НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 2 • № 2 • 1999

УДК 517.9

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТОЧКА ПОВОРОТА В ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

В.Н. Бобочко, В.А. Болилый

Кировоград. пед. ун-т,
Украина, 316050, Кировоград, ул. Шевченко, 1
e-mail: bobochv@kspu.kr.ua;
basilb@kspu.kr.ua

The asymptotic forms of solutions of singularly perturbed differential equation of the third order with a pseudodifferential turning point is constructed.

Побудовано рівномірну асимптотику сингулярно збуреного диференціального рівняння третього порядку з псевдодиференціальною точкою звороту.

1. Введение. Рассмотрим сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение (СВДУ)

$$\mathbf{L}_\epsilon y(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^3 y'''(x,\varepsilon) + \varepsilon^2 a(x) y''(x,\varepsilon) + \varepsilon b(x) y'(x,\varepsilon) + c(x) y(x,\varepsilon) = 0 \qquad (1)$$

при $\varepsilon \to +0$, $x \in I = [0; l]$.

Сингулярно возмущенное уравнение (1) будем исследовать при выполнении таких условий:

1) $a(x), b(x), c(x) \in C^\infty[I]$;

2) корни характеристического уравнения

$$k^3 + a(x)k^2 + b(x)k + c(x) = 0$$

удовлетворяют условиям

$$k_3(x) < 0, \quad k_{1,2}(x) = \pm \imath \sqrt{x \tilde{k}(x)},$$

причем $\tilde{k}(x) > 0$ для всех $x \in [0; l]$.

Из условия 2 следует, что точка $x = 0$ является точкой поворота для СВДУ (1).

В настоящее время скалярные и векторные СВДУ с точкой поворота изучены достаточно хорошо [1 – 10]. Разработаны методы построения равномерной асимптотики решения этих уравнений. Классическим методом построения равномерной асимптотики решения уравнения Лиувилля является метод Лангера [1 – 3]. Одним из авторов данной работы разработан метод исследования и построения равномерной асимптотики решения различных задач как для скалярных уравнений Лиувилля и Орра – Зоммерфельда, так и для систем СВДУ с точкой поворота вида

$$\varepsilon W''(x,\varepsilon) - \mathbf{A} W(x,\varepsilon) = h(x), \qquad (2)$$

где $\mathbf{A}$ — линейный оператор, заданный в $\mathbf{R}^n$, а $W(x,\varepsilon)$ — искомая вектор-функция (см., например, [7 – 10]).

Следовательно, можно утверждать, что основные результаты по исследованию скалярных и векторных уравнений вида (2) получены. Для систем СВДУ общего вида В. Вазовым получены определенные результаты (см. [4], гл. 8).

Р. Лангер, получив фундаментальные результаты по исследованию уравнения Лиувилля, приступил к исследованию однородного уравнения (1). В работе [2] была построена фундаментальная система решений (ФСР) уравнения (1). Однако, следует заметить, что результаты работы [2] так и не были обобщены на системы СВДУ.

Целью настоящей работы является обобщение метода, разработанного для скалярных и векторных уравнений вида (2) (см. [7 – 10]), на общий случай скалярных и векторных СВДУ. Трудность исследования СВДУ (1) по сравнению с известными исследованиями классического уравнения Лиувилля состоит в следующем. Уравнение Лиувилля и система (2) содержат алгебраическую точку поворота. В исследуемом случае в точке поворота $x = 0$ обращается в нуль не только функция $c(x)$, а и коэффициент возле первой производной, т. е. функция $b(x)$.

Исходя из изложенного, точку $x = 0$ будем называть псевдодифференциальной точкой поворота первого порядка.

На трудности исследования СВДУ с дифференциальными точками поворота указано и в монографии [5, с. 52 – 64], в которой строится асимптотика решений СВДУ второго порядка методом согласования асимптотических разложений.

2. Понижение порядка СВДУ. Согласно классической теории Шлезингера – Биркгофа, можно построить одно частное решение $y_3(x,\varepsilon)$ однородного уравнения (1), соответствующее стабильному корню $k_3(x)$. Поскольку в дальнейшем мы будем использовать решение $y_3(x,\varepsilon)$, запишем его в явном виде

$$y_3(x,\varepsilon) = \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x k_3(x)dx\right\}\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon_s Z_{3s}(x), \tag{3}$$

где $Z_{3s}(x)$ — решения дифференциальных уравнений

$$\frac{dP(k_3)}{dk_3}Z'_{3s}(x) + k'_3(x)(3k_3(x)+a(x))Z_{3s}(x) = -3k_3(x)Z''_{3(s-1)}(x) -$$
$$-3k'_3(x)Z'_{3(s-1)}(x) - k''_3(x)Z_{3(s-1)}(x) - a(x)Z_{3(s-1)}(x) - Z'''_{3(s-1)}(x),$$

при $s = \overline{0,\infty}$.

Введем замену

$$y(x,\varepsilon) = y_3(x,\varepsilon)\int\limits_0^x \widetilde{U}(x,\varepsilon)dx \tag{4}$$

($\widetilde{U}(x,\varepsilon)$ — новая неизвестная функция).

Подставляя (4) в уравнение (1) и учитывая тот факт, что $L_\varepsilon y_3(x,\varepsilon) \equiv 0$, для определения неизвестной функции $U(x,\varepsilon)$ получим дифференциальное уравнение

$$\varepsilon^2\widetilde{U}''(x,\varepsilon) + \varepsilon p(x,\varepsilon)\widetilde{U}'(x,\varepsilon) + q(x,\varepsilon)\widetilde{U}(x,\varepsilon) = 0, \tag{5}$$

где

$$p(x,\varepsilon) \equiv -k_3(x) + 3\varepsilon\frac{y_3'(x,\varepsilon)}{y_3(x,\varepsilon)}, \quad q(x,\varepsilon) = x\tilde{k}(x) - 2\varepsilon k_3(x)\frac{y_3'(x,\varepsilon)}{y_3(x,\varepsilon)} + 3\varepsilon^2\frac{y_3''(x,\varepsilon)}{y_3(x,\varepsilon)}. \tag{6}$$

Исследуем более детально полученные коэффициенты уравнения (5). С учетом частного решения $y_3(x,\varepsilon)$ (см. (3)) можно получить равенства

$$\frac{y_3'(x,\varepsilon)}{y_3(x,\varepsilon)} = \frac{k_3(x)}{\varepsilon} + \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\tilde{y}_{3s}(x), \quad \frac{y_3''(x,\varepsilon)}{y_3(x,\varepsilon)} = \frac{k_3^2(x)}{\varepsilon^2} + \sum_{s=-1}^{\infty}\varepsilon^s\tilde{\tilde{y}}_3(x). \tag{7}$$

Тогда коэффициенты уравнения (5) имеют вид

$$p(x,\varepsilon) = 2k_3(x) + \sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s p_s(x), \quad q(x,\varepsilon) = x\tilde{k}(x) + k_3(x) + \sum_{s=1}^{\infty} q_s(x). \tag{8}$$

Вывод 1. Таким образом, для определения остальных двух частных решений уравнения (1) нами получено дифференциальное уравнение (5) второго порядка, коэффициенты которого определяются равенствами (8).

Чтобы выявить особенности решения уравнения (5), необходимо определить и исследовать корни характеристического уравнения. С учетом формул (6) – (8) получим следующие корни характеристического уравнения, соответствующего СВДУ (5):

$$\lambda_{1,2}(x) \equiv -k_3(x) \pm \imath\sqrt{x\tilde{k}(x)} \quad \forall\, x \in [0;l]. \tag{9}$$

Вывод 2. Мы получили СВДУ (5), для которого $\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = -\dfrac{p_0(x)}{2} \equiv -k_3(0) \neq 0$.

Для дальнейших исследований уравнения (5) приведем его к стандартному виду уравнения Лиувилля.

С этой целью используем классическую подстановку

$$\widetilde{U}(x,\varepsilon) = \exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^x p(x,\varepsilon)dx\right\}W(x,\varepsilon). \tag{10}$$

Тогда относительно неизвестной функции $W(x,\varepsilon)$ получим уравнение

$$\varepsilon^2 W''(x,\varepsilon) + [r(x,\varepsilon) + \varepsilon g(x,\varepsilon)]W(x,\varepsilon) = 0. \tag{11}$$

Здесь

$$r(x,\varepsilon) \equiv q(x,\varepsilon) - \frac{p^2(x,\varepsilon)}{4} \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^r r_n(x), \quad g(x,\varepsilon) \equiv -\frac{p'(x,\varepsilon)}{2} \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^r g_n(x),$$

где, в свою очередь,

$$r_0(x) \equiv x\tilde{k}(x), \quad g_0 \equiv -k_3'(x).$$

Анализируя уравнение (11), записанное в классическом виде уравнения Лиувилля, можно сделать следующие выводы:

а) поскольку $r_0(0) = 0$, то точка $x = 0$ является точкой поворота и для СВДУ (11);

б) в зависимости от значения $r_0(x)$ при $x \in (0; l]$ точка $x = 0$ будет стабильной точкой поворота при $r_0(x) > 0$ и нестабильной — при $r_0(x) < 0$;

в) поскольку $g_0(x) \equiv -\dfrac{p'(x)}{2} \not\equiv 0$, т. е. $\varepsilon g(x, \varepsilon) = O(\varepsilon)$, уравнение (11) является уравнением Лиувилля с сильной точкой поворота (см. [8]).

В частном случае, когда $k_3'(x) \equiv 0$, имеем $\varepsilon g(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^2)$, т. е. точка $x = 0$ является обыкновенной точкой поворота для уравнения (11) и дальнейшие исследования уравнения (11) значительно упрощаются.

Случай сильной точки поворота в уравнении Лиувилля впервые был выделен и исследован автором в работе [8]. Результат, полученный в упомянутой работе, позволил начать исследования СВДУ с псевдодифференциальной точкой поворота.

3. Построение ФСР уравнения Лиувилля с сильной точкой поворота. Будем предполагать, что $r_0(x) > 0$ при $x \in (0; l]$, т. е. точка $x = 0$ является стабильной точкой поворота. Поскольку формализм построения асимптотики решения уравнения Лиувилля с сильной точкой поворота изучен, построение ФСР уравнения (11) опишем схематически.

Линейно независимые решения уравнения (11) имеют вид

$$W_i(x, t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n [V_{in}(x, \mu) U_i(t) + \mu^2 Q_{in}(x, \mu) U_i'(t)], \quad \mu = \sqrt[3]{\varepsilon}. \tag{12}$$

Здесь $U_i(t)$ — функции Эйри – Дородницына (см. [6]), в которых переменная t определяется равенством $t = \mu^{-2}\varphi(x, \mu)$, где регуляризующая функция $\varphi(x, \mu)$ является решением задачи

$$\varphi'^2(x, \mu)\varphi(x, \mu) = r_0(x) + \varepsilon g_0(x), \quad \varphi(0, \mu) = 0,$$

т. е.

$$\varphi(x, \mu) \equiv \left\{ \frac{3}{2} \int_0^x \sqrt{r_0(x) + \varepsilon g_0(x)}\, dx \right\}^{2/3}.$$

Коэффициенты решений (12) определяются из рекуррентных уравнений

$$\begin{array}{l} dV_{in}(x, \mu) = 0, \;\; DQ_{in}(x, \mu) = 0, \;\; n = 0, 1, \\ dV_{in}(x, \mu) = 0, \;\; DQ_{in}(x, \mu) = -V''_{i(n-2)}(x), \quad n = 2, 3, \\ dV_{in}(x, \mu) = -Q''_{i(n-4)}(x, \mu), \;\; DQ_{in}(x, \mu) = -V''_{i(n-2)}(x, \mu), \;\; n \geq 4, \end{array} \tag{13}$$

в которых

$$d \equiv 2\varphi'(x, \mu)\frac{d}{dx} + \varphi''(x, \mu), \quad D \equiv \varphi(x, \mu) d. \tag{14}$$

Замечание 1. Поскольку операторы (14) зависят от малого параметра $\mu > 0$, то и решения уравнений (13) тоже зависят от этого параметра. Однако, следует заметить, что малый параметр $\mu > 0$ входит в эти функции не произвольно, а как единое многообразие $\varphi(x, \mu)$.

Решая рекуррентную серию дифференциальных уравнений (13), причем при условиях $|Q_{in}(0)| < \infty$, $n \geq 0$, определяем коэффициенты формальных решений (12). Решения

$V_{in}(x,\mu)$ будут содержать произвольные постоянные множители V_{in}^0. Используя произвольность множителей V_{in}^0, однозначно определяем первое решение (12), удовлетворяющее начальному условию $W_1(0,0,\varepsilon)=1$. Другие произвольные постоянные V_{in}^0 используем для однозначного определения второго решения (12), удовлетворяющего начальному условию $W_2'(0,0,\varepsilon)=\mu^{-4}$.

Легко проверить, что

$$W_{\text{Вр.}}[W_i(0,0,\varepsilon)]=\mu^{-4}[1+O(\mu^5)].$$

Поскольку $\mu>0$, то $W_{\text{Вр.}}[W_i(0,0,\varepsilon)]\neq 0$. Следовательно, формальные решения (12) образуют ФСР уравнения (11).

Проведем сужение в частных решениях (12) при $t=\mu^{-2}\varphi(x,\varepsilon)\equiv\Phi(x,\varepsilon)$. Получим равенства

$$W_i(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu^n\left[V_{in}(x,\mu)U_i(\Phi(x,\varepsilon))+\mu^2Q_{in}(x,\mu)\frac{dU_i(\Phi(x,\varepsilon))}{d\Phi(x,\varepsilon)}\right].$$

Возвратимся к исходному СВДУ (1). Используя равенства (4) и (10), получаем два линейно независимых решения уравнения (1) следующего вида:

$$y_i(x,\varepsilon)=y_3(x,\varepsilon)\int\limits_0^x\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^x p(x,\varepsilon)dx\right\}W_i(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)dx,\quad i=1,2. \tag{15}$$

Покажем, что два полученных частных решения (15) и решение (3) образуют ФСР рассматриваемого уравнения (1). С этой целью найдем производные и выделим главные слагаемые в выражениях $y_i^{(s)}(0,\varepsilon)$, $i,s=1,2$. Имеем

$$y_i'(x,\varepsilon)=y_3'(x,\varepsilon)\int\limits_0^x\widetilde{U}_i(x,\varepsilon)dx+$$
$$+y_s(x,\varepsilon)\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^x p(x,\varepsilon)dx\right\}W_i(x,\varepsilon),\quad i=1,2. \tag{16}$$

Тогда

$$y_1(0,\varepsilon)=Z_{30}(0)[1+O(\varepsilon)][V_{10}(0)+O(\mu)]. \tag{17}$$

Определим производную

$$y_i''(x,\varepsilon)=y_3''(x,\varepsilon)\int\limits_0^x\widetilde{U}_i(x,\varepsilon)dx+\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^x p(x,\varepsilon)dx\right\}\times$$
$$\times\left[2y_3'(x,\varepsilon)W_i(x,\varepsilon)-y_3(x,\varepsilon)\frac{p(x,\varepsilon)}{2\varepsilon}W_i(x,\varepsilon)+y_3(x,\varepsilon)\frac{dW_i(x,\varepsilon)}{dx}\right].$$

Получим

$$y_1''(0,\varepsilon)=\frac{k_3(x)}{\varepsilon}Z_{30}(0)V_{10}(0,\mu)[1+O(\mu)]. \tag{18}$$

Из равенства (16) при $i = 2$ определим начальное условие

$$y_2'(0,\varepsilon) = Z_{30}(0)Q_{22}(0,\mu)[1 + O(\mu)], \tag{19}$$

а из (15) при $i = 2$ имеем

$$y_2''(0,\varepsilon) = \frac{\varphi'(0,\varepsilon)}{\mu^2} Z_{30}(0)V_{20}(0,\mu)[1 + O(\mu)]. \tag{20}$$

С учетом равенств (3), (4), (9), (15) и начальных условий (17), (19), (18), (20) определитель Вронского представим в виде

$$W_{\text{Вр.}}[y_i(0,\varepsilon)] = Z_{30}^3(0)V_{10}(0,\mu) \begin{vmatrix} 1 + O(\mu) & \dfrac{Q_{22}(0,\mu)}{\mu^4}[1 + O(\mu)] \\ \dfrac{k_3(0)}{\varepsilon}[1 + O(\mu)] & \dfrac{\varphi'(0,\varepsilon)}{\mu^2} V_{20}(0,\mu)[1 + O(\mu)] \end{vmatrix} \equiv$$

$$= Z_{30}^3(0)V_{10}(0,\mu)\frac{1}{\mu^7} k_3(0)Q_{22}(0,\mu)[1 + O(\mu)]. \tag{21}$$

Все множители правой части равенства (21) не равны нулю, т. е. $W_{\text{Вр.}} \neq 0$. Следовательно, частные решения $y_i(x,\varepsilon)$, $i = \overline{1,3}$, образуют ФСР уравнения (1).

Замечание 2. При необходимости соответствующие начальные значения, входящие в (21), всегда можно выбрать таким образом, чтобы

$$W_{\text{Вр.}}[y_i(0,\varepsilon)] = \frac{k_3(0)}{\mu^7}[1 + O(\mu)].$$

Запишем частные решения (12) в виде тождеств

$$W_i(x,t,\varepsilon) \equiv W_{ip}(x,t,\varepsilon) + \mu^{p+1}\xi_{i(p+1)}(x,t,\varepsilon), \quad i = 1,2, \tag{22}$$

где $W_{ip}(x,t,\varepsilon)$ — p-частичная сумма ряда (12), а $\mu^{p+1}\xi_{i(p+1)}(x,t,\varepsilon)$ — остаточный член этого ряда.

Проведем сужение в тождестве (22) при $t = \Phi(x,\varepsilon)$. В результате получим тождества

$$W_i(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon) \equiv W_{ip}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon) + \mu^{p+1}\xi_{i(p+1)}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon). \tag{23}$$

Известно, что при достаточно малых значениях параметра $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\xi_{i(p+1)}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)\| \leq K_i, \tag{24}$$

где постоянные K_i не зависят от малого параметра $\varepsilon > 0$ и $x \in I$.

Для частного решения $y_3(x,\varepsilon)$, согласно теореме Шлезингера – Биркгофа, имеет место асимптотическое равенство

$$y_3(x,\varepsilon) = \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x k_3(x)dx\right\}[Z_{3p}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{p+1})], \tag{25}$$

где

$$Z_{3p}(x,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{p} \varepsilon^p Z_{3s}(x).$$

С учетом соотношений (23) – (25) получим два линейно независимых решения уравнения (1) в виде

$$y_i(x,\varepsilon) = \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x k_3(x)dx\right\}\left[\sum_{s=0}^{p}\varepsilon^p Z_{3s}(x) + O(\varepsilon^{p+1})\right]\times$$

$$\times\int\limits_0^x \exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^x p(x,\varepsilon)dx\right\}\left[W_{ip}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{p+1}{3}}\right)\right],\quad i=1,2. \qquad (26)$$

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема. *Пусть выполняются условия 1 и 2. Тогда при достаточно малых значениях параметра $\varepsilon > 0$ на отрезке $I = [0; l]$ существуют три линейно независимых решения уравнения (1), описываемые формулами (3), (15), (26).*

1. *Langer R.* The asymptotic solutions of ordinary linear differential equation of the second order with special reference to a turning point // Trans. Amer. Math. Soc. — 1949. — **67**. — P. 461 – 490.
2. *Langer R.* On the asymptotic forms of ordinary linear differencial equations of the third order in a region containing a turning point // Ibid. — 1955. — **80**. — P. 93 – 123.
3. *Langer R.* The solutions of a class of ordinary linear differencial equations of the third order in a region containing a multiple turning point // Duke Math. J. — 1956. — **23**. — P. 93 – 110.
4. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — 464 с.
5. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. — М.: Наука, 1989. — 336 с.
6. *Дородницын А.А.* Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. — 1952. — **7**, № 6. — С. 3 – 96.
7. *Бобочко В.Н.* Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с точкой поворота // Дифференц. уравнения. — 1991. — **27**, № 9. — С. 1505 – 1515.
8. *Бобочко В.Н., Матвеев Н.М.* Уравнение Лиувилля с сильной точкой поворота // Качественная теория сложных систем. — СПб., 1994. — С. 39 – 49.
9. *Бобочко В.Н.* Системы дифференциальных уравнений с сильной точкой поворота // Укр. мат. журн. — 1997. — **49**, № 11. — С. 1543 – 1547.
10. *Бобочко В.Н.* Система дифференциальных уравнений с точкой поворота в случае недиагонализируемого предельного оператора // Дифференц. уравнения. — 1998. — **34**, № 10. — С. 1304 – 1312.

Получено 11.11.98