УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Д. Я. Хусаинов*

Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко
Украина, 01601, ул. Владимирская, 64
e-mail: dkh@unicyb.kiev.ua

Й. Диблик**

Техн. ун-т
Чехия, 61600, Брно, ул. Техническая
e-mail: diblik@feec.vutbr.cz

М. Ружичкова***

Жилин. ун-т
Словакия, 01026, Жилина
e-mail: miroslava.ruzickova@fpv.uniza.sk

А. Баштинцева****

Техн. ун-т
Чехия, 61600, Брно, ул. Техническая
e-mail: xbasti00@stud.feec.vutbr.cz

We consider the dynamical model of Leonov described by a differential system with delay. We study stability of a given solution in terms of the Lyapunov function method with the condition of Razumikhin satisfied. We obtain an estimate for convergence of solutions of the system to a given one.

Розглянуто динамічну модель Леонтьєва, яка описується системою диференціальних рівнянь з запізнюванням. Досліджено стійкість програмного розв'язку з допомогою методу функцій Ляпунова з умовою Разуміхіна. Отримано оцінку збіжності розв'язків системи до програмного розв'язку.

1. Скалярное уравнение. Будем рассматривать управляемую систему, описываемую скалярным дифференциальным уравнением

$$x(t) = ax(t) + b\dot{x}(t) + u(t), \quad 0 < b < 1, \quad 0 < a < 1. \tag{1}$$

Поскольку $0 < a < 1$, $b > 0$, произвольное решение уравнения (1) при любом фиксированном программном управлении $u(t)$ является неустойчивым. Будем искать его в виде

* Частично поддержан Словацко-Украинским проектом № SK-UA-0028-07.

** Частично поддержан грантом P201/11/0768 Грантового агентства Чехии и Совета исследований Чехии 0021630503.

*** Частично поддержана грантом VEGA 1/0090/09 Грантового агентства Словакии и грантом APVV-0700-07 Словацкого совета исследований.

**** Частично поддержана проектом FEKT/FSI-S-11-1-1159.

суммы составляющей обратной связи $cx(t)$ и дополнительного управления $u_0(t)$, обеспечивающего существования заданного решения $\varphi(t)$, т. е.

$$u(t) = cx(t) + u_0(t),$$

где постоянная c выбирается из условия устойчивости. После подстановки имеем

$$b\dot{x}(t) + (a + c - 1)x(t) = -u_0(t).$$

Далее управление $u_0(t)$ выбирается таким образом, чтобы полученное уравнение имело наперед заданное решение $x(t) \equiv \varphi(t)$, $t \geq 0$. Для этого положим

$$u_0(t) = (1 - a - c)\varphi(t) - b\dot{\varphi}(t).$$

Полагая в уравнении (1)

$$u(t) = cx(t) + (1 - a - c)\varphi(t) - b\dot{\varphi}(t),$$

приводим его к виду

$$b\dot{x}(t) + (a + c - 1)x(t) = f(t), \quad f(t) = b\dot{\varphi}(t) + (a + c - 1)\varphi(t).$$

Это уравнение имеет решение $x(t) \equiv \varphi(t)$, $t \geq 0$, которое при $a + c - 1 > 0$ является асимптотически устойчивым. Общим решением уравнения будет

$$x(t) = e^{-\frac{a+c-1}{b}t}x(0) + \frac{1}{b}\int\limits_0^t e^{-\frac{a+c-1}{b}(t-s)}\left[b\dot{\varphi}(s) + (a + c - 1)\varphi(s)\right] ds,$$

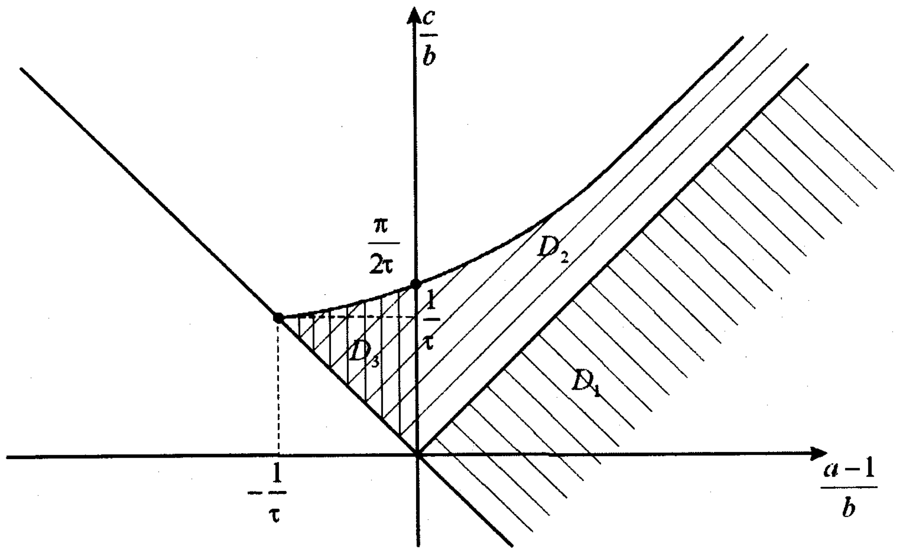
причем чем больше величина c, тем сильнее скорость сходимости „возмущенных” решений к програмному.

Однако, как правило, управляющие воздействия приходят с некоторым запаздыванием во времени („информационное запаздывание”). Поэтому более реальным является управление вида $u(t) = cx(t - \tau) + (1 - a)\varphi(t) - c\varphi(t - \tau) - b\dot{\varphi}(t)$. Отсюда управляемая система имеет вид

$$b\dot{x}(t) + (a - 1)x(t) + cx(t - \tau) = f(t), \quad f(t) = b\dot{\varphi}(t) + (a + c - 1)\varphi(t). \tag{2}$$

Как известно [1], областью устойчивости в пространстве параметров уравнения с запаздыванием (2) (при фиксированном $\tau > 0$) является область $D = D_1 \bigcup D_2 \bigcup D_3$, причем в области D_1 асимптотическая устойчивость равномерна по запаздыванию, а в области $D_2 \bigcup D_3$ — при $\tau < \tau_0$, где [1]

$$\tau_0 = \frac{\arccos\left(\dfrac{1-a}{c}\right)}{\sqrt{\left(\dfrac{c}{b}\right)^2 - \left(\dfrac{1-a}{b}\right)^2}}.$$



Как следует из условий (1), налагаемых на параметры уравнения, выполняется неравенство $\dfrac{a-1}{b} < 0$. Поэтому областью устойчивости уравнения (2) фактически является область D_3. И, как видно из рисунка (при фиксированном запаздывании $0 < \tau < \tau_0$), в отличие от уравнения без запаздывания при увеличении „коэффициента обратной связи” c устойчивость теряется. Если для скалярного уравнения (2) границами области устойчивости D_3 являются кривые

$$a-1=0, \quad 0 \le \frac{c}{b} \le \frac{\pi}{2\tau},$$

$$c = 1-a, \quad -\frac{1}{\tau} \le \frac{a-1}{b} \le 0,$$

$$\frac{c}{b} = \frac{y}{\sin \tau y}, \quad \frac{a-1}{b} = -\frac{y \cos \tau y}{\sin \tau y}, \quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2\tau},$$

то для систем уравнений получить аналогичные границы области устойчивости в пространстве параметров уже невозможно.

Более эффективным в этом случае является второй метод Ляпунова. Для систем с запаздыванием прямой метод Ляпунова используется в двух модификациях. Разработан метод функционалов Ляпунова – Красовского и метод конечномерных функций Ляпунова с дополнительным условием Разумихина [1 – 3]. Как правило, метод функционалов дает достаточные условия асимптотической устойчивости, равномерные по величине запаздывания. И для систем рассматриваемого вида его использование затруднительно. Поэтому будем использовать метод квадратичных функций Ляпунова. Для уравнения

$$b\dot{x}(t) + (a-1)x(t) + cx(t-\tau) = 0 \tag{3}$$

функцию Ляпунова будем искать в виде квадратичной формы $V(x) = (bx)^2$. Ее полная производная в силу уравнения (3) имеет вид

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = 2(bx(t))\,(b\dot{x}(t)) = 2(bx(t))[-(a-1)x(t) - cx(t-\tau)] =$$
$$= 2(bx(t))\{-(a-1+c)x(t) - c[x(t-\tau) - x(t)]\} =$$
$$= -2b(a+c-1)\,x^2(t) + 2bcx(t)[x(t) - x(t-\tau)].$$

Для оценки величины разности текущей координаты и координаты с запаздыванием поступим следующим образом. Уравнение (3) запишем в интегральном виде

$$x(t) = x(t-\tau) + \frac{1-a}{b}\int\limits_{t-\tau}^{t} x(s)\,ds - \frac{c}{b}\int\limits_{t-\tau}^{t} x(s-\tau)\,ds.$$

Отсюда, учитывая, что $0 < b < 1$, $0 < a < 1$, получаем

$$|x(t) - x(t-\tau)| \le \frac{1-a}{b}\int\limits_{t-\tau}^{t} |x(s)|\,ds + \frac{|c|}{b}\int\limits_{t-\tau}^{t} |x(s-\tau)|\,ds.$$

Условие Разумихина заключается в том, что при оценке полной производной функции Ляпунова предполагается, что решение $x(s)$ при $s < t$ находится внутри области, ограниченной поверхностью уровня функции Ляпунова $V(x) = \alpha$, т. е. для выбранной функции $V(x) = (bx)^2$ это означает, что $|x(s)| < |x(t)|$ при $s < t$. Поэтому

$$|x(t) - x(t-\tau)| \le \frac{1-a}{b}|x(t)|\tau + \frac{|c|}{b}|x(t)|\tau = \frac{1}{b}\,(1-a+|c|)\tau|x(t)|.$$

Для полной производной функции Ляпунова будем иметь

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \le -2\{b(a+c-1) - |c|(1-a+|c|)\tau\}\,x^2(t).$$

Как следует из положений второго метода Ляпунова, уравнение (3) будет асимптотически устойчивым при выполнении неравенств

$$(a+c-1) > 0, \quad \tau < \frac{b(a+c-1)}{|c|(1-a+|c|)}.$$

И при фиксированных $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ условия устойчивости имеют вид

$$c > 1-a, \quad \tau < \frac{b(a+c-1)}{c(1-a+c)}. \tag{4}$$

Неравенство (4), определяющее область устойчивости в пространстве параметров, несколько „хуже", чем представленное областью D_3. Действительно, например, при $a - 1 = 0$ в области D_3 имеем $0 < \frac{c}{b} < \frac{\pi}{2\tau}$, а из условий (4) следует, что $0 < \frac{c}{b} < \frac{1}{\tau}$.

2. Система уравнений. Как известно, классическая динамическая модель Леонтьева имеет вид

$$x(t) = Ax(t) + B\dot{x}(t) + c(t). \tag{5}$$

Здесь $x(t) \in R^n$, $c(t) \in R^n$ — непрерывно дифференцируемые векторные функции, $A \in \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times n}$ — квадратные матрицы с постоянными коэффициентами, причем [4]

$$0 \le a_{ij} < 1, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1, \quad 0 \le b_{ij} < 1, \quad \sum_{j=1}^{n} b_{ij} < 1, \quad c_i(t) \ge 0, \quad i = \overline{1,n}, t \ge 0,$$

$$\det A \ne 0, \quad \det B \ne 0.$$

Векторная функция $c(t)$ характеризует инвестиции и является, по своей сути, функцией управления. Если желаемым решением системы является векторная функция $x(t) = = \varphi(t)$, причем оно должно быть асимптотически устойчивым, то, как следует из изложенного выше, управление $c(t)$ следует брать в виде

$$c(t) = Cx(t-\tau) + (I-A)\varphi(t) - C\varphi(t-\tau) - B\dot{\varphi}(t),$$

где $\tau > 0$ — время, затраченное на прохождения информации (информационное запаздывание) и построение управления. Тогда система (5) примет вид

$$\begin{gathered} B\dot{x}(t) + (A-I)x(t) + Cx(t-\tau) = f(t), \\ f(t) = [B\dot{\varphi}(t) + (A-I)\varphi(t) + C\varphi(t-\tau)]. \end{gathered} \tag{6}$$

Устойчивость (асимптотическая устойчивость) и характеристики переходных процессов любого решения линейной неоднородной системы (6) целиком определяется устойчивостью (асимптотической устойчивостью) нулевого решения соответствующей однородной системы

$$B\dot{x}(t) = (I-A)x(t) - Cx(t-\tau). \tag{7}$$

Для исследования устойчивости программного решения $x(t) = \varphi(t)$ системы (6) и вычисления характеристик переходных процессов будем использовать функцию Ляпунова квадратичного вида $V(x,t) = e^{\gamma t}(Bx)^T H(Bx)$ с некоторой симметричной положительно определенной матрицей H. Условия Разумихина $V(x(s),s) < V(x(t),t)$ при $s < t$ применительно к этой функции имеют вид [2]

$$e^{\gamma s}\lambda_{\min}(B^T HB)|x(s)|^2 \le V(x(s),s) < V(x(t),t) \le e^{\gamma t}\lambda_{\max}(B^T HB)|x(t)|^2,$$

или

$$|x(s)| \le \sqrt{\varphi(B^T HB)}|x(t)|e^{\frac{1}{2}\gamma(t-s)}, \quad \varphi(B^T HB) = \frac{\lambda_{\max}(B^T HB)}{\lambda_{\min}(B^T HB)}, \tag{8}$$

где $\lambda_{\max}(.)$, $\lambda_{\min}(.)$ — экстремальные собственные числа соответствующих симметричных положительно определенных матриц. Под векторной и матричной нормами будем понимать следующие:

$$|x(t)| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad |A| = \left\{ \lambda_{\max}(A^T A) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \|x(0)\| = \max_{-\tau \le s \le 0} \{|x(s)|\}.$$

Обозначим в расширенном фазовом пространстве $R^n \times R$ переменных (x,t) через $\partial V_t^{\alpha,\gamma}$ поверхность уровня $V(x,t) = \alpha$ функции Ляпунова $V(x,t) = e^{\gamma t}(Bx)^T H(Bx)$, а через $V_t^{\alpha,\gamma}$ область, которую она ограничивает, т. е.

$$\partial V_t^{\alpha,\gamma} = \{(x,t) : V(x,t) = \alpha\}, \quad V_t^{\alpha,\gamma} = \{(x,t) : V(x,t) < \alpha\}.$$

Справедливы следующие вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Для решения $x(t)$ системы с запаздыванием (7) при $-\tau \le t \le 0$ выполняется неравенство*

$$|x(t)| < N\|x(0)\|_\tau e^{rt}, \quad N = 1 + |B^{-1}C|\tau, \quad r = |B^{-1}(I-A)|. \tag{9}$$

Доказательство. Запишем систему уравнений (7) в интегральном виде

$$B[x(t) - x(0)] = \int_0^t [(I-A)x(s) - Cx(s-\tau)]\, ds.$$

При $0 < t \le \tau$ будет выполняться

$$|x(t)| \le |x(0)| + \left| B^{-1}(I-A) \int_0^t x(s)\, ds - B^{-1}C \int_0^t x(s-\tau)\, ds \right|,$$

или

$$|x(t)| \le |x(0)| + |B^{-1}(I-A)| \int_0^t |x(s)|\, ds + |B^{-1}C| \int_0^t |x(s-\tau)|\, ds.$$

Отсюда

$$|x(t)| < [1 + |B^{-1}C|\tau]\|x(0)\|_\tau + |B^{-1}(I-A)| \int_0^t |x(s)|\, ds.$$

Используя неравенство Беллмана [5], на промежутке $0 \le t \le \tau$ получаем

$$|x(t)| < N\|x(0)\|_\tau e^{rt}, \quad N = 1 + |B^{-1}C|\tau, \quad r = |B^{-1}(I-A)|,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть для решения $x(t)$ системы с запаздыванием (7) существует $\alpha > 0$ такое, что при $t = T > \tau$ будет выполняться $(x(T), T) \in \partial V_t^{\alpha,\gamma}$, а при $s < T -$ $(x(s), s) \in V_t^{\alpha,\gamma}$. Тогда имеет место неравенство*

$$|x(T) - x(T-\tau)| \le 2\,\frac{e^{\frac{1}{2}\gamma\tau} - 1}{\gamma}\sqrt{\varphi(B^T H B)}\left\{|B^{-1}(I-A)| + e^{\frac{1}{2}\gamma\tau}|B^{-1}C|\right\}|x(T)|. \qquad (10)$$

Доказательство. Запишем систему (7) в интегральном виде

$$B[x(t) - x(t-\tau)] = (I - A)\int\limits_{t-\tau}^{t} x(s)\,ds - C\int\limits_{t-\tau}^{t} x(s-\tau)\,ds.$$

Отсюда

$$|x(T) - x(T-\tau)| \le |B^{-1}(I-A)|\int\limits_{T-\tau}^{T}|x(s)|\,ds + |B^{-1}C|\int\limits_{T-\tau}^{T}|x(s-\tau)|\,ds.$$

Пусть выполняются условия леммы 2, т. е. в момент времени $t = T > \tau$ будет $(x(T), T) \in$ $\in \partial V_t^{\alpha,\gamma}$, а при $s < T - (x(s), s) \in V_t^{\alpha,\gamma}$. Тогда, как следует из неравенства (8),

$$|x(s-\tau)| \le \sqrt{\varphi(B^T H B)}|x(T)|e^{\frac{1}{2}\gamma(T-s+\tau)},$$

$$|x(s)| \le \sqrt{\varphi(B^T H B)}|x(T)|e^{\frac{1}{2}\gamma(T-s)}.$$

Таким образом, получаем

$$|x(t) - x(t-\tau)| \le \sqrt{\varphi(B^T H B)}|x(T)|\times$$

$$\times\left[|B^{-1}(I-A)|\int\limits_{T-\tau}^{T} e^{\frac{1}{2}\gamma(T-\tau)}\,ds + |B^{-1}C|\int\limits_{T-\tau}^{T} e^{\frac{1}{2}\gamma(T-s+\tau)}\,ds\right] =$$

$$= \frac{2}{\gamma}\sqrt{\varphi(B^T H B)}|x(T)|\Big[|B^{-1}(I-A)|\,\Big(e^{\frac{1}{2}\gamma T} - 1\Big) + |B^{-1}C|e^{\frac{1}{2}\gamma\tau}\Big(e^{\frac{1}{2}\gamma\tau} - 1\Big)\Big],$$

откуда следует неравенство (10).

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть при $t > \tau$ для некоторого $0 < \gamma < \gamma_0$ и функции $\Phi(\gamma, \tau)$ для полной производной функции Ляпунова в силу системы (7) выполняется неравенство*

$$\frac{d}{dt}V(x(t), t) \le -e^{\gamma t}\left[\lambda_{\min}(G) - \gamma\lambda_{\max}(B^T H B) - \Phi(\gamma, \tau)\right]|x(t)|^2, \qquad (11)$$

где

$$\lambda_{\min}(G) - \gamma\lambda_{\max}(B^T HB) - \Phi(\gamma,\tau) > 0. \tag{12}$$

Тогда при $t \geq \tau$ *имеет место неравенство*

$$|x(t)| < \sqrt{\varphi(B^T HB)}|x(\tau)|e^{-\frac{1}{2\lambda_{\max}(B^T HB)}[\lambda_{\min}(G)-\Phi(\gamma,\tau)]\,(t-\tau)}, \quad t \geq \tau. \tag{13}$$

Доказательство. Для функции Ляпунова $V(x,t) = e^{\gamma t}x^T Hx$ выполняются неравенства квадратичных форм

$$e^{\gamma t}\lambda_{\min}(B^T HB)\,|x(t)|^2 \leq V(x(t),t) < e^{\gamma t}\lambda_{\max}(B^T HB)\,|x(t)|^2. \tag{14}$$

Используя их, запишем неравенство (11) в виде

$$\frac{d}{dt}V(x(t),t) \leq -\frac{V(x(t),t)}{\lambda_{\max}(B^T HB)}\left[\lambda_{\min}(G) - \gamma\lambda_{\max}(B^T HB) - \Phi(\gamma,\tau)\right].$$

Интегрируя полученное дифференциальное неравенство, получаем

$$V(x(t),t) \leq V(x(\tau),\tau)\exp\left\{-\frac{\lambda_{\min}(G) - \gamma\lambda_{\max}(B^T HB) - \Phi(\gamma,\tau)}{\lambda_{\max}(B^T HB)}(t-\tau)\right\}.$$

Вновь используя неравенство (14), имеем

$$\begin{aligned} e^{\gamma t}\lambda_{\min}(B^T HB)\,|x(t)|^2 &\leq V(x(t),t) \leq \\ &\leq V(x(\tau),\tau)\exp\left\{-\frac{\lambda_{\min}(G) - \gamma\lambda_{\max}(B^T HB) - \Phi(\gamma,\tau)}{\lambda_{\max}(B^T HB)}(t-\tau)\right\} \leq \\ &\leq e^{\gamma\tau}\lambda_{\max}(B^T HB)|x(\tau)|^2 \times \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{\lambda_{\min}(G) - \gamma\lambda_{\max}(B^T HB) - \Phi(\gamma,\tau)}{\lambda_{\max}(B^T HB)}\right\}(t-\tau), \end{aligned}$$

откуда

$$|x(t)|^2 \leq \frac{\lambda_{\max}(B^T HB)}{\lambda_{\min}(B^T HB)}|x(\tau)|^2 \exp\left\{-\frac{\lambda_{\min}(G) - \Phi(\gamma,\tau)}{\lambda_{\max}(B^T HB)}\right\}(t-\tau),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1. *Пусть матрица* C *такова, что* $B^{-1}(I-A-C)$ *— асимптотически устойчивая матрица,* G *— произвольная положительно определенная матрица, а* H *— решение матричного уравнения Сильвестра*

$$(I - A - C)^T HB + B^T H(I - A - C) = -G. \tag{15}$$

Тогда при $0 < \tau < \tau_0$, $0 < \gamma < \gamma_0$, $\Phi(\gamma,\tau) < 0$, *где*

$$\begin{gathered}
\gamma_0 = \frac{\lambda_{\min}(G)}{\lambda_{\max}\left(B^T H B\right)}, \\
\tau_0 = \frac{\lambda_{\min}(G)}{2|B^T H B|\left[|B^{-1}(I-A)| + |B^{-1}C|\right]\sqrt{\varphi(B^T H B)}}, \\
R = \frac{\lambda_{\max}(B^T H B)}{2|B^T H C|\sqrt{\varphi(B^T H B)}\left[|B^{-1}(I-A)\| + |B^{-1}C|\right]}, \\
a = \frac{2|B^{-1}(I-A)|}{\left[|B^{-1}(I-A)| + |B^{-1}C|\right]}, \quad b = \frac{2|B^{-1}C|}{\left[|B^{-1}(I-A)|\,|B^{-1}C|\right]}, \\
\Phi(\gamma,\tau) = \tau_0 - R\gamma - \frac{e^{\frac{1}{2}\gamma\tau} - 1}{\gamma}\left[a + b e^{\frac{1}{2}\gamma\tau}\right] > 0,
\end{gathered} \tag{16}$$

система (7) будет асимптотически устойчивой и для решений $x(t)$ *справедлива следующая оценка сходимости:*

$$|x(t)| = \begin{cases} N e^{rt}\|x(0)\|_\tau, & 0 \le t \le \tau, \\[2ex] N e^{r\tau}\|x(0)\|_\tau \sqrt{\varphi(B^T H B)}\, e^{-\frac{1}{2}\gamma(t-\tau),} & t > \tau, \end{cases} \tag{17}$$

$$N = 1 + \left|B^{-1}C\right|, \quad r = \left|B^{-1}(I-A)\right|.$$

Доказательство. Согласно лемме 1, для произвольного решения $x(t)$ системы (7) при $0 \le t \le \tau$ выполняется

$$|x(t)| < N\|x(0)\|_\tau e^{rt}, \quad N = 1 + \left|B^{-1}C\right|\tau.$$

Это означает, что при произвольном $\gamma > 0$ выполняется включение $(x(t),t) \in V_t^{\alpha,\gamma}$, $\alpha = N^2\|x(0)\|_\tau^2 \lambda_{\max}(B^T H B)$. Покажем, что найдется $\gamma > 0$, при котором это включение будет выполняться и при $t > \tau$. Пусть, от противного, это не так и существует момент времени $t = T > \tau$, при котором $(x(T),T) \in \partial V_t^{\alpha,\gamma}$.

Вычислим полную производную функции Ляпунова $V(x,t) = e^{\gamma t}(Bx)^T\, H(Bx)$ вдоль решений системы (7):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(x(t),t) &= \gamma e^{\gamma t} x^T(t) B^T H B x(t) + \\
&\quad + e^{\gamma t}\left[(B\dot{x}(t))^T H(Bx(t)) + (Bx(t))^T H(B\dot{x}(t))\right] = \gamma e^{\gamma t} x^T(t) B^T H B x(t) + \\
&\quad + e^{\gamma t}\left\{\left[(I-A)x(t) - Cx(t-\tau)\right]^T H B x(t) + (Bx(t))^T H\left[(I-A)x(t) - Cx(t-\tau)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Перегруппируем выражение для полной производной следующим образом:

$$\frac{d}{dt}V(x(t),t) = \gamma e^{\gamma t} x^T(t) B^T H B x(t) +$$
$$+ e^{\gamma t} x^T(t)\left\{[(I-A)-C]^T HB + B^T H[(I-A)-C]\right\} x(t) -$$
$$- e^{\gamma t} x^T(t)[C^T HB + B^T HC]x(t-\tau) + e^{\gamma t} x^T(t)[C^T HB + B^T HC]\, x(t),$$

или

$$\frac{d}{dt}V(x(t),t) = \gamma e^{\gamma t} x^T(t) B^T H B x(t) +$$
$$+ e^{\gamma t} x^T(t)\left\{[(I-A)-C]^T HB + B^T H[(I-A)-C]\right\} x(t) -$$
$$- 2e^{\gamma t} x^T(t) B^T HC[x(t-\tau) - x(t)].$$

Пусть матрица C выбрана таким образом, что матрица $B^{-1}[(I-A)-C]$ будет асимптотически устойчивой. Тогда при произвольной положительно определенной матрице G матричное уравнение Сильвестра

$$\{B^{-1}[(I-A)-C]\}^T (B^T HB) + (B^T HB)\{B^{-1}[(I-A)-C]\} = -G,$$

или

$$[(I-A)-C]^T HB + B^T H((I-A)-C) = -G$$

имеет единственное решение — положительно определенную матрицу H. Учитывая выбор матричной нормы, для оценки полной производной получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}V(x(t),t) \le \gamma e^{\gamma t}\lambda_{\max}(B^T HB)\,|x(t)|^2 - e^{\gamma t}\lambda_{\min}(G)|x(t)|^2 +$$
$$+ 2e^{\gamma t}|B^T HC|\,|x(t) - x(t-\tau)|.$$

Как следует из предположения, в момент $t = T$ выполняются условия леммы 2. Поэтому, используя неравенство (10), в момент $t = T$ имеем

$$\frac{d}{dt}V(x(T),T) \le -e^{\gamma T}\Bigg\{\lambda_{\min}(G) - \gamma\,\lambda_{\max}(B^T HB) -$$
$$- 4\,\frac{e^{\frac{1}{2}\gamma\tau} - 1}{\gamma}\,|B^T HC|\sqrt{\varphi(B^T HB)}\left[|B^{-1}(I-A)| + e^{\frac{1}{2}\gamma\tau}\,|B^{-1}C|\right]\Bigg\}\,|x(T)|^2.$$

При выполнении неравенства

$$\lambda_{\min}(G) - \gamma\lambda_{\max}(B^T HB) - 4\,\frac{e^{\frac{1}{2}\gamma\tau} - 1}{\gamma}\,|B^T HB|\sqrt{\varphi(B^T HB)}\times$$
$$\times\left[|B^{-1}(I-A)| + e^{\frac{1}{2}\gamma\tau}\,|B^{-1}C|\right] > 0 \qquad (18)$$

будут выполнены условия (11), (12) и, следовательно, имеет место неравенство (13).

Определим параметры $\tau_0 > 0$ и $\gamma_0 > 0$ таким образом, чтобы неравенство (18) могло выполняться при $0 < \tau < \tau_0$, $0 < \gamma < \gamma_0$. Для получения τ_0 устремим γ к 0 и получим

$$\lambda_{\min}(G) - 2|B^T HB| \sqrt{\varphi(B^T HB)}\, \tau \, \left[|B^{-1}(I - A)| + |B^{-1}C|\right] > 0.$$

Отсюда

$$\tau_0 = \frac{\lambda_{\min}(G)}{2|B^T HB| \left[|B^{-1}(I - A)| + |B^{-1}C|\right] \sqrt{\varphi(B^T HB)}}.$$

Далее устремим τ к 0 и получим

$$\lambda_{\min}(G) - \gamma \lambda_{\max}(B^T HB) > 0,$$

откуда

$$\gamma_0 = \frac{\lambda_{\min}(G)}{\lambda_{\max}(B^T HB)}.$$

Таким образом, при $0 < \tau < \tau_0$, $0 < \gamma < \gamma_0$ и выполнении неравенства (18) выполняются условия (11), (12).

Преобразуем неравенство (18) следующим образом. Разделим его на

$$2\,|B^T HC| \sqrt{\varphi(B^T HB)}\,[|B^{-1}(I - A) + |B^{-1}C||]$$

и обозначим

$$R = \frac{\lambda_{\max}(B^T HB)}{2\,|B^T HC| \sqrt{\varphi(B^T HB)}\,[|B^{-1}(I - A)| + |B^{-1}C|]},$$

$$a = \frac{2|B^{-1}(I - A)|}{[|B^{-1}(I - A)| + |B^{-1}C|]}, \quad b = \frac{2|B^{-1}C|}{[|B^{-1}(I - A)| + |B^{-1}C|]}.$$

Тогда неравенство (18) примет вид

$$\Phi(\gamma, \tau) = \tau_0 - R\gamma - \frac{e^{\frac{1}{2}\gamma\tau} - 1}{\gamma} \left[a + b e^{\frac{1}{2}\gamma\tau}\right] > 0, \qquad (19)$$

и для определения оценки сходимости в области изменения параметров (γ, τ) надо решать неравенство (19).

Таким образом, при $\tau < \tau_0$ и $\gamma \le \gamma_0$, $\Phi(\gamma, \tau) > 0$ полная производная функции Ляпунова при $t > \tau$ будет отрицательно определенной и, на основании леммы 3, при $t > \tau$ будет выполняться неравенство (13), т. е. получаем утверждение теоремы.

Замечание. Если для скалярного уравнения (2) выбор скаляра c, при котором замкнутая система будет асимптотически устойчивой, определяется областью D_3, то для системы (7) выбор матрицы C, при которой $B^{-1}(I - A - C)$ асимптотически устойчива, остается проблемой. Очевидно, ее можно решать, учитывая ограничения на параметры матрицы C.

Рассмотрим более простые условия асимптотической устойчивости. Для их получения будем использовать автономную функцию Ляпунова $V_0(x) = x^T B^T HBx$.

Теорема 2. *Пусть матрица C такова, что $B^{-1}(I-A-C)$ — асимптотически устойчивая матрица, G — произвольная положительно определенная матрица, а H — решение матричного уравнения Сильвестра*

$$(I-A-C)^T HB + B^T H(I-A-C) = -G.$$

Тогда при $\tau < \tau_0$, где величина τ_0 определена в (16), система (7) будет асимптотически устойчивой и для решений $x(t)$ справедлива оценка сходимости (17),

$$|x(t)| = \begin{cases} Ne^{rt}\,\|x(0)\|_\tau, \quad 0 \le t \le \tau, \\ \\ Ne^{r\tau}\|x(0)\|_\tau\,\sqrt{\varphi(B^T HB)}e^{-\frac{1}{2}\,\gamma(t-\tau)}, \quad t > \tau, \end{cases}$$

$$N = 1 + |B^{-1}C|, \quad r = |B^{-1}(I-A)|,$$

где

$$\gamma = \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) \frac{\lambda_{\min}(G)}{\lambda_{\max}(B^T HB)}. \tag{20}$$

Доказательство. Как следует из вида функции $V_0(x) = x^T B^T HBx$, условия Разумихина для нее имеют вид

$$\lambda_{\min}(B^T HB)\,|x(s)|^2 \le V_0(x(s)) < V_0(x(t)) \le \lambda_{\max}(B^T HB)\,|x(t)|^2, \quad s < t,$$

или

$$|x(s)| \le \sqrt{\varphi(B^T HB)}\,|x(t)|, \quad \varphi(B^T HB) = \frac{\lambda_{\max}(B^T HB)}{\lambda_{\min}(B^T HB)}, \quad s < t. \tag{21}$$

Тогда неравенство (10) принимает вид

$$|x(T) - x(T-\tau)| \le |B^{-1}(I-A)| \int\limits_{T-\tau}^{T} |x(s)|\,ds + |B^{-1}C| \times$$

$$\times \int\limits_{T-\tau}^{T} |x(s-\tau)|\,ds < \left[|B^{-1}(I-A)| + |B^{-1}C|\right] \sqrt{\varphi(B^T HB)}\tau|x(T)|,$$

и для полной производной функции Ляпунова $V_0(x)$ в силу системы получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\,V_0(x(T)) \le -\lambda_{\min}(G)|x(T)|^2 + 2|B^T HC|\,|x(T) - x(T-\tau)| \le$$

$$\le -\left\{\lambda_{\min}(G) - 2|B^T HC[[|B^{-1}(I-A)| + |B^{-1}C|]\sqrt{\varphi(B^T HB)}\tau\right\}|x(T)|^2.$$

Используя значение τ_0, записываем выражение для полной производной в виде

$$\frac{d}{dt}V_0(x(T)) \leq -\lambda_{\min}(G)\times$$
$$\times\left\{1-\frac{2|B^THB|\,[|B^{-1}(I-A)|+|B^{-1}C|]\,\sqrt{\varphi(B^THB)}}{\lambda_{\min}(G)}\tau\right\}|x(T)|^2 =$$
$$= -\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)\lambda_{\min}(G)\,|x(T)|.$$

Пусть $\tau < \tau_0$. Тогда, учитывая двусторонние неравенства квадратичных форм, имеем дифференциальное неравенство

$$\frac{d}{dt}V_0(x(T)) < -\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)\frac{\lambda_{\min}(G)}{\lambda_{\max}(B^THB)}V(x(T)).$$

Решая его, записываем

$$V_0(x(T)) < V(x(\tau))e^{-\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)\frac{\lambda_{\min}(G)}{\lambda_{\max}(B^THB)}(t-\tau)},$$

откуда

$$\lambda_{\min}(B^THB)|x(T)|^2 \leq V_0(x(T)) < V(x(\tau))e^{-\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)\frac{\lambda_{\min}(G)}{\lambda_{\max}(B^THB)}(t-\tau)} \leq$$
$$\leq \lambda_{\max}(B^THB)|x(\tau)|^2e^{-\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)\frac{\lambda_{\min}(G)}{\lambda_{\max}(B^THB)}(t-\tau)}$$

и

$$|x(T)| < \sqrt{\varphi(B^THB)}|x(\tau)|e^{-\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)\frac{\lambda_{\min}(G)}{\lambda_{\max}(B^THB)}(t-\tau)}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы 2.

1. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1970. — 240 с.
2. *Хусаинов Д. Я. Шатырко А. В.* Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. — Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1997. — 236 с.
3. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. — Киев: Наук. думка, 1989. — 208 с.
4. *Пономаренко О. І., Перестюк М. О., Бурим В. М.* Сучасний економічний аналіз. — Київ: Вища шк., 2004. — Ч. 2. — 207 с.
5. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1966. — 576 с.

Получено 27.06.08