

Реконструкция заряженной пленки гелия на металлической подложке

В. Шикин

Институт физики твердого тела РАН, Россия, 142432, Черноголовка
E-mail: shikin@issp.ac.ru

П. Лейдерер

Universitat Konstanz, Postfach 5560 M 675, D-78434, Germany
E-mail: paul.leiderer@uni-konstanz.de

Статья поступила в редакцию 1 июля 1996 г., после переработки 20 ноября 1996 г.

Обсуждаются особенности реконструкции поверхности заряженной пленки гелия на металлической подложке. Процесс развития неустойчивости здесь напоминает возникновение уединенной волны в гидродинамике свободной поверхности жидкости и приводит в определенных условиях к образованию заряженных солитонов. Получены основные характеристики таких солитонов в одномерном приближении и условиях слабой нелинейности задачи.

Обговорюються особливості реконструкції поверхні зарядженої плівки гелію на металевій підкладці. Процес розвитку нестійкості тут нагадує виникнення відокремленої хвилі в гідродинаміці вільної поверхні рідини і приводить в певних умовах до утворення заряджених солітонів. Одержано основні характеристики таких солітонів в одновимірному наближенні в умовах слабкої нелінійності задачі.

PACS: 73.20.Dx; 73.50.Gr

Заряженная жидкая поверхность (природа жидкости и способы введения в нее зарядов не очень существенны) обладает интересными деформационными свойствами. В линейном приближении речь идет о существенной, «кулоновской» перестройке спектра колебаний свободной поверхности таких жидкостей. В конечном итоге при монотонном увеличении поверхностного заряда спектр поверхностных колебаний жидкости теряет устойчивость. Это явление, получившее известность в основном в связи с распадом ядер, имеющих большие атомные номера, изучалось разными авторами (см., например, [1]). Особенно успешными оказались такие исследования на заряженной электронами или ионами поверхности жидкого гелия [2], где удается в деталях проследить за процессом потери устойчивости поверхности гелия и подтвердить основные предсказания теории.

Задача о поведении заряженной жидкой поверхности имеет смысл и в закритической области. Так, для полубесконечного гелия, когда потеря устойчивости возникает впервые при конечных

волновых числах риплонного спектра (на так называемой капиллярной длине волны), в закритической области происходит реконструкция поверхности гелия. Вместо плоской границы жидкости возникает периодически деформированная структура с периодом близким к капиллярной длине волны и амплитудой модуляции, сложным образом зависящей от степени надкритичности. Теория эффекта представлена в [3–5], экспериментально вопрос изучался авторами [6–8].

При переходе к пленке жидкости в области толщин меньших соответствующей капиллярной длины характер неустойчивости качественно меняется. Наиболее «уязвимой» здесь оказывается мода с нулевым волновым вектором. Это обстоятельство, также с очевидностью зафиксированное теоретически (см. [9–11]), до сих пор не подтверждено прямыми экспериментами в связи с техническими трудностями при работе с толстыми пленками жидкости. Имеются лишь косвенные свидетельства [12] правильности теоретических предсказаний, например наблюдаемое снижение (по сравнению с объемным значением) критичес-

кой плотности заряда, приводящее к потере устойчивости. Полностью остается открытым вопрос и о характере развития неустойчивости заряженной поверхности пленки жидкости в закритической области. Формально проблема заключается в том, что риплонный спектр при потере устойчивости не имеет выделенного конечного волнового числа. В результате даже неясно, какую (периодическую или нет) нелинейную реконструкцию жидкой границы следует подыскивать.

В настоящем сообщении показано, что развитие неустойчивости заряженной поверхности толстой пленки гелия (или другой проводящей жидкости) может происходить по сценарию, напоминающему процесс возникновения уединенной волны в гидродинамике свободной поверхности нейтральной жидкости [13]. Как и в полубесконечной задаче, переход в неустойчивую область сопровождается появлением периодических решений уравнения деформационного равновесия. С ростом надкритичности период этой структуры увеличивается, стремясь асимптотически к бесконечности. Возникающее деформационное состояние заряженной поверхности пленки гелия похоже на уединенный солитон. В приближении слабой нелинейности, понятие о которой будет введено ниже, получены формулы, описывающие форму одномерного солитона.

Кроме этих оригинальных результатов, в работе уточнены некоторые детали определения критических условий потери устойчивости для заряженной пленки гелия, что необходимо в связи с разночтениями в этих определениях, содержащимися в [9–11].

1. Рассмотрим заряженную пленку гелия на металлической подложке в условиях полной компенсации электрического поля над пленкой. При этом относительное положение верхнего электрода, всегда присутствующего в задаче о заряженной поверхности гелия, не существенно (расстояние лишь должно быть больше толщины пленки). Для простоты принимаем, что возможная деформация поверхности пленки зависит только от координаты x . Таким образом, исходное уравнение равновесия имеет вид

$$\rho g \xi - \alpha \frac{\xi''}{[1 + (\xi')^2]^{3/2}} + \frac{V^2}{8\pi(d + \xi)^2} = \text{const}, \quad (1)$$

$$-L \leq x \leq +L, \quad (2)$$

$$\xi'|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

$$V = \text{const}, \quad -l \leq x \leq +l, \quad (3)$$

$$\xi'' = d^2\xi/dx^2, \quad \xi' = d\xi/dx.$$

Здесь $\xi(x)$ — деформация поверхности гелия в области $-L \leq x \leq +L$ при наличии различных сил, действующих на поверхность пленки: гравитации, поверхностного натяжения, сил электрического происхождения, пропорциональных разности потенциалов V между заряженной поверхностью гелия и металлической подложкой ($\xi(x) \rightarrow 0$, если $V \rightarrow 0$); ρ и g — плотность гелия и ускорение силы тяжести; α — поверхностное натяжение; d — равновесная толщина пленки гелия при $V \rightarrow 0$; $2l$ — размеры управляющего электрода в направлении x . Смысл const в правой части (1) зависит от соотношения между l и L . Соответствующие варианты изложены ниже. Требование (2) достаточно условно и означает в конечном итоге, что интересующие нас решения уравнения (1) имеют вид стоячих волн. Для определенности начало координат совмещено с экстремумом одной из таких волн.

Электрическая часть уравнения (1) записана в предположении об идеальных металлических свойствах твердой подложки, кроме того, принято, что полное число электронов на пленке гелия не фиксировано (задана разность потенциалов V). Начало координат помещено на металлическую подложку. Ось Oz направлена вертикально вверх. Схема экспериментальной ячейки представлена на рис. 1.

Возвращаясь к определению const из (1), рассмотрим сперва случай $l < L$, когда возможно

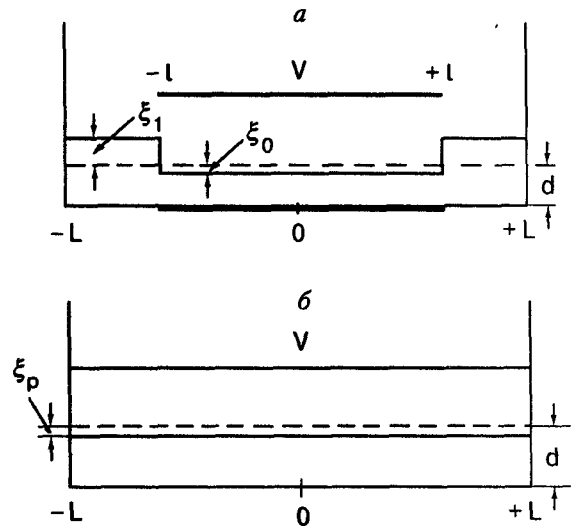


Рис. 1. Схема экспериментальной ячейки в условиях неполного покрытия (а) и при полном покрытии (б) поверхности пленки металлическими электродами: $2l$ — размер электродов; $2L$ — размер кюветы; d — толщина пленки в отсутствие поля; ξ_0 — деформация пленки под электродами; ξ_1 — деформация пленки вне электродов; ξ_p — деформация гелия

кусочно-гладкое решение для $\xi(x)$. В самом деле, пренебрежем в (1) градиентами (в общем случае аргументация остается асимптотически правильной, если $L > l \gg \kappa^{-1}$, где κ — капиллярная постоянная гелия). При этом с силами электрического происхождения конкурирует лишь гравитационное слагаемое. Для сохранения полного объема жидкости на свободных участках пленки за пределами интервала $2l$ деформация ξ_1 толщины пленки меняет знак по сравнению с ξ_0 внутри интервала. Схематически этот процесс показан на рис. 1,а, в уравнении (1) const должна быть равной $\rho g \xi_1$, так что

$$\rho g \xi_0 + \frac{V^2}{8\pi(d + \xi_0)^2} = \rho g \xi_1; \xi_0 l + \xi_1(L - l) = 0. \quad (4)$$

Из условия сохранения полного объема жидкости имеем

$$\xi_1 = -\xi_0 \frac{l}{L - l}. \quad (4a)$$

Здесь L — полная длина пленки гелия в направлении x .

Вводя определение ξ_1 (4a) в требование (4), имеем

$$\rho g^* \xi_0 + \frac{V^2}{8\pi(d + \xi_0)^2} = 0, \quad -l \leq x \leq +l, \quad (4б)$$

$$g^* = g \left(1 + \frac{l}{L - l} \right).$$

В пределе $L \gg l$ перенормировка g^* становится несущественной, т.е.

$$g^* \rightarrow g, \text{ если } L \gg l. \quad (4в)$$

В случае $l \geq L$ ситуация меняется. Однородное электрическое давление в интервале $-L \leq x \leq +L$ приводит к всестороннему сжатию гелия. Конечно, и в этом случае имеется деформация гелия ξ_p . Но ее величина контролируется теперь не гравитационным слагаемым, как это было в (4), а сжимаемостью гелия $\partial P / \partial v$. Пренебрегая в (1) гравитацией и, напротив, принимая в качестве const слагаемое с $\partial P / \partial v$, имеем (см. также рис. 1,б)

$$\frac{V^2}{8\pi(d + \xi_p)^2} = -\frac{\partial P}{\partial v} L_x L_y \xi_p. \quad (5)$$

Здесь L_x, L_y — размеры пленки гелия в направлениях x и y . Естественно, величина ξ_p весьма мала по сравнению с ξ_0 из (4).

2. Проанализировав выражения для статической деформации (4), (5), обсудим существующие критерии потери устойчивости заряженной пленкой гелия.

Обычная постановка задачи об устойчивости заряженной поверхности гелия предполагает неограниченность размеров пленки в направлении x . Очевидно, при этом отсутствует возможность вариации длин L и l , так что речь должна идти лишь о варианте (5) статической деформации. Уравнение для малой добавки $\delta \xi(x)$ к статической деформации, содержащее информацию об устойчивости, записывается, согласно (1), (5), следующим образом:

$$\xi(x) = \xi_p + \delta \xi(x), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \xi(s) ds = 0, \quad (6)$$

$$\left[\rho g - \frac{V^2}{4\pi(d + \xi_p)^3} \right] \delta \xi - \alpha \delta \xi'' + \frac{3V^2}{8\pi(d + \xi_p)^4} \delta \xi^2 = 0. \quad (6a)$$

Комбинация слагаемых в квадратных скобках первой части уравнения (6a) меняет знак в точке

$$4\pi \rho g(d + \xi_p)^3 = V_{cr}^2. \quad (7)$$

Критерий (7) отвечает потере устойчивости однородного состояния заряженной пленки гелия. Пренебрегая в этом выражении величиной ξ_p по сравнению с d , мы приходим к определению границ устойчивости в [9,10].

Если $l \neq L$, то ситуация изменяется:

$$4\pi \rho g^*(1 + \xi_0)^3 = U_{cr}^2. \quad (8)$$

Здесь g^*, ξ_0 берутся из (4б) и нет оснований в (8) пренебрегать ξ_0 , так как $\xi_0 \gg \xi_p$. Пусть, например, точно выполнено соотношение

$$V = U_{cr}. \quad (8a)$$

Кроме того, используя соотношения (4б), (8), (8a), получаем

$$\xi_0^{cr} = -d/3. \quad (9)$$

Другими словами, однородная деформация из (4)–(4б) в критической точке сравнима с исходной толщиной пленки и пренебрежение ею в определении U_{cr} неоправданно. Правильный ответ для U_{cr} с учетом (8) выглядит так:

$$U_{cr}^2 = 2V_{cr}^2 g^*/3g, \quad V_{cr}^2 = 4\pi\rho g d^3. \quad (10)$$

Здесь g^* из (46); V_{cr} — критический потенциал (7) из [9,10].

Возможное влияние статической деформации на критическое поле тонкой пленки было впервые отмечено в [11]. Результат [11] совпадает с (10), если $g^*/g = 1$. Однако анализ условий, в которых появляется такая перенормировка, в [11] отсутствует. По этой причине в работе [11] ошибочно полагалось, что определение критичности (7) неверно. В действительности оба определения критичности ((7) и (10)) имеют право на существование, каждое в своих условиях.

3. Переходим к описанию реконструкции заряженной пленки гелия. Эта задача проще формулируется для случая с $l = L$, обсуждением которого мы и ограничимся в настоящей работе. Исходным при этом является уравнение (6а) с граничными условиями

$$\delta\xi'(x=0) = 0, \quad (11)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\xi(s) ds = 0. \quad (12)$$

Реконструкция пленки оказывается возможной (что естественно) лишь в области

$$V > V_{cr}. \quad (13)$$

В этих условиях первый интеграл уравнения (6а) равен

$$(d\xi(x)/dx)^2 = q^3[-\gamma \delta\xi^2 + \delta\xi^3 + c], \quad (14)$$

где

$$p^2 = \kappa^2 \left[\frac{V^2}{4\pi(d + \xi_p)^3 \rho g} - 1 \right], \quad q^3 = \frac{V^2}{4\pi(d + \xi_p)^4 \alpha},$$

$$\gamma = p^2/q^3, \quad \kappa^2 = \rho g/\alpha, \quad (14a)$$

κ — капиллярная постоянная жидкого гелия.

Предположим, что, согласно (11), $\delta\xi'(x) = 0$ в некоторой точке $\delta\xi_0$ и

$$\delta\xi_0 > 0. \quad (15)$$

Эти требования приводят к следующему значению константы c в уравнении (14):

$$c = \gamma \delta\xi_0^2 - \delta\xi_0^3. \quad (15a)$$

Периодическое (или солитонное) решение уравнения (14) существует, если, кроме точки $\delta\xi_0$,

имеются некие дополнительные точки с $d\xi(x)/dx = 0$. Таким образом, вопрос о возникновении реконструкции сводится к исследованию свойств корней уравнения

$$\delta\xi^3 - \delta\xi_0^3 - \gamma(\delta\xi^2 - \delta\xi_0^2) = 0. \quad (16)$$

Это уравнение уже имеет один корень $\delta\xi = \delta\xi_0$. Следовательно, для корней $\delta\xi \neq \delta\xi_0$ выражение (16) упрощается:

$$\delta\xi^2 + \delta\xi(\delta\xi_0 - \gamma) + \delta\xi_0(\delta\xi_0 - \gamma) = 0. \quad (17)$$

Решением (17) является

$$2\delta\xi_{\pm} = -(\delta\xi_0 - \gamma) \pm \sqrt{(\delta\xi_0 - \gamma)^2 - 4\delta\xi_0(\delta\xi_0 - \gamma)}. \quad (18)$$

Для того чтобы корни ξ_{\pm} были действительными, должно выполняться условие

$$(\delta\xi_0 - \gamma)^2 - 4\delta\xi_0(\delta\xi_0 - \gamma) \geq 0 \text{ или} \\ (3\delta\xi_0 + \gamma)(\gamma - \delta\xi_0) \geq 0. \quad (19)$$

Используя еще и (14), мы приходим к заключению, что решения $\delta\xi_{\pm}$ существуют, если

$$\delta\xi_0 \leq \gamma. \quad (20)$$

Из двух вариантов $\delta\xi_{\pm}$ следует использовать лишь корень $\delta\xi_{-}$, для того чтобы условие (12) могло быть выполнено.

В пределе $\delta\xi_0 \ll \gamma$ имеем

$$\delta\xi_{-} = -\delta\xi_0. \quad (21)$$

Если же $\delta\xi_0 \rightarrow \gamma$, то

$$\delta\xi_{-} = -2\sqrt{\delta\xi_0(\gamma - \delta\xi_0)}. \quad (21a)$$

Период T возникающей деформационной структуры находим из соотношения

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{q\sqrt{q}} \int_{\delta\xi_{-}}^{\delta\xi_0} \frac{d\delta\xi}{\sqrt{c + \delta\xi^3 - \gamma\delta\xi^2}}. \quad (22)$$

Вместе с (12) и (17) это выражение определяет связь между T и γ . В пределе $\delta\xi_0 \ll \gamma$, когда справедливо (21) и, следовательно, условие (12) выполняется автоматически, из (17), (22) следует

$$T = 2\pi/p. \quad (23)$$

В обратном предельном случае максимальной амплитуды $\delta\xi_0 \rightarrow \gamma$ период $T \rightarrow \infty$ и периодическое решение трансформируется в солитонное.

Профиль солитона получаем из уравнения

$$\int_{\delta\xi}^{\gamma} \frac{d\delta\xi}{\delta\xi\sqrt{\gamma-\delta\xi}} = q\sqrt{q}x \quad (24)$$

или

$$\delta\xi(x) = \gamma [1 - \tanh^2(px/2)], \quad (25)$$

p и γ взяты из (14).

Корень $\delta\xi_-$ в этом пределе имеет вид (21а), в случае $\delta\xi_0 \rightarrow \gamma$ он стремится к нулю.

Комментируя результаты (21)–(25), отметим немонотонную зависимость периода T от параметра надкритичности. Согласно (23), $T \rightarrow \infty$ при $p \rightarrow 0$. Аналогично ведет себя T при $\delta\xi_0 \rightarrow \gamma$. Возможно, эта немонотонность имеет реальный смысл. Но более естественно иметь дело с монотонной зависимостью $T(p)$, тем более что при малых p амплитуда $\xi(x)$ не зависит от степени надкритичности (условие (12) выполняется автоматически). Убрать немонотонность в поведении $T(p)$ можно, вводя процедуру вычитания:

$$\frac{T^*}{2} = \frac{1}{q\sqrt{q}} \left[\int_{\delta\xi_-}^{\delta\xi_0} \frac{d\delta\xi}{\sqrt{c + \delta\xi^3 - \gamma\delta\xi^2}} - \frac{\pi}{p} \right].$$

В этом определении T^* стремится к нулю при $p \rightarrow 0$ и монотонно растет с увеличением p , приближаясь к T (22) в области $\delta\xi_0 \rightarrow \gamma$.

Таким образом, перевод заряженной пленки гелия в закритическое состояние приводит к появлению на ее поверхности солитонных образований вида (25).

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS 93 0933 и Программой NASA RKA.

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Гостехиздат (1957).
2. В. Б. Шикин, Ю. П. Монарха, *Двумерные заряженные системы в гелии*, Наука, Москва (1989).
3. В. М. Зайцев, М. И. Шлиомис, *ДАН СССР* **188**, 1261 (1969).
4. Л. П. Горьков, Д. М. Черникова, *ДАН СССР* **228**, 829 (1976).
5. В. И. Мельников, С. В. Мешков, *Письма в ЖЭТФ* **33**, 222 (1981).
6. M. Wanner and P. Leiderer, *Phys. Rev. Lett* **42**, 315 (1979).
7. P. Leiderer and M. Wanner, *Phys. Lett.* **A73**, 1869 (1979).
8. R. W. Giannetta and H. Ikezi, *Surf. Sci.* **113**, 412 (1982).
9. Л. П. Горьков, Д. М. Черникова, *Письма в ЖЭТФ* **18**, 119 (1973).
10. Д. М. Черникова, *ФНТ* **2**, 1374 (1976).
11. В. В. Татарский, *ФНТ* **10**, 435 (1984).
12. А. П. Володин, М. С. Хайкин, В. С. Эдельман, *Письма в ЖЭТФ* **26**, 707 (1977).
13. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Физматгиз (1958).

Reconstruction of the charged helium film on a metallic substrate

V. Shikin and P. Leiderer

Peculiarities of the charged helium film reconstruction are discussed. Evolution of the reconstruction is similar to the soliton scenario in hydrodynamics of a free liquid surface. It leads to the formation of the charged solitons. The main characteristics of one-dimensional charged solitons are obtained.