Физика низких температур, 1996, т. 22, № 12, с. 1470–1473

Краткие сообщения

Вклад взаимодействий одинаковых частиц в диффузию классических и квантовых смесей

И. Н. Адаменко, А. В. Жуков, К. Э. Немченко

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 22 мая 1996 г.

Получено точное выражение для коэффициента диффузии двухкомпонентного газа с произвольными законом дисперсии и статистикой. Рассмотрены различные предельные случаи. Найдены пределы изменения коэффициента диффузии. Показано, что коэффициент диффузии в ряде случаев может существенно зависеть от скорости релаксации между частицами одного типа. В качестве примера рассмотрена ротон-примесонная система сверхтекучих растворов изотопов гелия.

Одержано точний вираз для коефіцієнта дифузії двокомпонентного газу з довільними законом дисперсії та статистикою. Розглянуто різні граничні випадки. Знайдено границі змін коефіцієнту дифузії. Показано, що коефіцієнт дифузії у ряді випадків може суттєво залежати від швидкості релаксації між частинками одного типу. Як приклад розглянуто ротон-примісонну систему надплинних розчинів ізотопів гелію.

Нахождение коэффициента диффузии является традиционной задачей для смесей разреженных газов и конденсированных сред в области низких температур, когда справедливо квазичастичное описание. Коэффициент диффузии компонента a в компоненте b двухкомпонентной газовой смеси определяет связь между плотностью потока массы и концентрацией a-го компонента. Для получения коэффициента диффузии необходимо решить систему двух линеаризованных кинетических уравнений для функции распределения соответствующих компонентов. Ввиду математической сложности такой задачи используются различные приближенные методы решения (см., например, [1]). В итоге получается, что коэффициент диффузии содержит только время взаимодействия τ_{ab} a-го компонента с b-м и не зависит от времен взаимодействия τ_{aa} и τ_{bb} частиц одного типа. Между тем можно получить точное, достаточно компактное решение поставленной задачи, из которого следует, что коэффициент диффузии в классических и квантовых газах зависит от взаимодействия частиц одинакового типа, что в ряде случаев существенно влияет на величину коэффициента диффузии.

Для получения точного решения аналогично [2,3] введем полную систему ортонормированных двумерных векторов $|\varphi_k\rangle$. Первым из них удобно выбрать вектор [4,5]

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left| \begin{matrix} p_{a_z} \\ p_{b_z} \end{matrix} \right\rangle , \qquad (1)$$

отвечающий полному импульсу, сохраняющемуся при столкновениях. Здесь $\rho = \rho_a + \rho_b$ — полная массовая плотность смеси; p_a, p_b — импульсы соответствующих компонент. Считается, что концентрация компонентов меняется вдоль оси z. В качестве второго вектора полной системы возьмем вектор

$$|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{\rho\rho_a\rho_b}} \left| \begin{matrix} \rho_b p_{a_z} \\ -\rho_a p_{b_z} \end{matrix} \right\rangle . \qquad (2)$$

Остальные векторы строятся с помощью стандартной процедуры (см., например, [2,3]) с учетом определения скалярного произведения, которое для произвольных двумерных бра-вектора $\langle\psi| = \langle\psi_a, \psi_b|$ и кет-вектора $|\chi\rangle$ определяется, аналогично [4,5], следующим образом:

$$\langle\psi|\chi\rangle = {}_1\langle\psi_a|\chi_a\rangle_1 + {}_1\langle\psi_b|\chi_b\rangle_1 =$$

$$= -\int \psi_a^* \chi_a f'_{0a}\, d\Gamma_a - \int \psi_b^* \chi_b f'_{0b}\, d\Gamma_b , \qquad (3)$$

© И. Н. Адаменко, А. В. Жуков, К. Э. Немченко, 1996

где f_{0a}, f_{0b} — локально равновесные функции распределения соответствующего компонента, штрих означает дифференцирование по энергии, а индекс 1 означает однокомпонентные векторы.

Точное решение системы двух линеаризованных кинетических уравнений для коэффициента диффузии дает

$$D = u^2 \tau_D , \qquad (4)$$

где u^2 — квадрат характерной скорости, аналитическое выражение для которого определяется конкретным законом дисперсии частиц смеси и их статистикой. Для классических частиц с квадратичным законом дисперсии

$$u_{cl}^2 = T/m_a . \qquad (5)$$

Для двухкомпонентной смеси газа ротонов и примесонов сверхтекучих растворов изотопов гелия имеем

$$u_{\mathrm{He}}^2 = \frac{T}{m_i} \frac{\rho_r}{\rho_r + \rho_i} , \qquad (6)$$

где m_i — эффективная масса примесонов; ρ_r и ρ_i — нормальные плотности ротонов и примесонов соответственно. Коэффициент τ_D представляет собой характерное диффузное время и может быть записан в общем виде для газов с произвольной статистикой и законом дисперсии:

$$\tau_D = \left\{ -I_{22} + \sum_{\beta, \beta'=3}^{\infty} I_{2\beta} \left([\tilde{I} + \tilde{S}]^{-1} \right)_{\beta\beta'} I_{\beta' 2} \right\}^{-1} . \qquad (7)$$

Здесь

$$I_{\alpha\beta} = \langle \varphi_\alpha | \hat{I} | \varphi_\beta \rangle$$

— матричный элемент двухкомпонентной операторной матрицы

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} J_{ab} & J_{ab} \\ J_{ba} & J_{ba} \end{pmatrix} , \qquad (8)$$

описывающей взаимодействие частиц a с частицами b; J — линеаризованные интегралы столкновений. Действие этих операторов на произвольную функцию импульсов определяется обычным образом [1,2,5]. Взаимодействие частиц одинакового типа описывается матричными элементами $S_{\alpha\beta} = \langle \varphi_\alpha | \hat{S} | \varphi_\beta \rangle$ двухкомпонентной операторной матрицы

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} J_{aa} & 0 \\ 0 & J_{bb} \end{pmatrix} . \qquad (9)$$

Квадратные матрицы $\tilde{I}$ и $\tilde{S}$, входящие в явное выражение для τ_D (7), определяются матричными элементами

$$(\tilde{I})_{\beta\beta'} = I_{\beta\beta'} ; \ (\tilde{S})_{\beta\beta'} = S_{\beta\beta'} ; \ \beta, \beta' \geq 3 . \qquad (10)$$

Эти матрицы являются бесконечномерными и недиагональными, поэтому точное решение (7) не позволяет получить явное аналитическое выражение для τ_D. Однако запись (7) дает возможность исследовать различные предельные случаи, доказать существование корректных интерполяционных формул и производить расчеты на вычислительных машинах для конкретных физических систем.

Так, в случае быстрого установления равновесия между частицами одинакового типа, когда выполняются неравенства

$$S_{\beta\beta'} >> I_{\beta\beta'} , \qquad (11)$$

из соотношения (7) имеем

$$\tau_D = \tau_{D_{\min}} = -\frac{1}{I_{22}} = \left(\tau_{ab}^{(0)^{-1}} + \tau_{ba}^{(0)^{-1}} \right)^{-1} , \qquad (12)$$

где

$$\tau_{ab}^{(0)^{-1}} = -\, {}_1\langle p_{az} | J_{ab} | p_{az} \rangle \frac{1}{\rho_a} ; \qquad (13)$$

$$\tau_{ba}^{(0)^{-1}} = \tau_{ab}^{(0)^{-1}} \frac{\rho_a}{\rho_b} . \qquad (14)$$

В (13) учтено, что

$$\rho_a = {}_1\langle p_{az} | p_{az} \rangle_1 .$$

Из эрмитовости и отрицательной определенности операторов $\hat{S}$ и $\hat{I}$ можно показать, что

$$\tau_D \geq \tau_{D_{\min}} . \qquad (15)$$

В обратном предельном случае медленного установления равновесия между частицами одинакового типа ($S_{\beta\beta'} \to 0$) τ_D достигает максимального значения

$$\tau_{D_{\max}} = \langle \varphi_2 | 1/\hat{I} | \varphi_2 \rangle . \qquad (16)$$

В случае, когда в b-м компоненте равновесие наступает быстро ($J_{bb} \to \infty$), а в a-м — медленно ($J_{aa} \to 0$), из (7) получаем

$$\tau_D|_{\infty,0} = \left(\tau_{ab}^{(\infty)^{-1}} + \tau_{ab}^{(0)^{-1}} \right)^{-1} , \qquad (17)$$

где

$$\tau_{ab}^{(\infty)} = -\langle p_{az} | \frac{1}{J_{ab}} | p_{az} \rangle \frac{1}{\rho_a} . \qquad (18)$$

Отметим, что в (13) усредняется частота, а в (18) — время. При этом, согласно неравенству Коши—Буняковского, при любой импульсной зависимости J_{ab} время, определяемое (13), всегда меньше времени (18). Если J_{ab} не зависит от импульса p_a, то $\tau_{ab}^{(0)} = \tau_{ab}^{(\infty)}$, а $\tau_D = \tau_{D_{\min}}$. Если же оператор J_{ab} зависит от p_a, то установление равновесия между частицами разного сорта обусловлено тем, насколько быстро устанавливается равновесие между частицами одинакового типа. Здесь ситуация аналогична существующей в фонон-примесонной системе [4] сверхтекучих растворов ^{3}He–^{4}He и в фононных системах твердых тел [6].

В этих системах реализуется двухэтапный механизм релаксации между частицами разного типа. На первом этапе с частицами типа b взаимодействуют только те частицы типа a, для импульсов которых J_{ab} максимален. На втором этапе установление равновесия в смеси определяется взаимодействием частиц a между собой. Это происходит потому, что частицам a, для которых J_{ab} минимален, выгоднее взаимодействовать не с частицами b, а с теми частицами a, которые уже пришли в равновесие с b-м компонентом.

Для конкретных систем вычисление $\tau_{ab}^{(0)^{-1}}$, как правило, не представляет труда. Что же касается вычисления $\tau_{ab}^{(\infty)^{-1}}$, то здесь необходимо находить оператор, обратный интегральному оператору J_{ab}, что удается сделать только с использованием ряда приближений. Так, для случая газа Лоренца [1,7], когда частицы b неподвижны и рассеяние частиц a является упругим

$$J_{ab} = -|\mathrm{v}_a| \, \sigma_t \, n_b , \qquad (19)$$

где $\mathrm{v}_a = (\partial \varepsilon_a)/(\partial \mathrm{p}_a)$ — скорость a-й частицы; σ_t — транспортное сечение рассеяния a-й частицы на b-й; n_b — плотность b-го компонента.

В работе [8], в которой были заложены основы кинетической теории сверхтекучих растворов ^{3}He–^{4}He, коэффициент диффузии находился в приближении газа Лоренца. неподвижными при этом считались ротоны. Полученный таким образом в [8] коэффициент диффузии являлся исходным при обработке экспериментальных данных [9,10]. Из результатов последующих экспериментов по исследованию ротонного спектра [9] следовало, однако, что ротоны нельзя считать неподвижными, поскольку их тепловая скорость даже больше тепловой скорости примесонов.

Здесь предлагается аппроксимация оператора J_{ab} такой функцией импульса p_a, которая дает правильные результаты во всех предельных случаях, следующих из общей формулы (7): быстрое установление равновесия между частицами одного типа (12), газ Лоренца (19) и газ Рэлея (слабый раствор тяжелого газа в легком) [1,11].

При этом J_{ab} следует заменить на частоту

$$t_{ab}^{-1}(\mathrm{p}_a) = \frac{\nu_{ab}(\mathrm{p}_a) \, {}_1\langle p_{az} | p_{az} \rangle_1}{{}_1\langle p_{az} | \nu_{ab}(\mathrm{p}_a) | p_{az} \rangle_1} \tau_{ab}^{(0)^{-1}} , \qquad (20)$$

где $\nu_{ab}(\mathrm{p}_a)$ — частота столкновений, которая стандартным образом выражается через вероятность перехода, входящую в интеграл столкновений. Для ротон-примесонной системы ($a \to i$, $b \to r$), используя результаты работы [5], получаем

$$t_{ir}^{-1}(\mathrm{p}_i) =$$

$$= A^2 n_r \left\langle \sin^2\theta \left\{ \frac{\mu}{2} (\mathrm{v}_r - \mathrm{v}_i)^2 + \frac{p_i^2}{2m} \sin^2\theta \right\}^{1/2} \right\rangle . \qquad (21)$$

Здесь $A^2 = m\sqrt{2\mu}\,\pi^{-1} A_{ri}^2$; $A_{ri} = -n_4^{-1} \Delta_r a_r a_i$ — амплитуда перехода ротон-примесонного рассеяния,

$$a_r = \frac{\rho_4}{\Delta_r} \frac{\partial \Delta_r}{\partial \rho_4} ; \quad a_i = \frac{n_4}{c^2} \frac{\partial \Delta_3}{\partial \rho_4} ;$$

$\rho_4 = m_4 n_4$ — плотность ^{4}He в растворе; c — скорость звука в растворе; Δ_r, Δ_3, m, μ — параметры ротонного и примесонного энергетических спектров; $\cos\theta = \mathrm{p}_r \mathrm{p}_i / p_r p_i$. Среднее в (21) определяется следующим образом:

$$\langle F(p_r, \cos\theta) \rangle =$$

$$= \frac{\int_0^{+\infty} dv_r \, e^{(-\mu v_r^2)/2T} \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} F(p_r, \cos\theta) d\cos\theta}{\int_0^{+\infty} dv_r \, e^{(-\mu v_r^2)/2T}} . \qquad (22)$$

В экспериментах [10,12] по исследованию коэффициента диффузии сверхтекучих растворов ^{3}He–^{4}He реализовался случай, описываемый соотношением (17). Подстановка (21) в (18) дает результаты, близкие к экспериментальным данным. Расчет по формуле (12) дает результаты как и в

[5], меньшие экспериментальных на величину порядка 10%. Таким образом, учет отсутствия равновесия в газе примесонов улучшает согласие теории с экспериментом. Отметим, что относительно малое различие $\tau_{ir}^{(0)}$ и $\tau_{ir}^{(\infty)}$ связано со слабой зависимостью t_{ir}^{-1} от p_i. В других системах (см., например, [4]) такое отличие может быть существенным.

Для сверхтекучих растворов ^{3}He–^{4}He представляли бы несомненный интерес измерения коэффициента диффузии при варьировании концентрации вплоть до самой высокой. Сопоставление таких экспериментальных данных с приведенными здесь результатами расчетов позволило бы найти зависимость τ_D от скорости релаксации в газе примесонов.

1. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
2. Дж. Ферцигер, Г. Капер, *Математическая теория процессов переноса в газах*, Мир, Москва (1976).
3. А. И. Ахиезер, В. Ф. Алексин, В. Д. Ходусов, *ФНТ* **20**, 199 (1994).
4. И. Н. Адаменко, В. И. Цыганок, *ЖЭТФ* **87**, 865 (1984).
5. I. N. Adamenko, K. E. Nemchenko, and V. I. Tsyganok, *J. Low. Temp. Phys.* **81**, 233 (1990).
6. J. Callaway, *Phys. Rev.* **113**, 1046 (1959).
7. П. Резибуа, М. де Ленер, *Классическая кинетическая теория жидкостей и газов*, Мир, Москва (1980).
8. И. М. Халатников, В. Н. Жарков, *ЖЭТФ* 32, 1108 (1957).
9. Б. Н. Есельсон, В. Н. Григорьев, В. Г. Иванцов, Э. Я. Рудавский, Д. Г. Саникидзе, И. А. Сербин, *Растворы квантовых жидкостей* He^3–He^4, Наука, Москва (1973).
10. J. Tuttle, F. Zhong, and H. Meyer, *J. Low Temp. Phys.* 82, 15 (1991).
11. M. Lopez de Haro and E. G. D. Kohen, *J. Chem. Phys.* 80, 408 (1984).
12. Т. П. Птуха, *ЖЭТФ* **40**, 1583 (1961).

Contribution of the interaction of the same-type particles to diffusion of classical and quantum mixtures

I. N. Adamenko, A. V. Zhukov, and K. E. Nemchenko

An exact expression for the diffusion coefficient of two-component gas with an arbitrary dispersion law and statistics is obtained. Various limiting cases are considered. The limits of the diffusion coefficient variations are found. The diffusion coefficient is shown to be dependent on the relaxation rate of particles of the same type. As an example, the roton-impuriton system of superfluid helium isotope mixtures is considered.