать від n, правими частинами $f_n \in L^2(\tau, T; H)$ та початковими даними $y_\tau^n \in H$. Нехай $P_n = \dfrac{d}{dt} + A_n \overset{G}{\to} P = \dfrac{d}{dt} + A$, $f_n \overset{w}{\to} f$ в $L^2(\tau, T; H)$, $y_\tau^n \overset{w}{\to} y_\tau$ в H. Тоді $y_n = P_n^{-1}(f_n, y_\tau^n) \to y = P^{-1}(f, y_\tau)$ в $C([\delta, T]; H)$ для будь-якого $\delta \in (\tau, T)$. Якщо ж $y_\tau^n \to y_\tau$ в H, то $y_n \to y$ в $C([\tau, T]; H)$.*

Доведення. З умови (4) маємо оцінку для $\tau \le s \le t \le T$

$$\|y_n(t)\|^2 + 2\lambda_1 \int_s^t \|y_n(p)\|_V^2\, dp \le \|y_n(s)\|^2 + 2 \int_s^t (f_n(p), y_n(p))\, dp. \tag{13}$$

З (13), обмеженості $\{f_n\}$ в $L^2(\tau, T; H)$, обмеженості $\{y_\tau^n\}$ в H та (7) маємо

$$\exists\, M > 0\ \forall\, n \ge 1 : \sup_{t \in [\tau, T]} \|y_n(t)\| + \int_\tau^T \|y_n(p)\|_V^2\, dp + \int_\tau^T \|\frac{dy_n}{dt}\|_{V^*}^2\, dp \le M. \tag{14}$$

Звідси існує $y \in W(\tau,T)$ таке, що по підпослідовності $y_n \xrightarrow{w} y$ в $W(\tau,T)$. Тоді внаслідок компактності вкладення $W(\tau,T) \subset L^2(\tau,T;H)$ маємо, що $y_n \to y$ в $L^2(\tau,T;H)$, а отже, $y_n(t) \to y(t)$ в H для майже всіх $t \in (\tau,T)$ і, крім того, $y_n(t_n) \xrightarrow{w} y(t_0)$ в H для $\forall t_n \to t_0 \in [\tau,T]$ [14, с. 20] (лема 3). Це дозволяє використати міркування [14, с. 24] (теорема 8) з заміною f на f_k і одержати $Py = f$, $y(\tau) = y_\tau$. Звідси, зокрема, випливає, що y задовольняє (13) з функцією f.

Тепер розглянемо функції

$$J_n(t) = \|y_n(t)\|^2 - 2\int\limits_\tau^t (f_n(p), y_n(p))\,dp, \quad J(t) = \|y(t)\|^2 - 2\int\limits_\tau^t (f(p), y(p))\,dp.$$

Ці функції на підставі (13) монотонно незростаючі, неперервні і $J_n(t) \to J(t)$ майже скрізь на (τ,T). Тоді $J_n(t) \to J(t)$ в $C([\delta,T])$ для будь-якого $\delta \in (\tau,T)$.

Нехай послідовність $\{t_n\} \subset [\delta,T]$ така, що

$$\max_{t\in[\delta,T]} \|y_n(t) - y(t)\| = \|y_n(t_n) - y(t_n)\|,$$

і будемо вважати, що по підпослідовності $t_n \to t_0$. Оскільки згідно з (14)

$$\int\limits_{t_0}^{t_n} |(f_n(p), y_n(p))|\,dp \le M\int\limits_{t_0}^{t_n} \|y_n(p)\|\,dp \to 0, \quad n \to +\infty,$$

то

$$\int\limits_\tau^{t_n} (f_n(p), y_n(p))\,dp \to \int\limits_\tau^{t_0} |(f(p), y(p))|\,dp.$$

Тоді внаслідок слабкої збіжності $y_n(t_n)$ до $y(t_0)$ маємо систему нерівностей

$$J(t_0) \le \underline{\lim}\|y_n(t_n)\|^2 - 2\int\limits_\tau^{t_0} (f(p), y(p))\,dp \le \overline{\lim}\|y_n(t_n)\|^2 -$$

$$-\,2\int\limits_\tau^{t_0} (f(p), y(p))\,dp \le \overline{\lim} J_n(t_n) = J(t_0),$$

звідки випливає, що існує $\lim_{n\to+\infty} \|y_n(t_n)\| = \|y(t_0)\|$, отже $y_n(t_n) \to y(t_0)$ в H. Звідси по підпослідовності $y_n \to y$ в $C([\delta,T];H)$. Оскільки (12) має єдиний розв'язок, то збіжність іде по всій послідовності. Якщо ж $y_\tau^n \to y_\tau$, то $J_n(\tau) \to J(\tau)$, отже, $J_n \to J$ в $C([\tau,T])$ і аналогічно попередньому одержуємо $y_n \to y$ в $C([\tau,T];H)$.

Лему доведено.

Позначимо через $K_{y_\tau} \subset W(\tau,T)$ множину розв'язків задачі (11) на (τ,T).

Теорема 2. *За умов (4) – (6), (8) – (10) для будь-якого $y_\tau \in H$ множина $K_{y_\tau} \ne \varnothing$ і для будь-якого $t \in [\tau,T]$ множина $K_{y_\tau}(t) = \{y(t) | y(\cdot) \in K_{y_\tau}\}$ є зв'язним компактом в H.*

Доведення. Існування розв'язку (11) встановлюється аналогічно [15, с. 374] (теорема 3.1), де це твердження доведено за додаткової умови самоспряженості $A(t)$. Дійсно, відображення $F_1(t,y) = F(y) + h(t)$ задовольняє умови (H_F) з [15], для будь-якого $y(\cdot) \in K_{y_\tau}$, $y = P^{-1}(f, y_\tau)$, $f(t) \in F_1(t, y(t))$ майже скрізь, з оцінки (13), умови (10) та леми Гроноулла маємо оцінку

$$\forall t \in [\tau, T] : \|y(t)\|^2 \leq \left(\|y_\tau\|^2 + 2 \int\limits_\tau^T (C_1 + \|h(t)\|)^2 \, dt \right) e^{(2C_2^2+1)T} := \hat{M}^2. \tag{15}$$

Тоді K_{y_τ} збігається з множиною розв'язків $\widehat{K}_{y_\tau}$ задачі (11) з

$$\widehat{F}(y) = \begin{cases} F(y), & \|y\| \leq \hat{M}, \\ F\left(\dfrac{\hat{M}y}{\|y\|}\right), & \|y\| > \hat{M}. \end{cases}$$

Покладемо $Z = \{f \in L^2(\tau, T; H) |\, \|f(t)\| \leq C_1 + C_2\hat{M} + \|h(t)\|$ майже скрізь$\}$, $L : Z \mapsto P(Z)$,

$$L(f) = \{g \in L^2(\tau, T; H) | g(t) \in \widehat{F}(y(t)) + h(t) \quad \text{майже скрізь}, \quad y = P^{-1}(f, y_\tau)\}.$$

Оскільки, згідно з лемою 1, якщо $f_n \overset{w}{\to} f$ в $L^2(\tau, T; H)$, то $y_n = P^{-1}(f_n, y_\tau) \to y = P^{-1}(f, y_\tau)$ в $C([\tau, T]; H)$, повторюючи міркування [15, с. 375] (теорема 3.1), приходимо до слабкої замкненості графіка відображення L, що дозволяє скористатися теоремою Какутані [18, с. 336] (теорема 13) і стверджувати існування нерухомої точки $f \in L(f)$. Оскільки $K_{y_\tau} = \{P^{-1}(f, y_\tau) | f \in L(f)\}$, то $K_{y_\tau} \neq \varnothing$. Крім того, оскільки множина $\{f \in Z | f \in L(f)\}$ — компакт в Z_w, то з леми 1 маємо компактність K_{y_τ} в $C([\tau, T]; H)$.

Доведемо для довільного $t \in [\tau, T]$ зв'язність компактної множини $K_{y_\tau}(t) \subset H$. Міркуючи від супротивного, приходимо до існування $t^* \in (\tau, T)$, відкритих неперетинних множин U_1 і U_2, $K_{y_\tau}(t^*) \subset U_1 \cup U_2$ і розв'язків $y_1(\cdot)$, $y_2(\cdot)_2 \in K_{y_\tau}$ таких, що $y_i(t^*) \in U_i$ $i = 1, 2$. Скористаємося схемою міркувань [8, с. 258] (теорема 3). Розглянемо для будь-яких $\gamma \in [\tau, T]$ і $k \geq 1$ задачу

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A(t)y = g_k(y(t)) + h(t), \quad t \in (\gamma, T), \\ &y(\gamma) = y_i(\gamma), \end{aligned} \tag{16}$$

де g_k — локально ліпшицеві селектори відображень $F_k : H \mapsto P(H)$, що задовольняють (8), (9) і мають наступні властивості [10, с. 163] (теорема 1.1):

$$\forall y \in H \, \forall k \geq 1 : \widehat{F}(y) \subset \ldots \subset F_{k+1}(y) \subset F_k(y), \quad \|F_k(y)\| \leq C_1 + C_2\hat{M}, \tag{17}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall y \in H \, \exists N \, \forall k \geq N : F_k(y) \subset O_\varepsilon(\widehat{F}(y)). \tag{18}$$

За першою частиною теореми задача (16) має розв'язок на (γ, T), до того ж внаслідок локальної ліпшицевості g_k він єдиний. Позначимо його через $y_i^k(t,\gamma)$ і розглянемо при фіксованих $k \geq 1$, $t \in [\tau, T]$, $i = 1, 2$, відображення $[\tau, T] \ni \gamma \mapsto z_i^k(t,\gamma) \in H$,

$$z_i^k(t,\gamma) = \begin{cases} y_i(t), & t \in [\tau, \gamma], \\ y_i^k(t,\gamma), & t \in (\gamma, T]. \end{cases}$$

Доведемо його неперервність. Нехай $\gamma_m \searrow \gamma_0$. Якщо $t \leq \gamma_0$, то $z_i^k(t,\gamma_m) = y_i(t) = z_i^k(t,\gamma_0)$. Якщо $t > \gamma_0$, то $t > \gamma_m$ і $z_i^k(t,\gamma_m) = y_i^k(t,\gamma_m)$, $z_i^k(t,\gamma_0) = y_i^k(t,\gamma_0)$. Для $\delta_m \searrow \gamma_0$, $t > \delta_m > \gamma_m > \gamma_0$ внаслідок локальної ліпшицевості g_k маємо оцінку

$$\|y_i^k(\delta_m,\gamma_m) - y_i^k(\delta_m,\gamma_0)\| \leq \|y_i^k(\gamma_m,\gamma_m) - y_i^k(\gamma_m,\gamma_0)\| e^{C(y_i(\gamma_0))(\delta_m-\gamma_m)} \leq$$
$$\leq (\|y_i(\gamma_m) - y_i(\gamma_0)\| + \|y_i(\gamma_0) - y_i^k(\gamma_m,\gamma_0)\|)\times$$
$$\times\, e^{C(y_i(\gamma_0))(\delta_m-\gamma_m)} \to 0, \quad m \to \infty,$$

де константа $C(y_i(\gamma_0))$ — це константа Ліпшиця для g_k в околі точки $y_i(\gamma_0)$, що не залежить від m. Звідси за лемою 1 $y_i^k(t,\gamma_m) \to y_i^k(t,\gamma_0)$ в H.

Нехай $\gamma_m \nearrow \gamma_0$. Якщо $t < \gamma_0$, то $t < \gamma_m$, отже, $z_i^k(t,\gamma_m) = y_i(t) = z_i^k(t,\gamma_0)$. Якщо ж $t \geq \gamma_0 > \gamma_m$, то $z_i^k(t,\gamma_m) = y_i^k(t,\gamma_m)$, $z_i^k(t,\gamma_0) = y_i^k(t,\gamma_0)$. Тоді все буде випливати з леми 1, як тільки $\|y_i^k(\gamma_0,\gamma_m) - y_i(\gamma_0)\| \to 0$, $\gamma_m \to \gamma_0$. Розглянемо $v^k(t) = y_i^k(t,\gamma_m) - y_i(t)$ для $t \in [\gamma_m, \gamma_0]$. Тоді з (16) для майже всіх $t \in (\gamma_m, \gamma_0)$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v^k(t)\|^2 + \lambda_1 \|v^k(t)\|_V^2 \leq (g_k(y_i^k(t,\gamma_m)) - f_i(t), v^k(t)),$$

де $f_i(t) \in \hat{F}(y_i(t))$ майже скрізь відповідає $y_i(\cdot)$. Звідси згідно з (17)

$$\|v^k(\gamma_0)\|^2 \leq \|y_i^k(\gamma_m,\gamma_m) - y_i(\gamma_m)\|^2 + \frac{2C}{\lambda_1}(C_1 + C_2\hat{M})^2(\gamma_0 - \gamma_m) \to 0, \quad \gamma_m \to \gamma_0.$$

Тоді аналогічно до [8, с. 259] (теорема 3) маємо, що відносно одного з номерів $i = 1, 2$, наприклад $i = 1$, існують $\gamma_k \in [\tau, T]$, $\gamma_k \to \gamma_0$, такі, що для функції

$$y^k(t) = \begin{cases} y_1(t), & t \in [\tau, \gamma_k], \\ y_1^k(t,\gamma_k), & t \in (\gamma_k, T], \end{cases}$$

маємо $y^k(t^*) \notin U_1 \cup U_2$. Покладемо

$$f^k(t) = \begin{cases} f_1(t), & t \in [\tau, \gamma_k], \\ g_k(y^k(t)), & t \in (\gamma_k, T], \end{cases}$$

де $f_1(t) \in \widehat{F}(y_1(t))$ майже скрізь відповідає $y_1(\cdot)$. Згідно з умовами (17) по підпослідовності $f^k \xrightarrow{w} f$ в $L^2(\tau, T; H)$. Оскільки $y^k = P^{-1}(f^k + h, y_\tau)$, то з леми 1 випливає, що $y^k \to y = P^{-1}(f + h, y_\tau)$ в $C([\tau, T]; H)$. Доведемо, що $f(t) \in \hat{F}(y(t))$ майже скрізь на (τ, T). Дійсно, якщо $t < \gamma_0$, то для достатньо великих k $f^k(t) \in \hat{F}(y_1(t))$. Якщо $t > \gamma_0$, то $f^k(t) \in$

$\in F_k(y^k(t))$, і, використовуючи міркування [11, с. 979] (теорема 3), одержуємо $f(t) \in \in \hat{F}(y(t))$. Отже, $y \in K_{y_\tau}$ і з необхідністю $y(t^*) \in U_1 \cup U_2$. Отримана суперечність доводить теорему.

Основний результат. Позначимо $M = \{A \in L(V,V^*) |\ A$ задовольняє $(1),(2)\}$. Дотримуючись [16, с. 168], легко показати, що M — компактний метричний простір відносно метрики

$$\rho_M(A_1, A_2) = \sup_{f \in H, \|f\|=1} \left\| (A_1^{-1} - A_2^{-1}) f \right\|,$$

до того ж збіжність за метрикою ρ_M еквівалентна G-збіжності.

Нехай $C(\mathbb{R}; M)$ — клас неперервних функцій із $\mathbb{R}$ в M з топологією рівномірної збіжності на компактах. Для фіксованого $A(\cdot) \in C(\mathbb{R}; M)$ покладемо

$$\Sigma_1 := \mathrm{cl}_{C(\mathbb{R};M)} \{A(t+\cdot) | t \in \mathbb{R}\},$$

тобто $B \in \Sigma_1 \;\Leftrightarrow\; \exists\, t_n \,\forall\, [a,b] \;\max_{t\in[a,b]} \rho_M(A(t+t_n), B(t)) \to 0, n \to \infty.$

Означення 3. *Операторнозначна функція $A(\cdot)$ із класу $C(\mathbb{R}; M)$ називається трансляційно-компактною в $C(\mathbb{R}; M)$, якщо*

$$\Sigma_1 \quad - \textit{ компакт в } \quad C(\mathbb{R}; M). \tag{19}$$

Згідно з [17, с. 99] умова (19) має місце тоді і тільки тоді, коли

$$\rho_M(A(t), A(s)) \le \alpha(|t-s|), \tag{20}$$

де $\alpha(p) \to 0$ при $p \to 0+$.

На функцію h накладемо умову

$$\|h\|_+^2 := \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \|h(s)\|^2\, ds < \infty, \tag{21}$$

яка згідно з твердженням 4.1 [17, с. 105] є критерієм компактності множини

$$\Sigma_2 = cl_{L^{2,w}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)} \{h(t+\cdot) \mid t \in \mathbb{R}\}, \tag{22}$$

де $L^{2,w}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$ — простір $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$ з топологією локальної слабкої збіжності. Для будь-якого $\sigma = (A_\sigma, h_\sigma) \in \Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$ розглянемо задачу

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A_\sigma(t) y \in F(y) + h_\sigma(t), \\ &y(\tau) = y_\tau. \end{aligned} \tag{11_σ}$$

Покладемо для будь-яких $\tau \in \mathbb{R}$, $t \ge \tau$ і $y_\tau \in H$

$$U_\sigma(t, \tau, y_\tau) = \{y(t) | y(\cdot) - \text{ розв'язок } (11)_\sigma\}. \tag{23}$$

Теорема 3. *Нехай* $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *задовольняє умови* $(4)-(6)$, F — *умови* $(8)-(10)$, h — *умову* (21) *і, крім того, виконуються умови*

$$\|A(t)-A(s)\| \le \alpha(|t-s|), \quad \textit{де} \quad \alpha(p)\to 0, \quad p\to 0+, \tag{24}$$

$$\exists\, K>0\ \exists\,\varepsilon>0\ \forall\, y\in V\ \ \forall\,\xi\in F(y):(\xi,y)\le\left(\frac{\lambda_1}{C}-\varepsilon\right)\|y\|^2+K, \tag{25}$$

де константу λ_1 *взято з умови* (4), *константу* C — *з неперервності вкладення* $V\subset H$. *Тоді формула* (23) *визначає сім'ю БП* $\{U_\sigma \mid \sigma\in\Sigma\}$, *що має у фазовому просторі* H *інваріантний, зв'язний, стійкий глобальний атрактор.*

Доведення. З умови (24) аналогічно [14] (теорема 10) для довільних $t,s\in\mathbb{R}$, $f\in H$, $\|f\|=1$, випливають нерівності

$$\left\|(A^{-1}(t)-A^{-1}(s))f\right\| = \left\|A^{-1}(s)(A(s)-A(t))A^{-1}(t)f\right\| \le \frac{C}{\lambda_1^2}\,\|(A(s)-A(t))\| \le \frac{C}{\lambda_1^2}\,\alpha(|t-s|).$$

Звідси маємо виконання умови (20). Тоді, оскільки для будь-якого $\sigma\in\Sigma$ відображення A_σ задовольняє умови (4)–(6), $h_\sigma\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$, задача $(11)_\sigma$ глобально розв'язна в тому ж сенсі, що і задача (11), тобто існують $y\in L^2_{\mathrm{loc}}(\tau,+\infty;V)$ з $\dfrac{dy}{dt}\in L^2_{\mathrm{loc}}(\tau,+\infty;V^*)$ та $f\in L^2_{\mathrm{loc}}(\tau,+\infty;H)$, $f(t)\in F(y(t))$ майже скрізь такі, що

$$P_\sigma y := \frac{dy}{dt}+A_\sigma(t)y = f(t)+h_\sigma(t) \quad \text{майже скрізь},$$

$$y(\tau)=y_\tau.$$

Розв'язок цієї задачі далі будемо позначати через $P_\sigma^{-1}(f+h_\sigma,y_\tau)$. Отже, відображення (23) означене коректно. Перевіримо виконання умов теореми 1. Покажемо, що для довільного $\sigma\in\Sigma$ відображення (23) є строгим БП. Нехай $\xi\in U_\sigma(t,\tau,y)$. Тоді $\xi=y(t)$, $y(\cdot)$ — розв'язок $(11)_\sigma$, $y(\tau)=y$. Тому для будь-якого $s\in[\tau,t]$ $y(s)\in U_\sigma(s,\tau,y)$. Розглянемо функцію $v(p)=y(p)$, $p\ge s$. Тоді $v(t)=\xi$, $v(\cdot)$ — розв'язок $(11)_\sigma$ на $(s,+\infty)$, $v(s)=y(s)$, отже,

$$\xi=v(t)\in U_\sigma(t,s,y(s))\subset U_\sigma(t,s,U_\sigma(s,\tau,y)).$$

Нехай тепер $\xi\in U_\sigma(t,s,U_\sigma(s,\tau,y))$. Тоді $\xi=y(t)$, $y(\cdot)$ — розв'язок $(11)_\sigma$ на $(s,+\infty)$, $y(s)\in U_\sigma(s,\tau,y)$. Отже, існує $v(\cdot)$ — розв'язок $(11)_\sigma$ на $(\tau,+\infty)$, $v(\tau)=y$, $v(s)=y(s)$. Розглянемо функцію

$$\theta(p)=\begin{cases} v(p), & p\in[\tau,s],\\ y(p), & p>s.\end{cases}$$

Тоді $\theta(\cdot)$ — розв'язок $(11)_\sigma$ на $(\tau,+\infty)$, $\theta(\tau)=y$, $\theta(t)=y(t)=\xi$. Отже, $\xi=\theta(t)\in U_\sigma(t,\tau,y)$. Таким чином, для будь-якого $\sigma\in\Sigma$ відображення (23) є строгим БП. Тепер покажемо, що для довільних $(t,\tau)\in\mathbb{R}_d$, $p\in\mathbb{R}$, $y\in H$ має місце рівність

$$U_\sigma(t+p,\tau+p,y)=U_{T(p)\sigma}(t,\tau,y),$$

де $\{T(t) : \Sigma \mapsto \Sigma\}_{t\in\mathbb{R}}$ — неперервна група зсувів на Σ. Нехай $\xi \in U_\sigma(t+p, \tau+p, y)$. Тоді $\xi = y(t+p)$, $y(\cdot)$ — розв'язок $(11)_\sigma$ на $(\tau+p, +\infty)$, $y(\tau+p) = y$. Розглянемо функцію $v(s) = y(s+p)$, $s \geq \tau$. Тоді $v(\cdot)$ — розв'язок $(11)_{T(p)\sigma}$ на $(\tau, +\infty)$, $v(\tau) = y(\tau+p) = y$, $v(t) = y(t+p) = \xi$, отже, $\xi = v(t) \in U_{T(p)\sigma}(t, \tau, y)$. Далі, оскільки

$$U_{T(p)\sigma}(t, \tau, y) \subset U_{T(-p)T(p)\sigma}(t+p, \tau+p, y) = U_\sigma(t+p, \tau+p, y),$$

то маємо шукану рівність.

Для доведення (1) домножимо $(11)_\sigma$ скалярно в H на $y(t)$ і з урахуванням (25) одержимо для розв'язків $(11)_\sigma$ апріорну оцінку

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 + 2\lambda_1\|y(t)\|_V^2 \leq \left(\frac{2\lambda_1}{C} - 2\varepsilon\right)\|y(t)\|^2 + 2(h_\sigma(t), y(t)) + 2K. \tag{26}$$

Звідси

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 + \varepsilon\|y(t)\|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}\|h_\sigma(t)\|^2 + 2K.$$

Оскільки згідно з (21) з [17, с. 105] маємо $\sup_{\sigma\in\Sigma}\|h_\sigma\|_+ \leq \|h\|_+$, то з останньої нерівності випливає, що для всіх $t \geq 0$ справджується оцінка

$$\|y(t)\|^2 \leq \|y(0)\|^2 e^{-\varepsilon t} + \frac{2K}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \|h_\sigma(s)\|_+^2 e^{\varepsilon(s-t)}\,ds \leq$$

$$\leq \|y(0)\|^2 e^{-\varepsilon t} + \frac{2K}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)\|h\|_+^2, \tag{27}$$

яка і гарантує виконання умови дисипативності (1).

Для доведення (2) розглянемо послідовність $\xi_n \in U_\Sigma(t, 0, B)$, $T > t > 0$. Тоді $\xi_n = y_n(t)$, $y_n(\cdot) = P_{\sigma_n}^{-1}(f_n + h_{\sigma_n}, y_0^n)$, де $y_0^n \in B$, $f_n(t) \in F(y_n(t))$ майже скрізь, $\sigma_n \in \Sigma$. Тоді згідно з (27) по підпослідовності $f_n \overset{w}{\to} f$ в $L^2(0,T;H)$, $h_{\sigma_n} \overset{w}{\to} h_\sigma$ в $L^2(0,T;H)$, $y_0^n \overset{w}{\to} y_0$ в H, $\sigma_n \to \sigma$. Таким чином, для будь-якого $t \in [0,T]$ $A_{\sigma_n}(t) \overset{G}{\to} A_\sigma(t)$. Покажемо G-збіжність параболічних операторів $P_{\sigma_n} = \dfrac{d}{dt} + A_{\sigma_n}$. Для цього скористаємось міркуваннями з [14] (теорема 10) і покажемо, що для довільного $\sigma \in \Sigma$ оператори A_σ задовольняють (24). Дійсно, $\forall \sigma \in \Sigma\ \exists t_n \nearrow +\infty : A(\cdot + t_n) \to A_\sigma(\cdot)$ в $C(\mathbb{R}, M)$. Зокрема, $\forall\, t \in \mathbb{R}\ \forall\, f \in V^* :$ $A^{-1}(t+t_n)f \overset{w}{\to} A_\sigma^{-1}(t)f$ в V. Тоді для довільних t, s виконуються нерівності

$$\left\|(A_\sigma^{-1}(t) - A_\sigma^{-1}(s))f\right\|_V \leq \sup_n \left\|(A^{-1}(t+t_n) - A^{-1}(s+t_n))f\right\|_V \leq$$

$$\leq \sup_n \left\|A^{-1}(t+t_n) - A^{-1}(s+t_n)\right\| \|f\|_{V^*} \leq$$

$$\leq \frac{C}{\lambda_1^2}\sup_n \|A(t+t_n) - A(s+t_n)\| \|f\|_{V^*} \leq \frac{C}{\lambda_1^2}\alpha(|t-s|)\|f\|_{V^*}.$$

З цієї нерівності та з рівності $A_\sigma(t) - A_\sigma(s) = A_\sigma(s)(A_\sigma^{-1}(s) - A_\sigma^{-1}(t))A_\sigma(t)$ маємо

$$\forall\, \sigma \in \Sigma\ \|A_\sigma(t) - A_\sigma(s)\| \le \frac{C}{\lambda_1^2}\,\alpha(|t-s|).$$

Тоді з [14, с. 25] (теорема 10) випливає, що $P_{\sigma_n} \stackrel{G}{\to} P_\sigma = \dfrac{d}{dt} + A_\sigma$. Тепер з леми 1 маємо передкомпактність $\{\xi_n\}$ в H, а отже, виконання (2).

Для доведення (3) розглянемо $\xi_n = y_n(t_n)$, де $t_n \to t_0$, $y_n(\cdot) = P_{\sigma_n}^{-1}(f_n + h_{\sigma_n}, \eta_n)$, $\eta_n \to \eta_0$, $\sigma_n \to \sigma_0$. Повторюючи попередні міркування для $T > t_0$, з урахуванням сильної збіжності $\eta_n \to \eta$ маємо, що по деякій підпослідовності $y_n(\cdot) \to y(\cdot) = P_{\sigma_0}^{-1}(f + h_{\sigma_0}, \eta_0)$ в $C([0,T];H)$, зокрема, $\xi_n \to y(t_0)$ в H. Оскільки $f_n \stackrel{w}{\to} f$ в $L^2(0,T;H)$, то з теореми Мазура $f(t) \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{cl}_H(\mathrm{co} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} f_k(t))$ майже скрізь і з (9) і вкладення $f_n(t) \in F(y(t))$ майже скрізь одержуємо, що $f(t) \in F(y(t))$ майже скрізь. Звідси $y(t_0) \in U_{\sigma_0}(t_0, 0, \eta_0)$, і теорему доведено.

Зауваження 1. Умова (24) збігається з умовою (37) роботи [14] і забезпечує G-збіжність параболічних операторів P_{σ_n}.

Зауваження 2. Умова (25) забезпечує дисипативність задачі (11). Її можна замінити умовою

$$\exists\, K > 0\, \exists\, \varepsilon \ge 0\, \forall\, y \in V\, \forall\, \xi \in F(y):\ (\xi, y) \le -\varepsilon\|y\|^2 + K,$$

яка накладає більш жорсткі обмеження на багатозначне збурення, проте не використовує параметри диференціального оператора.

Наведемо приклад операторів $A(t)$ та функції $F(y)$, для яких для задачі (11) має місце дана теорема. Розглянемо оператор [14, с. 11]

$$A(t) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

де $a_{ij}(x,t)$ — вимірні по x і неперервні по t функції, задані в циліндрі $Q = \Omega \times (0,T)$, Ω — область в $\mathbb{R}^n$, до того ж

$$\lambda_1|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\,\xi_j \le \Lambda_1|\xi|^2, \quad \Lambda_1 = \mathrm{const} > 0,$$

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\eta_j\right| \le \frac{\lambda_2^{1/2}}{\Lambda_1^{1/2}}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\,\xi_j\right)^{1/2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\eta_i\,\eta_j\right)^{1/2},$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |a_{ij}(x,t) - a_{ij}(x,s)| \le \alpha(|t-s|),$$

де $\alpha(p) \to 0$, $p \to 0+$. Тоді для $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$ виконуються умови (4)–(6), (24). Для побудови багатозначного збурення покладемо для $y \in L^2(\Omega)$

$$F(y) = \{u \in L^2(\Omega) \mid g(y(x)) \le u(x) \le f(y(x))\},$$

де $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_-$ — напівнеперервне знизу, $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ — напівнеперервне зверху, до того ж для будь-якого $s \in \mathbb{R}$

$$-\left(\frac{\lambda_1}{C} - \epsilon\right) |s| - K \leq g(s) \leq f(s) \leq \left(\frac{\lambda_1}{C} - \epsilon\right) |s| + K.$$

Тоді з леми 3 [12, с. 1470] випливає, що $F : H \mapsto P(H)$ задовольняє умови (8) – (10) і виконується (25).

1. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. — New York: Springer, 1988. — 645 p.
2. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. — М.: Наука, 1989. — 294 с.
3. *Ladyzhenskaya O. A.* Attractors of semigroups and evolution equations. — New York: Cambridge Univ. Press, 1991. — 310 p.
4. *Sell G. R., You Y.* Dynamics of evolutionary equations. — New York: Springer, 2002. — 629 p.
5. *Chueshov I. D.* Introduction to the theory of infinite-dimensional dissipative systems. — Kharkiv: ACTA, 2002. — 412 p.
6. *Мельник В. С.* Многозначная динамика нелинейных бесконечномерных систем. — Киев, 1994. — (Препринт / НАН Украины. Ин-т кибернетики, № 94 – 17).
7. *Ball J. M.* Continuity properties and attractors of generalized semiflows and the Navier – Stokes equations // J. Nonlinear Sci. — 1997. — **7**, № 5. — P. 475 – 502.
8. *Kapustyan A. V., Valero J.* On the Kneser property for the complex Ginzburg – Landau equation and the Lotka – Voltera system with diffusion // J. Math. Anal. and Appl. — 2009. — **357**. — P. 254 – 272.
9. *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 425 с.
10. *Толстоногов А. А., Уманский Я. И.* О решениях эволюционных включений. 2 // Сиб. мат. журн. — 1992. — **33**, № 4. — С. 163 – 173.
11. *Капустян О. В., Валеро Х.* Атрактори диференціальних включень та їх залежність від параметра // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 7. — С. 975 – 980.
12. *Капустян О. В., Касьянов П. О.* Глобальний атрактор еволюційного включення з розривною правою частиною // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 11. — С. 1467 – 1475.
13. *Капустян О. В., Шкляр Т. Б.* Якісна поведінка розв'язків неавтономного параболічного включення з трансляційно-компактною правою частиною // Вісн. Київ. ун-ту. Математика, механіка. — 2009. — **22**. — С. 17 – 19.
14. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* О G-сходимости параболических операторов // Успехи мат. наук. — 1981. — **36**, № 1. — С. 11 – 55.
15. *Denkowski Z., Mortola S.* Asymptotic behavior of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations // J. Optim. Theory and Appl. — 1993. — **78**, № 2. — P. 365 – 391.
16. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Физматлит, 1993. — 464 с.
17. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors for equations of mathematical physics. — Providence: Amer. Math. Soc., 2002. — 361 p.
18. *Обен Ж. П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. — М.: Мир, 1988. — 510 с.

Одержано 03.12.10,
після доопрацювання — 14.10.11