УДК 517.956

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ДАННЫМИ НА НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ЛИНИЯХ ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

А. Т. Асанова

Ин-т математики Республики Казахстан, М-во образования и науки
Республика Казахстан, 050010, Алматы, ул. Пушкина, 125
e-mail: anar@math.kz
anarasanova@list.ru

We consider a boundary-value problem with data located on non-characteristic intersecting lines for a system of hyperbolic equations with mixed second order derivative. The method of introducing additional parameters is used to establish existence of a unique classical solution of the problem under consideration. We give a method for finding this solution.

Розглядається крайова задача з даними на нехарактеристичних лініях, що перетинаються, для систем гіперболічних рівнянь із мішаною похідною другого порядку. Методом уведення додаткових параметрів встановлено існування єдиного класичного розв'язку досліджуваної задачі та запропоновано спосіб його знаходження.

В треугольнике $\bar{\Omega}$, ограниченном отрезками $x = t$, $x = -t$, $0 \le t \le T$, где T — положительное число, рассматривается нелокальная краевая задача для системы гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\,\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\,\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x), \tag{1}$$

$$u(T,x) = \varphi(x), \quad x \in [-T,T], \tag{2}$$

$$P_2(t)\ \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\bigg|_{x=t} + P_1(t)\ \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\bigg|_{x=t} + P_0(t)\,u(t,x)\Big|_{x=t} + S_2(t)\ \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\bigg|_{x=-t} + \\ + S_1(t)\ \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\bigg|_{x=-t} + S_0(t)\,u(t,x)\Big|_{x=-t} = \psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

где $(n \times n)$-матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $P_2(t)$, $P_1(t)$, $P_0(t)$, $S_2(t)$, $S_1(t)$, $S_0(t)$, вектор-функции $f(t,x)$, $\psi(t)$ размерности n являются непрерывными в $\bar{\Omega}$ и $[0,T]$ соответственно, функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на $[-T,T]$.

Функция $u(t,x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, называется классическим решением задачи

(1) – (3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(t, x) \in \bar{\Omega}$ и выполнены краевые условия (2), (3).

Соотношение (3) связывает значения искомой функции и ее производных на двух нехарактеристических пересекающихся линиях $x = t$ и $x = -t$. Основным методом изучения системы (1) является метод Римана [1], который позволяет получить достаточные условия однозначной классической разрешимости задачи (1) – (3). В случае, когда коэффициентами системы (1) являются непрерывные матрицы, применение метода Римана становится затруднительным. В настоящей работе задача (1) – (3) исследуется с помощью метода введения дополнительных параметров [2 – 4], распространяющего идею метода параметризации [5, 6] на уравнения с частными производными. Ранее на основе этого метода были получены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости краевой задачи с данными на характеристиках для системы гиперболических уравнений со смешанной производной [7 – 9].

Метод введения дополнительных параметров позволяет наряду с установлением однозначной разрешимости задачи (1) – (3) предложить способ нахождения ее решения. При этом от коэффициентов системы требуется только непрерывность на $\bar{\Omega}$, что дает возможность расширить класс разрешимых краевых задач для систем гиперболических уравнений.

Изложим суть метода. Через $\mu(t)$ обозначим значение функции $u(t, x)$ при $x = 0$ и выполним замену $u(t, x) = \widetilde{u}(t, x) + \mu(t)$. Тогда задача (1) – (3) преобразуется в эквивалентную краевую задачу с неизвестной функцией $\mu(t)$:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t \partial x} = A(t, x) \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + C(t, x) \widetilde{u} + f(t, x) + B(t, x)\dot{\mu}(t) + C(t, x)\mu(t), \tag{4}$$

$$\widetilde{u}(T, x) + \mu(T) = \varphi(x), \quad x \in [-T, T], \tag{5}$$

$$\widetilde{u}(t, 0) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{6}$$

$$\begin{aligned} P_2(t) \frac{\partial \widetilde{u}(t, t)}{\partial t} + P_1(t) \frac{\partial \widetilde{u}(t, t)}{\partial x} + S_2(t) \frac{\partial \widetilde{u}(t, -t)}{\partial t} + S_1(t) \frac{\partial \widetilde{u}(t, -t)}{\partial x} + P_0(t)\widetilde{u}(t, t) + \\ + S_0(t)\widetilde{u}(t, -t) + [P_2(t) + S_2(t)]\dot{\mu}(t) + [P_0(t) + S_0(t)]\mu(t) = \psi(t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{7}$$

Задачи (4) – (7) и (1) – (3) эквивалентны в том смысле, что если функция $u(t, x)$ является решением задачи (1) – (3), то пара $(\mu(t) = u(t, 0), \widetilde{u}(t, x) = u(t, x) - u(t, 0))$ будет решением задачи (4) – (7), и наоборот, если $(\mu(t), \widetilde{u}(t, x))$ — решение задачи (4) – (7), то функция $\mu(t) + \widetilde{u}(t, x)$ будет решением задачи (1) – (3). Из (5) и (6) следует, что

$$\mu(T) = \varphi(0). \tag{8}$$

Таким образом, при фиксированных $\dot{\mu}(t)$, $\mu(t)$ в треугольнике $\bar{\Delta}$ получаем задачу Гурса с условиями (6) и

$$\widetilde{u}(T, x) = \varphi(x) - \varphi(0), \quad x \in [-T, T]. \tag{9}$$

Пусть $\widetilde{v}(t,x) = \dfrac{\partial \widetilde{u}(t,x)}{\partial x}$, $\widetilde{w}(t,x) = \dfrac{\partial \widetilde{u}(t,x)}{\partial t}$, тогда из (6), (9) получаем $\widetilde{v}(T,x) = \varphi'(x)$, $\widetilde{w}(t,0) = 0$. Известно, что при фиксированных $\dot{\mu}(t)$, $\mu(t)$ задача Гурса на $\bar{\Omega}$ эквивалентна системе трех интегральных уравнений

$$\widetilde{v}(t,x) = \int\limits_T^t [A(\tau,x)\widetilde{v}(\tau,x) + B(\tau,x)\widetilde{w}(\tau,x) + C(\tau,x)\widetilde{u}(\tau,x)]\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_T^t [f(\tau,x) + B(\tau,x)\dot{\mu}(\tau) + C(\tau,x)\mu(\tau)]\, d\tau + \varphi'(x), \tag{10}$$

$$\widetilde{w}(t,x) = \int\limits_0^x [A(t,\xi)\widetilde{v}(t,\xi) + B(t,\xi)\widetilde{w}(t,\xi) + C(t,\xi)\widetilde{u}(t,\xi)]\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^x [f(t,\xi) + B(t,\xi)\dot{\mu}(t) + C(t,\xi)\mu(t)]\, d\xi, \tag{11}$$

$$\widetilde{u}(t,x) = \int\limits_T^t d\tau \int\limits_0^x [A(\tau,\xi)\widetilde{v}(\tau,\xi) + B(\tau,\xi)\widetilde{w}(\tau,\xi) + C(\tau,\xi)\widetilde{u}(\tau,\xi)]\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_T^t d\tau \int\limits_0^x [f(\tau,\xi) + B(\tau,\xi)\dot{\mu}(\tau) + C(\tau,\xi)\mu(\tau)]\, d\xi + \varphi(x) - \varphi(0). \tag{12}$$

Подставив в соотношение (11) вместо $\widetilde{w}(t,\xi)$ соответствующую правую часть и повторив этот процесс ν, $\nu = 1,2,\ldots,$ раз, получим следующее представление для функции $\widetilde{w}(t,x)$:

$$\widetilde{w}(t,x) = G_\nu(t,x,\widetilde{w}) + H_\nu(t,x,\widetilde{u},\widetilde{v}) + D_\nu(t,x)\dot{\mu}(t) + E_\nu(t,x)\mu(t) + F_\nu(t,x), \tag{13}$$

где

$$G_\nu(t,x,\widetilde{w}) = \int\limits_0^x B(t,\xi_1) \ldots \int\limits_0^{\xi_{\nu-2}} B(t,\xi_{\nu-1}) \int\limits_0^{\xi_{\nu-1}} B(t,\xi_\nu)\widetilde{w}(t,\xi_\nu)\, d\xi_\nu \ldots d\xi_1,$$

$$H_\nu(t,x,\widetilde{u},\widetilde{v}) = \int\limits_0^x [A(t,\xi_1)\widetilde{v}(t,\xi_1) + C(t,\xi_1)\widetilde{u}(t,\xi_1)]\, d\xi_1 + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_0^x B(t,\xi_1) \ldots \int\limits_0^{\xi_{\nu-2}} B(t,\xi_{\nu-1}) \int\limits_0^{\xi_{\nu-1}} [A(t,\xi_\nu)\widetilde{v}(t,\xi_\nu) + C(t,\xi_\nu)\widetilde{u}(t,\xi_\nu)]\, d\xi_\nu \ldots d\xi_1,$$

$$D_\nu(t,x) = \int\limits_0^x B(t,\xi_1)\,d\xi_1 + \ldots + \int\limits_0^x B(t,\xi_1)\ldots\int\limits_0^{\xi_{\nu-1}} B(t,\xi_\nu)\,d\xi_\nu\ldots d\xi_1,$$

$$E_\nu(t,x) = \int\limits_0^x C(t,\xi_1)\,d\xi_1 + \ldots + \int\limits_0^x B(t,\xi_1)\ldots\int\limits_0^{\xi_{\nu-2}} B(t,\xi_{\nu-1})\int\limits_0^{\xi_{\nu-1}} C(t,\xi_\nu)\,d\xi_\nu\ldots d\xi_1,$$

$$F_\nu(t,x) = \int\limits_0^x f(t,\xi_1)\,d\xi_1 + \ldots + \int\limits_0^x B(t,\xi_1)\ldots\int\limits_0^{\xi_{\nu-2}} B(t,\xi_{\nu-1})\int\limits_0^{\xi_{\nu-1}} f(t,\xi_\nu)\,d\xi_\nu\ldots d\xi_1.$$

Подставляя соответствующие выражения $\widetilde{w}(t,x)$ из правой части (13) при $x = t$, $x = -t$ в (7), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной:

$$Q_\nu(t)\dot{\mu}(t) = -\widetilde{E}_\nu(t)\mu(t) - \widetilde{H}_\nu(t,\widetilde{u},\widetilde{v}) - \widetilde{G}_\nu(t,\widetilde{w}) - \widetilde{F}_\nu(t), \quad t\in[0,T], \tag{14}$$

где

$$Q_\nu(t) = P_2(t)[I + D_\nu(t,t)] + S_2(t)[I + D_\nu(t,-t)],$$

$$\widetilde{E}_\nu(t) = P_0(t) + P_2(t)E_\nu(t,t) + S_0(t) + S_2(t)E_\nu(t,-t),$$

$$\widetilde{H}_\nu(t,\widetilde{u},\widetilde{v}) = P_2(t)H_\nu(t,t,\widetilde{u},\widetilde{v}) + S_2(t)H_\nu(t,-t,\widetilde{u},\widetilde{v}) + P_1(t)\widetilde{v}(t,t) +$$
$$+ P_0(t)\widetilde{u}(t,t) + S_1(t)\widetilde{v}(t,-t) + S_0(t)\widetilde{u}(t,-t),$$

$$\widetilde{G}_\nu(t,\widetilde{w}) = P_2(t)G_\nu(t,t,\widetilde{w}) + S_2(t)G_\nu(t,-t,\widetilde{w}),\ \ \widetilde{F}_\nu(t) = P_2(t)F_\nu(t,t) + S_2(t)F_\nu(t,-t) - \psi(t).$$

Соотношения (10) – (12) и (14) с условием (8) позволяют найти решение задачи (1) – (3) в треугольнике $\bar{\Omega}$.

Таким образом, процесс нахождения неизвестных функций в методе введения дополнительного параметра разбивается на две части:

1) нахождение введенных дополнительных параметров $\dot{\mu}(t)$, $\mu(t)$ из соотношений (14) с условием (8);

2) нахождение неизвестных функций $\widetilde{u}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$ из системы интегральных уравнений (10) – (12).

Если известны функции $\dot{\mu}(t)$, $\mu(t)$, то, решая систему интегральных уравнений (10) – (12), находим функции $\widetilde{u}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$ и, суммируя $\mu(t) + \widetilde{u}(t,x)$, получаем решение исходной задачи. Если известны функции $\widetilde{u}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, то, решая уравнение (14) при условии (8), находим $\dot{\mu}(t)$ $\mu(t)$ и, снова суммируя $\mu(t) + \widetilde{u}(t,x)$, получаем решение задачи (1) – (3).

Поскольку неизвестными являются как функции $\dot{\mu}(t)$, $\mu(t)$, так и функции $\widetilde{u}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, применяется итерационный метод, и решение функциональных соотношений (10) – (12), (14) с условием (8) находится как пределы последовательностей $\{\dot{\mu}^{(k)}(t)\}$, $\{\mu^{(k)}(t)\}$, $\{\widetilde{u}^{(k)}(t,x)\}$, $\{\widetilde{v}^{(k)}(t,x)\}$, $\{\widetilde{w}^{(k)}(t,x)\}$, определяемых следующим способом.

Шаг 0. Предполагая в правой части (14) $\mu(t) = \varphi(0)$, $\widetilde{u}(t,x) = \varphi(x) - \varphi(0)$, $\widetilde{v}(t,x) = \varphi'(x)$, $\widetilde{w}(t,x) = 0$, из уравнения (14) находим $\dot{\mu}^{(0)}(t)$. Используя условия (8), получаем функции $\mu^{(0)}(t) : \mu^{(0)}(t) = \varphi(0) + \int_T^t \dot{\mu}^{(0)}(\tau)d\tau$. Из системы интегральных уравнений (10)–(12), где $\mu(t) = \mu^{(0)}(t)$, $\dot{\mu}(t) = \dot{\mu}^{(0)}(t)$, определяем функции $\widetilde{u}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{v}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(0)}(t,x)$.

Шаг 1. Из уравнения (14), где в правой части $\mu(t) = \mu^{(0)}(t)$, $\widetilde{u}(t,x) = \widetilde{u}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x) = \widetilde{w}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x) = \widetilde{v}^{(0)}(t,x)$, находим $\dot{\mu}^{(1)}(t)$. Вновь используя условия (8), получаем $\mu^{(1)}(t) = \varphi(0) + \int_T^t \dot{\mu}^{(1)}(\tau)d\tau$ и из систем интегральных уравнений (10)–(12), где $\mu(t) = \mu^{(1)}(t)$, $\dot{\mu}(t) = \dot{\mu}^{(1)}(t)$, определяем функции $\widetilde{u}^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{v}^{(1)}(t,x)$. И т. д.

Следующее утверждение обеспечивает осуществимость и сходимость предложенного способа нахождения решения, а также существование единственного классического решения задачи (1)–(3).

Теорема. *Пусть при некотором* ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, $(n \times n)$*-матрица* $Q_\nu(t)$ *обратима для всех* $t \in [0,T]$ *и выполняются следующие неравенства:*

a) $\|[Q_\nu(t)]^{-1}\| \le \gamma_\nu(t)$, $\gamma_\nu(t)$ — *положительная, непрерывная по* $t \in [0,T]$ *функция,*

b) $q_\nu(t) = \gamma_\nu(t)\left(\|P_2(t)\| + \|S_2(t)\|\right)\left[e^{\beta T} - \sum_{i=0}^{\nu} \dfrac{(\beta T)^i}{i!}\right] \le \chi < 1$, *где* $\beta = \max\limits_{(t,x)\in\bar{\Omega}} \|B(t,x)\|$, χ — *постоянная.*

Тогда существует единственное классическое решение задачи (1)–(3).

Доказательство. В силу условия a) при фиксированных $\mu(t)$, $\widetilde{u}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x)$ функция $\dot{\mu}(t)$ определяется единственным образом из уравнения (14):

$$\dot{\mu}(t) = -[Q_\nu(t)]^{-1}\left\{\widetilde{E}_\nu(t)\mu(t) + \widetilde{H}_\nu(t,\widetilde{u},\widetilde{v}) + \widetilde{G}_\nu(t,\widetilde{w}) + \widetilde{F}_\nu(t)\right\}, \quad t \in [0,T].$$

При фиксированных $\mu(t) \in C([0,T], R^n)$, $\dot{\mu}(t) \in C([0,T], R^n)$ система интегральных уравнений (10)–(12) имеет единственное решение $\widetilde{u}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x)$, где $\widetilde{u}$, $\widetilde{w}$, $\widetilde{v}$ принадлежат $C(\bar{\Omega}, R^n)$, и при предположениях относительно данных задачи справедливы оценки

$$\begin{aligned}
&\max_{x\in[-T,T]} \|\widetilde{w}(t,x)\| \le \left[e^{\beta T} - 1\right]\|\dot{\mu}(t)\| + \\
&\quad + Te^{\beta T} \max_{x\in[-T,T]} \|C(t,x)\|\,\|\mu(t)\| + Te^{\beta T} \max_{x\in[-T,T]} \|f(t,x)\| + \\
&\quad + Te^{\beta T} \max\Big\{\max_{x\in[-T,T]} \|A(t,x)\|, \max_{x\in[-T,T]} \|C(t,x)\|\Big\}\Big\{\max_{x\in[-T,T]} \|\widetilde{u}(t,x)\| + \max_{x\in[-T,T]} \|\widetilde{v}(t,x)\|\Big\},
\end{aligned} \tag{15a}$$

$$\max_{x\in[-T,T]}\|\widetilde{u}(t,x)\| + \max_{x\in[-T,T]}\|\widetilde{v}(t,x)\| \le \Bigg\{\max_{x\in[-T,T]}\|\varphi'(x)\| + \max_{x\in[-T,T]}\|\varphi(x)-\varphi(0)\| +$$

$$+ (1+T)\int\limits_T^t \Big[1+\beta T e^{\beta T}\Big]\max_{x\in[-T,T]}\|f(\tau,x)\|d\tau + (1+T)\int\limits_T^t \beta T e^{\beta T}\|\dot{\mu}(\tau)\|d\tau +$$

$$+ (1+T)\int\limits_T^t \Big[1+\beta T e^{\beta T}\Big]\max_{x\in[-T,T]}\|C(\tau,x)\|\,\|\mu(\tau)\|d\tau\Bigg\}\times$$

$$\times\exp\Bigg\{(1+\beta T e^{\beta T})\int\limits_T^t \max\Big\{\max_{x\in[-T,T]}\|A(\tau,x)\|, \max_{x\in[-T,T]}\|C(\tau,x)\|\Big\}d\tau\Bigg\}. \qquad (15b)$$

Из интегрального уравнения (11) с помощью неравенства Беллмана – Гронуолла для разностей последовательных приближений $\widetilde{w}^{(m)}(t,x) - \widetilde{w}^{(m-1)}(t,x)$ получаем оценку

$$\max_{x\in[-T,T]}\|\widetilde{w}^{(m)}(t,x) - \widetilde{w}^{(m-1)}(t,x)\| \le \Big[e^{\beta T}-1\Big]\|\dot{\mu}^{(m)}(t)-\dot{\mu}^{(m-1)}(t)\| +$$

$$+ T e^{\beta T}\max\Big\{\max_{x\in[-T,T]}\|A(t,x)\|, \max_{x\in[-T,T]}\|C(t,x)\|\Big\}\times$$

$$\times\Big[\max_{x\in[-T,T]}\|\widetilde{v}^{(m)}(t,x)-\widetilde{v}^{(m-1)}(t,x)\| + \max_{x\in[-T,T]}\|\widetilde{u}^{(m)}(t,x)-\widetilde{u}^{(m-1)}(t,x)\|\Big] +$$

$$+ T e^{\beta T}\max_{x\in[-T,T]}\|C(t,x)\|\,\|\mu^{(m)}(t)-\mu^{(m-1)}(t)\|, \qquad (16a)$$

Для разностей $\mu^{(m)}(t)-\mu^{(m-1)}(t)$, $\widetilde{u}^{(m)}(t,x)-\widetilde{u}^{(m-1)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(m)}(t,x)-\widetilde{w}^{(m-1)}(t,x)$, $m = 1,2,\ldots$, с учетом неравенств (15), (16a) справедливы оценки

$$\|\mu^{(m)}(t)-\mu^{(m-1)}(t)\| \le \int\limits_T^t \|\dot{\mu}^{(m)}(\tau)-\dot{\mu}^{(m-1)}(\tau)\|d\tau, \qquad (16b)$$

$$\max_{x\in[-T,T]}||\widetilde{v}^{(m)}(t,x)-\widetilde{v}^{(m-1)}(t,x)|| + \max_{x\in[-T,T]}||\widetilde{u}^{(m)}(t,x)-\widetilde{u}^{(m-1)}(t,x)|| \le$$

$$\le a_0(t)\int\limits_T^t ||\dot{\mu}^{(m)}(\tau)-\dot{\mu}^{(m-1)}(\tau)||d\tau, \qquad (16c)$$

где

$$a_0(t) = e^{a_1(t)}(1+T)\Big[\beta T e^{\beta T} + a_2(t)\Big], \quad a_2(t) = \Big[1+\beta T e^{\beta T}\Big]\int\limits_T^t \max_{x\in[-T,T]}\|C(\tau,x)\|d\tau,$$

$$a_1(t) = (1+T)\,(1+\beta T e^{\beta T}) \int\limits_T^t \max\left\{\max_{x\in[-T,T]} \|A(\tau,x)\|, \max_{x\in[-T,T]} \|C(\tau,x)\|\right\} d\tau.$$

Для разности $\dot{\mu}^{(m+1)}(t) - \dot{\mu}^{(m)}(t)$ имеем оценку

$$\|\dot{\mu}^{(m+1)}(t) - \dot{\mu}^{(m)}(t)\| \le \gamma_\nu(t) \Bigg(b_0(t)\,\|\mu^{(m)}(t) - \mu^{(m-1)}(t)\| +$$

$$+ b_1(t)\left[\max_{x\in[-T,T]} \|\widetilde{v}^{(m)}(t,x) - \widetilde{v}^{(m-1)}(t,x)\| + \max_{x\in[-T,T]} \|\widetilde{u}^{(m)}(t,x) - \widetilde{u}^{(m-1)}(t,x)\|\right] +$$

$$+ (\,\|P_2(t)\| + \|S_2(t)\|) \int\limits_0^t \beta \ldots \int\limits_0^{\xi_{\nu-2}} \beta \int\limits_0^{\xi_{\nu-1}} \beta \|\widetilde{w}^{(m)}(t,\xi_\nu) - \widetilde{w}^{(m-1)}(t,\xi_\nu)\| d\xi_\nu \ldots d\xi_1 \Bigg),$$

где

$$b_0(t) = \|P_0(t)\| + \|S_0(t)\| + (\|P_2(t)\| + \|S_2(t)\|) \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{(\beta T)^i}{i!} T \max_{x\in[-T,T]} \|C(t,x)\|,$$

$$b_1(t) = (\|P_2(t)\| + \|S_2(t)\|) \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{(\beta T)^i}{i!} T \max\left[\max_{x\in[-T,T]} \|A(t,x)\| \max_{x\in[-T,T]} \|C(t,x)\|\right] +$$

$$+ \max\{\|P_1(t)\|, \|P_0(t)\|, \|S_1(t)\|, \|S_0(t)\|\}.$$

Тогда с учетом вышеприведенных оценок получим

$$\|\dot{\mu}^{(m+1)}(t) - \dot{\mu}^{(m)}(t)\| \le \chi \|\dot{\mu}^{(m)}(t) - \dot{\mu}^{(m-1)}(t)\| + b_2(t) \int\limits_T^t \|\dot{\mu}^{(m)}(\tau) - \dot{\mu}^{(m-1)}(\tau)\| \, d\tau, \quad (17)$$

где

$$b_2(t) = \gamma_\nu(t)\{b_0(t) + b_1(t) a_0(t) + (\|P_2(t)\| + \|S_2(t)\|) \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(\beta T)^i}{i!} T e^{\beta T} \times$$

$$\times \left(\max_{x\in[-T,T]} \|C(t,x)\| + \max\left\{\max_{x\in[-T,T]} \|A(t,x)\|, \max_{x\in[-T,T]} \|C(t,x)\|\right\}\right).$$

Согласно нулевому и первому шагу алгоритма имеем следующие оценки:

$$\|\dot{\mu}^{(0)}(t)\| \le \gamma_\nu(t) \Bigg\{ b_0(t)\|\varphi(0)\| + b_1(t)\left(\max_{x\in[-T,T]} \|\varphi'(x)\| + \max_{x\in[-T,T]} \|\varphi(x) - \varphi(0)\|\right) +$$

$$+ (\|P_2(t)\| + \|S_2(t)\|) \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{(\beta T)^i}{i!} T \max_{x\in[-T,T]} \|f(t,x)\| + \|\psi(t)\| \Bigg\} = d_1(t),$$

$$\|\mu^{(0)}(t)\| \le \int\limits_T^t d_1(\tau)\,d\tau = d_2(t),$$

$$\max_{x\in[-T,T]}\|\widetilde{v}^{(0)}(t,x)\| + \max_{x\in[-T,T]}\|\widetilde{u}^{(0)}(t,x)\| \le \Big\{ \max_{x\in[-T,T]}\|\varphi'(x)\| + \max_{x\in[-T,T]}\|\varphi(x)-\varphi(0)\| +$$
$$+(1+T)\beta e^{\beta T}\int\limits_T^t d_1(\tau)d\tau + (1+T)\left[1+\beta T e^{\beta T}\right]\int\limits_T^t \max_{x\in[-T,T]}\|C(\tau,x)\|\,d_2(\tau)d\tau +$$
$$+(1+T)\left[1+\beta T e^{\beta T}\right]\int\limits_T^t \max_{x\in[-T,T]}\|f(\tau,x)\|\,d\tau\Big\} e^{a_1(t)} = d_3(t), \tag{18}$$

$$\max_{x\in[-T,T]}\|\widetilde{w}^{(0)}(t,x)\| \le \left[e^{\beta T}-1\right] d_1(t) +$$
$$+T e^{\beta T}\left(\max\Big\{\max_{x\in[-T,T]}\|A(t,x)\|, \max_{x\in[-T,T]}\|C(t,x)\|\Big\}\right) d_3(t) +$$
$$+T e^{\beta T}\max_{x\in[-T,T]}\|C(t,x)\| d_2(t) + T e^{\beta T}\max_{x\in[-T,T]}\|f(t,x)\| = d_4(t),$$

$$\|\dot{\mu}^{(1)}(t)-\dot{\mu}^{(0)}(t)\| \le \gamma_\nu(t)\Big(b_0(t)\left[d_2(t)+\|\varphi(0)\|\right] +$$
$$+ b_1(t)\left[d_3(t) + \max_{x\in[-T,T]}\|\varphi'(x)\| + \max_{x\in[-T,T]}\|\varphi(x)-\varphi(0)\|\right] + \beta T d_4(t)\Big) = d(t).$$

Для функции $\Theta_m(t) = \|\dot{\mu}^{(m+1)}(t)-\dot{\mu}^{(m)}(t)\|$ на основе (17) установим неравенство

$$\Theta_m(t) \le \chi^m \sum_{j=0}^m \frac{m!}{(m-j)!\cdot j!}\,\frac{1}{j!}\left(\int\limits_T^t b_1(\tau)d\tau\right)^j \max_{t\in[0,T]} d(t) \le$$
$$\le \sum_{j=0}^m \frac{m!}{(m-j)!\cdot j!}\,\chi^{m-j}\frac{1}{j!}\left(\frac{\bar{H}_1}{\chi}\right)^j \bar{H}_2, \tag{19}$$

где $\bar{H}_1 = \displaystyle\int_0^T b_2(\tau)d\tau$, $\bar{H}_2 = \max_{t\in[0,T]} d(t)$. Используем следствие теоремы Теплица [10, с. 325] — предельное соотношение п. 6^0 [10, с. 327] при $a = 0$. Поскольку $\chi \in (0,1)$, выберем число $\theta \in (0,(1-\chi)/\chi)$. Согласно этому утверждению, если $z_m = \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\bar{H}_1}{\theta\chi}\right)^m \to$

$\to 0$ и $\theta = \text{const}$ ($\theta > 0$), то и $\tilde{z}_m = \dfrac{1}{(1+\theta)^m} \sum_{j=0}^{m} \dfrac{m!}{(m-j)!\cdot j!}\,\theta^j \,\dfrac{1}{j!}\left(\dfrac{\bar{H}_1}{\theta\chi}\right)^j \to 0$ при $m \to \infty$. Нетрудно убедиться, что $\lim_{m\to\infty} z_m = 0$. Тогда существует число $\bar{H}_3 > 0$, ограничивающее последовательность $\tilde{z}_m$, и из (19) получаем основную оценку

$$\Theta_m(t) \le \chi^m (1+\theta)^m \,\tilde{z}_m\, \bar{H}_2 \le \tilde{\chi}^m\, \bar{H}_2\, \bar{H}_3, \quad \text{где} \quad \tilde{\chi} = \chi(1+\theta) < 1.$$

Отсюда следует равномерная сходимость ряда $\sum_{m=1}^{\infty} \Theta_m(t)$ при $t \in [0,T]$, обеспечивающая равномерную сходимость последовательностей $\dot{\mu}^{(m)}(t)$ к непрерывной на $t \in [0,T]$ функции $\dot{\mu}^*(t)$. Из неравенства (16b) вытекает равномерная сходимость последовательности $\mu^{(m)}(t)$ к функции $\mu^*(t) \in C([0,T], R^n)$. На основе оценок (16c), (16a) имеем равномерную относительно $(t,x) \in \bar{\Omega}$ сходимость последовательностей $\widetilde{u}^{(m)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(m)}(t,x)$, $\widetilde{v}^{(m)}(t,x)$ соответственно к функциям $\widetilde{u}^*(t,x)$, $\widetilde{w}^*(t,x)$, $\widetilde{v}^*(t,x)$, принадлежащим $C(\bar{\Omega}, R^n)$. Очевидно, что функция $u^*(t,x)$, получаемая как сумма функций $\mu^*(t) + \widetilde{u}^*(t,x)$, принадлежит $C(\bar{\Omega}, R^n)$ и является классическим решением задачи (1) – (3).

Докажем единственность решения задачи (1) – (3). Пусть существуют два классических решения $u^*(t,x)$ и $u^{**}(t,x)$. Тогда соответствующие им пары $(\mu^*(t) + \widetilde{u}^*(t,x))$, $(\mu^{**}(t) + \widetilde{u}^{**}(t,x))$ будут решениями краевой задачи с параметром (4) – (7), и аналогично (17) для разности $\dot{\mu}^*(t) - \dot{\mu}^{**}(t)$ справедлива оценка

$$\|\dot{\mu}^*(t) - \dot{\mu}^{**}(t)\| \le \frac{1}{1-\chi} \int_T^t b_2(\tau) \|\dot{\mu}^*(\tau) - \dot{\mu}^{**}(\tau)\| d\tau. \tag{20}$$

Из (20) с помощью неравенства Гронуолла – Беллмана имеем $\|\dot{\mu}^*(t) - \dot{\mu}^{**}(t)\| = 0$ и в силу соотношений

$$\mu^*(t) = \varphi(0) + \int_T^t \dot{\mu}^*(\tau) d\tau, \quad \mu^{**}(t) = \varphi(0) + \int_T^t \dot{\mu}^{**}(\tau)\, d\tau$$

получим $\mu^*(t) = \mu^{**}(t)$. Аналогично (15c) устанавливается неравенство

$$\max_{x\in[-T,T]} \|\widetilde{v}^*(t,x) - \widetilde{v}^{**}(t,x)\| + \max_{x\in[-T,T]} \|\widetilde{u}^*(t,x) - \widetilde{u}^{**}(t,x)\| \le a_0(t) \int_T^t \|\dot{\mu}^*(\tau) - \dot{\mu}^{**}(\tau)\| d\tau,$$

откуда следует, что $\widetilde{u}^*(t,x) = \widetilde{u}^{**}(t,x)$ при всех $(t,x) \in \bar{\Delta}$.

Теорема доказана.

Рассмотрим задачу из работы [11], которая решалась методом Римана. Соотношение (3) имеет вид

$$u(t,t) + u(t,-t) = \psi(t), \quad t \in [0,T]. \tag{3$'$}$$

Относительно вектор-функции $\psi(t)$ предполагается, что она непрерывно дифференцируема на $[0,T]$. Продифференцируем (3$'$) по переменной t :

$$\frac{\partial u(t,t)}{\partial t} + \frac{\partial u(t,t)}{\partial x} + \frac{\partial u(t,-t)}{\partial t} - \frac{\partial u(t,-t)}{\partial x} = \dot{\psi}(t), \quad t \in [0,T],$$

т. е. $P_2(t) = I$, $P_1(t) = I$, $S_2(t) = I$, $S_1(t) = -I$, $P_0(t) = 0$, $S_0(t) = 0$.

Возьмем $\nu = 1$. Матрица $Q_1(t)$ имеет вид

$$Q_1(t) = 2\left(I + \frac{1}{2}\int\limits_0^t B(t,\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_0^{-t} B(t,\xi)d\xi\right).$$

Если предположить, что $\beta T < 1$, то матрица $Q_1(t)$ будет обратима для всех $t \in [0,T]$ и для ее обратной справедлива оценка

$$\|[Q_1(t)]^{-1}\| \leq \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\beta T}.$$

Тогда имеет место следующее утверждение.

Следствие. *Пусть справедливы предположения относительно исходных данных задачи (1) – (3′) и выполняются неравенства*

$$\beta T < 1, \quad q_1(t) = \frac{1}{1-\beta T}\left[e^{\beta T} - 1 - \beta T\right] < 1.$$

Тогда существует единственное классическое решение задачи (1), (2), (3′).

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
2. *Джумабаев Д. С., Асанова А. Т.* Метод параметризации применительно к полупериодической краевой задаче для гиперболического уравнения // Изв. МОН РК, НАН РК. Сер. физ.-мат. — 2001. — № 1. — С. 17 – 23.
3. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Однозначная разрешимость краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2002. — **42**, № 11. — С. 1673 – 1685.
4. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. — 2003. — **39**, № 10. — С. 1343 – 1354.
5. *Джумабаев Д. С.* Метод параметризации решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. АН КазССР. — 1988. — № 1. — С. 48 – 52.
6. *Джумабаев Д. С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1989. — **29**, № 1. — С. 50 – 66.
7. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Критерий корректной разрешимости краевой задачи для системы гиперболических уравнений // Изв. МОН РК, НАН РК. Сер. физ.-мат. — 2002. — № 3. — С. 20 – 26.
8. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* О корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Докл. РАН. — 2003. — **391**, № 3. — С. 295 – 297.
9. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. — 2005. — **41**, № 3. — С. 337 – 346.
10. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. — М.: Наука, 1969. — Т. 2. — 800 с.
11. *Нахушев А. М.* Методика постановки корректных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка на плоскости // Дифференц. уравнения. — 1970. — **6**, № 2. — С. 192 – 195.

Получено 11.06.08