УДК 517 . 9

МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ МАККІ – ГЛАССА З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Ю. М. Мисло, В. І. Ткаченко

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

We obtain sufficient conditions for the permanence and existence of positive asymptotically stable piecewise continuous almost periodic solution of Mackey – Glass equation with almost periodic coefficients and impulsive action.

Получены условия перманентности и существования положительного асимптотически устойчивого кусочно-непрерывного почти периодического решения уравнения типа Макки – Гласса с почти периодическими коэффициентами и импульсным воздействием.

Вступ. У даній роботі ми досліджуємо рівняння типу Маккі – Гласса з майже періодичними коефіцієнтами та імпульсною дією

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha(t)x(t) + \frac{\beta(t)x(t-h)}{1+\gamma(t)x^p(t-h)}, \tag{1}$$

$$x(t_k+0) - x(t_k) = a_k x(t_k) + b_k, \tag{2}$$

де $x \geq 0$, p і h — додатні сталі, кусково-неперервні функції $\alpha(t)$, $\beta(t)$ та $\gamma(t)$ додатнозначні та w-майже періодичні, послідовності $\{a_k\}$ та $\{b_k\}$ майже періодичні і $a_k > -1$, $b_k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, послідовність $\{t_k\}$ точок імпульсної дії має рівномірно майже періодичні різниці (див. означення нижче).

Рівняння (1) зі сталими коефіцієнтами було запропоноване Маккі та Глассом у роботі [1] як модель гематопоезу (відтворення клітин крові). Його дослідженню присвячено багато робіт (див., наприклад, [2 – 7]). Метою даної роботи є знаходження умов перманентності та існування кусково-неперервного додатного майже періодичного розв'язку рівняння (1), (2). Ми використовуємо концепцію кусково-неперервних майже періодичних функцій у сенсі робіт [8, 9]. Спочатку доводиться існування додатнозначного асимптотично w-майже періодичного розв'язку рівняння (1), (2), з чого за результатами роботи [7] випливає існування додатнозначного асимптотично стійкого w-майже періодичного розв'язку.

Позначимо через $\mathcal{PC}^k(J, \mathbb{R}^n)$, $J \subset \mathbb{R}$, простір усіх кусково-неперервних функцій $x: J \to \mathbb{R}^n$ таких, що:

i) множина $T = \{t_j \in J, t_{j+1} > t_j, j \in \mathbb{Z}\}$ є множиною розривів функції x;

ii) функції неперервні зліва $x(t_j - 0) = x(t_j)$ і існують границі $\lim_{t \to t_j + 0} x(t) = x(t_j + +0) < \infty$;

iii) функція $x(t)$ є гладкою класу C^k на множині $J \setminus T$.

Функцію $x(t) \in \mathcal{PC}([-h,\alpha],\mathbb{R}^n)$, де $\alpha > 0$, називаємо розв'язком рівняння (1), (2), якщо $x(t)$ неперервна при всіх $t \neq t_k$, неперервно диференційовна при всіх $t > 0$ за винятком скінченної кількості точок, лівостороння похідна функції $x(t)$ існує і задовольняє рівняння (1) при всіх $t \neq t_k$, а при $t = t_k$ функція $x(t)$ задовольняє різницеве співвідношення (2).

Означення 1 [9]. *Послідовність дійсних чисел $\{t_k\}$ має рівномірно майже періодичні різниці, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина ε-майже періодів, спільних для всіх послідовностей $\{t_k^j\}$, де $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $j \in \mathbb{Z}$.*

Означення 2 [9]. *Функція $\varphi(t) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ називається w-майже періодичною, якщо:*

i) послідовність $\{t_k\}$ точок розривів функції $\varphi(t)$ має рівномірно майже періодичні різниці;

ii) для довільного $\varepsilon > 0$ існує додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що якщо точки t' і t'' належать до одного інтервалу неперервності і $|t'-t''| < \delta$, то $\|\varphi(t') - \varphi(t'')\| < \varepsilon$ ($\|.\|$ — звичайна норма в $\mathbb{R}^n$);

iii) для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина Γ ε-майже періодів таких, що якщо $\tau \in \Gamma$, то $\|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, які задовольняють умову $|t - t_k| \geq \varepsilon$, $k \in \mathbb{Z}$.

Означення 3. *Кусково-неперервна функція $\varphi_1(t) \in \mathcal{PC}(J,\mathbb{R}^n)$ знаходиться у ε-околі функції $\varphi_2(t) \in \mathcal{PC}(J,\mathbb{R}^n)$ якщо $\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| < \varepsilon$ для всіх $t \in J$ таких, що $|t - \tau_i^1| > \varepsilon$, $|t - \tau_i^2| > \varepsilon$, і $|\tau_i^1 - \tau_i^2| < \varepsilon$, $i \in \mathbb{Z}$, де $\{\tau_i^1\}$ і $\{\tau_i^2\}$ — послідовності розривів функцій $\varphi_1(t)$ і $\varphi_2(t)$ відповідно.*

Послідовність $\{f_k(t)\}$ функцій $f_k \in \mathcal{PC}(J,\mathbb{R}^n)$, $J \subset \mathbb{R}$, збігається у w-топології до функції $f \in \mathcal{PC}(J,\mathbb{R}^n)$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $N = N(\varepsilon)$ таке, що $\|f_k(t) - f(t)\| < \varepsilon$ для всіх $k \geq N$, $|t - \tau_i| > \varepsilon$ (τ_i — точки розривів функції f на множині J) і точки розривів функцій $f_k(t)$, які лежать у J, збігаються до точок τ_i рівномірно відносно i.

Як і в неперервному випадку [10, с. 154], для кусково-неперервних функцій вводиться поняття асимптотично w-майже періодичних функцій, яке буде корисним при дослідженні існування майже періодичних розв'язків імпульсних систем.

Означення 4. *Означена на $[0,\infty)$ кусково-неперервна функція $a(t)$ називається асимптотично w-майже періодичною, якщо вона є сумою w-майже періодичної функції $p(t)$ та функції $q(t) \in \mathcal{PC}$ такої, що $q(t) \to 0$ при $t \to \infty$.*

Для асимптотично w-майже періодичних функцій справедливі наступні твердження, доведені в [7].

Теорема 1. *Кусково-неперервна функція $\xi(t)$ асимптотично w-майже періодична тоді і тільки тоді, коли для кожної послідовності дійсних чисел $\{\tau_k\}$ таких, що $\tau_k \to \infty$ при $k \to \infty$, існує підпослідовність $\{\tau_{k_j}\}$ така, що $\xi(t + \tau_{k_j})$ збігається на $0 \leq t < \infty$ у w-топології.*

Теорема 2. *Припустимо, що рівняння (1), (2) має розв'язок $\xi(t)$, означений на $I = [0,\infty)$ і такий, що $\|\xi(t)\| \leq C < \infty$ для всіх $t \geq 0$. Якщо розв'язок $\xi(t)$ асимптотично w-майже періодичний, то рівняння (1), (2) має w-майже періодичний розв'язок $p(t)$.*

Нехай обмежений розв'язок $\xi(t)$ рівняння (1), (2) рівномірно асимптотично стійкий при $t \geq 0$. Тоді $\xi(t)$ асимптотично w-майже періодичний, а рівняння (1), (2) має w-майже періодичний розв'язок, який є асимптотично стійким при $t \geq 0$.

Перманентність. Виходячи з біологічної інтерпретації, будемо розглядати невід'ємні розв'язки рівняння (1), (2). Тому початкові умови розв'язків задаються так:

$$x(\theta) = \psi(\theta) \geq 0, \quad \theta \in [-h, 0], \quad \psi(0) > 0. \tag{3}$$

Використовуючи метод кроків, легко перевірити, що розв'язки початкових задач (3) для рівняння (1), (2) існують при всіх $t > 0$.

Означення 5. *Рівняння (1), (2) називається перманентним, якщо існують додатні сталі m_0 і M_0 такі, що для кожного розв'язку $x(t)$ з додатними початковими значеннями (3) виконується*

$$\liminf_{t\to+\infty} x(t) \geq m_0, \quad \limsup_{t\to+\infty} x(t) \leq M_0. \tag{4}$$

Для майже періодичної послідовності $\{a_k\}$ завжди існує границя

$$\sigma = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{0\leq t_k<T} \ln(1 + a_k).$$

Припускаємо, що функція

$$\omega(t) = \prod_{0\leq t_k<t} (1 + a_k)\, e^{-\sigma t}$$

w-майже періодична.

Будемо позначати $\omega^L = \inf_{t\in\mathbb{R}} \omega(t)$, $\omega^M = \sup_{t\in\mathbb{R}} \omega(t)$.

Теорема 3. *Припустимо, що функція $\omega(t)$ w-майже періодична і виконуються нерівності*

$$\alpha(t) - \sigma \geq \sigma_1 > 0, \quad \inf_t \omega(t) > 0, \tag{5}$$

$$\inf_t \left\{ \beta(t) \prod_{t-h\leq t_k<t} (1 + a_k)^{-1} - \alpha(t) + \sigma \right\} > 0. \tag{6}$$

Тоді рівняння (1), (2) перманентне, тобто існують додатні сталі m_0 і M_0 такі, що для кожного розв'язку $x(t)$ з додатними початковими значеннями (3) виконуються нерівності (4).

Доведення. Якщо функція $\omega(t)$ w-майже періодична, то і функції

$$A(t) = \alpha(t) - \sigma, \quad C(t) = \gamma(t)\omega^p(t)$$

і

$$B(t) = \frac{\beta(t)\omega(t-h)}{\omega(t)} = \beta(t) \prod_{t-h \le t_k < t} (1+a_k)^{-1}$$

w-майже періодичні. У рівнянні (1), (2) виконаємо заміну змінних

$$x(t) = \omega(t)y(t) = \prod_{0 \le t_k < t} (1+a_k)\, e^{-\sigma t}\, y(t) \tag{7}$$

і отримаємо рівняння з майже періодичними коефіцієнтами

$$\frac{dy(t)}{dt} = -A(t)x(t) + \frac{B(t)y(t-h)}{1+C(t)y^p(t-h)}, \quad t \ne t_k, \tag{8}$$

$$\Delta y(t_k) = y(t_k+0) - y(t_k) = b_k^* = \frac{b_k}{\omega(t_k+0)}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

Враховуючи обмеженість і відділеність від нуля w-майже періодичної функції $\omega(t)$, достатньо довести перманентність рівняння (8), (9). Покажемо, що існують додатні сталі $\tilde{m}_0$ і $\tilde{M}_0$ такі, що для кожного розв'язку $y(t)$ з додатними початковими значеннями виконуються нерівності

$$\liminf_{t\to+\infty} y(t) \ge \tilde{m}_0, \quad \limsup_{t\to+\infty} y(t) \le \tilde{M}_0. \tag{10}$$

1. Позначимо через $y(t,\varphi)$ розв'язок рівняння (8), (9) з початковою функцією φ. Якщо φ задовольняє умову (3), то розв'язок строго додатний: $y(t,\varphi) > 0$ при $t > 0$. Дійсно, функція

$$z(t) = y(t,\varphi)\exp\left\{\int\limits_0^t A(s)\,ds\right\}, \quad t > 0, \qquad z(t) = \varphi(t), \quad t \le 0,$$

задовольняє рівняння

$$\dot{z}(t) = \frac{B(t)z(t-h)\exp\left\{\int_{t-h}^t A(s)\,ds\right\}}{1+C(t)z^p(t-h)\exp\left\{-p\int_0^{t-h} A(s)\,ds\right\}}, \quad t \ne t_k,$$

$$z(t_k+0) = z(t_k) + b_k^*\exp\left\{\int\limits_0^{t_k} A(s)\,ds\right\}.$$

При умові (3) виконується $\dot{z}(t) \ge 0$. Оскільки $b_k^* \ge 0$, робимо висновок, що функція $z(t)$ неспадна. Оскільки $\varphi(0) > 0$, отримуємо строгу додатність $z(t)$, а отже і $y(t)$.

2. Покажемо, що розв'язки рівняння (8), (9) фінально рівномірно обмежені, а саме, існує $\tilde{M}_0 > 0$ таке, що $\limsup_{t\to\infty} y(t,\varphi) \le \tilde{M}_0$ для всіх невід'ємних початкових функцій φ.

Якщо $p \ge 1$, то

$$\frac{B(t)y(t-h)}{1+C(t)y^p(t-h)} \le \frac{(p-1)^{\frac{p-1}{p}}}{p} \sup_t \frac{B(t)}{C^{1/p}(t)} = M_1.$$

Розв'язок рівняння (8), (9) задовольняє рівність

$$y(t,\varphi) = e^{-\int_0^t A(u)du}\varphi(0) + \int_0^t e^{-\int_s^t A(u)du} \frac{B(s)y(s-h)}{1+C(c)y^p(s-h)}\,ds + \sum_{0\le t_k<t} e^{-\int_0^{t_k} A(u)du}\, b_k^*.$$

Позначимо через N_0 максимальне число точок послідовності $\{t_k\}$ на інтервалі одиничної довжини. За лемою 26 [9, с. 197] таке число для послідовності з рівномірно майже періодичними різницями завжди існує. Тоді виконуються нерівності

$$\sum_{0\le t_k<t} e^{-\int_0^{t_k} A(u)du} b_k^* \le b^* \sum_{n=0}^{[t]} \sum_{n\le t_k<n+1} N_0 e^{-\sigma_1 n} \le b^* N_0 \frac{1-e^{-\sigma_1([t]+1)}}{1-e^{-\sigma_1}},$$

де $b^* = \sup_k b_k^*$.

Тепер можемо оцінити розв'язок $y(t,\varphi)$:

$$\limsup_{t\to\infty} y(t,\varphi) \le \frac{M_1}{\sigma_1} + \frac{N_0 b^*}{1-e^{-\sigma_1}} = M_{01}. \tag{11}$$

Нехай тепер $p < 1$. Встановимо оцінки аналогічно отриманим у роботі [3, с. 5]. Оскільки $y'(t) \ge -A(t)y(t)$, то

$$y(t) \ge y(t-h)\exp\left(-\int_{t-h}^t A(s)\,ds\right), \quad y(t-h) \le y(t)\exp\left(\int_{t-h}^t A(s)\,ds\right).$$

Тому

$$y'(t) \le -A(t)y(t) + \frac{B(t)}{C(t)} y^{1-p}(t-h) \le -A(t)y(t) + B_1(t)y^{1-p}(t),$$

де

$$B_1(t) = \frac{B(t)}{C(t)} \exp\left((1-p)\int_{t-h}^t A(s)ds\right).$$

Отже, розв'язки рівняння (8), (9) оцінюються зверху розв'язками імпульсної нерівності

$$y'(t) \le -A(t)y(t) + B_1(t)y^{1-p}(t),$$

$$y(t_k+0) - y(t_k) = b_k^*, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Заміною змінних $y^p = z$ отримуємо

$$z' \le -pA(t)z + pB_1(t), \quad t \ne t_k,$$

$$z(t_k + 0) = z(t_k) + c_k(z(t_k)),$$

де $c_k(z) = (z^{1/p} + b_k^*)^p - z$.

Оскільки

$$\frac{dc_k(z)}{dz} = (z^{1/p} + b_k^*)^{p-1} z^{-1+1/p} - 1 \le 0$$

при $z \ge 0$ і $p < 1$, то

$$0 < c_k(z) < (b_k^*)^p, \quad z \ge 0.$$

Тому

$$z(t, \psi) \le e^{-p\int_0^t A(\xi)d\xi} \varphi(0) + \int\limits_0^t e^{-p\int_s^t A(\xi)d\xi} pB_1(s)\, ds + \sum_{0 \le t_k < t} e^{-p\int_{t_k}^t A(\xi)d\xi} c(z(t_k))$$

і, як в (11), отримуємо

$$\limsup_{t\to\infty} z(t, \varphi) \le \frac{1}{\sigma_1} \sup_t B_1(t) + (b^*)^p \frac{N_0}{1 - e^{-p\sigma_1}} = M_{02},$$

де, як і раніше, N_0 — максимальне число точок послідовності $\{t_k\}$ на інтервалі одиничної довжини.

Отже, як верхню оцінку $\tilde{M}_0$ для розв'язків рівняння (8), (9) можна вибрати M_{01} при $p \ge 1$ і M_{02} при $p < 1$.

Відповідно, як верхню оцінку M_0 для розв'язків рівняння (1), (2) можна вибрати $M_{01}\omega^M$ при $p \ge 1$ і $M_{02}\omega^M$ при $p < 1$.

3. Доведемо, що існує $\tilde{m}_0 > 0$ таке, що

$$\liminf_{t\to\infty} y(t, \varphi) \ge \tilde{m}_0 \tag{12}$$

для всіх початкових функцій (3).

Враховуючи додатність імпульсних збурень, за теоремами порівняння достатньо розглянути рівняння (8) без імпульсної дії.

Припустимо, що (12) не виконується. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує розв'язок $y(t, \varphi_1)$ такий, що $\liminf_{t\to\infty} y(t, \varphi_1) < \varepsilon$.

Якщо $y'(t, \varphi_1) \ge 0$ для всіх $t \ge \bar{t}$ з деяким $\bar{t} > 0$, то розв'язок монотонний і обмежений (в точках, де не існує звичайна похідна, розглядаємо лівосторонню похідну). Тому існує

$$\lim_{t\to\infty} y(t, \varphi_1) = y_0 \quad \text{і} \quad \lim_{t\to\infty} y'(t, \varphi_1) = 0.$$

Отже,

$$\lim_{t\to\infty} \left(A(t)y_0 + \frac{B(t)y_0}{1 + C(t)y_0^p} \right) = 0.$$

Рівність $y_0 = 0$ неможлива при виконанні умови (6). Тому $y_0 > 0$. У цьому випадку рівняння має додатну асимптотично стійку нерухому точку

$$y_0 = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{B(t) - A(t)}{C(t)B(t)} \right)^{1/p}.$$

Припустимо тепер, що розв'язок немонотонний. Тоді існує послідовність точок $\{\tau_k\}$ така, що $y(\tau_k, \varphi_1) < \varepsilon$ і $y'(\tau_k, \varphi_1) = 0$, якщо τ_k не збігається з точками імпульсної дії, і $y'(\tau_k - 0, \varphi_1) \le 0$, якщо $\tau_k = t_j$ для деякого j. Звідси випливає, що

$$-A(\tau_n)y(\tau_n) + \frac{B(\tau_n)y(\tau_n - h)}{1 + C(\tau_n)y^p(\tau_n - h)} \le 0,$$

тому

$$\frac{y(\tau_n - h)}{1 + C(\tau_n)y^p(\tau_n - h)} \le \frac{A(\tau_n)}{B(\tau_n)}\,\varepsilon. \tag{13}$$

Спочатку припустимо, що $p \le 1$. У цьому випадку функція $x/(1 + cx^p)$ монотонно зростає відносно $x \ge 0$.

Знайдемо розв'язок рівняння

$$\frac{y}{1 + Cy^p} = \frac{A}{B}\,\varepsilon \tag{14}$$

вигляду $y = z\varepsilon$. Тоді z задовольняє рівняння

$$\frac{z}{1 + Cz^p\varepsilon^p} = \frac{A}{B}. \tag{15}$$

Легко перевірити, що корінь z набуває значень, менших за 1, якщо

$$\varepsilon < \left(\frac{B - A}{BC} \right)^{1/p}.$$

Тому при

$$\varepsilon < \varepsilon_* = \inf_t \left(\frac{B(t) - A(t)}{B(t)C(t)} \right)^{1/p} \tag{16}$$

існує $\nu \in (0, 1)$ таке, що розв'язок нерівності (13) задовольняє оцінку

$$y(\tau_n - h) < \nu\varepsilon.$$

Якщо $y'(\tau_n - h) \le 0$, то

$$\frac{y(\tau_n - 2h)}{1 + C(\tau_n - h)y^p(\tau_n - 2h)} \le \frac{A(\tau_n - h)}{B(\tau_n - h)}\,\nu\varepsilon$$

і $y(\tau_n - 2h) < \nu^2\varepsilon$.

Якщо $y'(\tau_n - h) > 0$, виберемо першу зліва від $\tau_n - h$ точку θ_1, де $y'(\theta_1, \varphi_1) \leq 0$.

Продовжуючи аналогічно, отримуємо послідовність точок θ_k таку, що $y(\theta_k, \varphi_1) \leq \nu^k \varepsilon$. Нехай $\tilde{\varphi}_1 = \inf_{\theta \in [-h(0), 0]} \varphi_1(\theta)$. Виберемо k_1 так, що $\gamma^{k_1} \varepsilon < \tilde{\varphi}_1$. Вибираючи досить велике τ_n за початкове з нескінченної послідовності $\{\tau_n\}$, отримуємо, що існує θ_k таке, що $y(\theta_k, \varphi_1) \leq \nu^k \varepsilon < \tilde{\varphi}_1$. Суперечність. Якщо початкова функція $\varphi_1(\theta)$ не відокремлена від нуля, то як початкову функцію розглядаємо розв'язок $y(t, \varphi_1)$, $t \in [0, h]$. За першою частиною доведення теореми він є строго додатним і $\inf_{\theta \in [0,h]} y(\theta, \varphi_1) > 0$.

Якщо $p > 1$, то функція $x/(1 + cx^p)$ має максимум у точці $x_M = (c(p-1))^{-1/p}$.

При фіксованому $\varepsilon > 0$ рівняння (14) має два додатні розв'язки y_1 і y_2. Якщо

$$\frac{A}{B}\varepsilon < \frac{\tilde{M}_0}{1 + C\tilde{M}_0^p},$$

то корінь y_2 задовольняє оцінку $y_2 > \tilde{M}_0$.

Оскільки всі розв'язки рівняння (8), (9) фінально рівномірно обмежені зверху сталою $\tilde{M}_0$, будемо вважати, що розв'язки обмежені сталою $\tilde{M}_0$ при всіх $t \geq t_0$. Тому коренем y_2 рівняння (14) нехтуємо.

Отже, при

$$\varepsilon < \varepsilon^* = \min\left\{ \inf_t \left(\frac{B(t) - A(t)}{B(t)C(t)} \right)^{1/p}, \ \inf_t \left(\frac{B(t)\tilde{M}_0}{A(t)(1 + C(t)\tilde{M}_0^p)} \right) \right\}$$

розв'язок нерівності (13) задовольняє оцінку $y(\tau_n - h) < \nu\varepsilon$ з деяким $\nu \in (0, 1)$.

Далі доведення аналогічне випадку $p \leq 1$.

Отже, в якості $\tilde{m}_0$ для розв'язків рівняння (8), (9) можна вибрати число ε_*, якщо $p \leq 1$, і число ε^* при $p > 1$.

Відповідно, в якості m_0 для розв'язків рівняння (1), (2) можна вибрати число $\omega^L \varepsilon_*$, якщо $p \leq 1$, і число $\omega^L \varepsilon^*$ при $p > 1$.

Теорему доведено.

Існування додатного майже періодичного розв'язку.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови (5) і (6), а також*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{y \in [\tilde{m}_0, \tilde{M}_0]} \frac{B(t)(1 + C(t)(1-p)y^p)}{(1 + C(t)y^p)^2} < \sigma_1. \tag{17}$$

Тоді рівняння (1), (2) має єдиний додатний асимптотично стійкий w-майже періодичний розв'язок.

Доведення. З доведення теореми 3 випливає, що якщо початкова функція розв'язку належить області перманентності рівняння, то розв'язок залишається в цій області при всіх $t > 0$. Розглянемо два такі розв'язки $y_1(t)$ і $y_2(t)$ рівняння (8), (9), тобто розв'язки, які задовольняють умови

$$\tilde{m}_0 \leq y_i(t) \leq \tilde{M}_0, \quad i = 1, 2.$$

Їхня різниця $w(t) = y_1(t) - y_2(t)$ задовольняє рівняння без імпульсів

$$w'(t) = -A(t)w(t) + B_2(t)w(t-h), \tag{18}$$

де

$$B_2(t) = \frac{B(t)(1 + (1-p)C(t)\tilde{y}^p(t-h)}{(1 + C(t)\tilde{y}^p(t-h))^2},$$

$\tilde{y}(t) = y_1(t) + \xi(t)(y_1(t) - y_2(t))$, функція $\xi(t)$ набуває значень з відрізка $[0,1]$ при всіх t.

Рівняння (18) рівномірно асимптотично стійке, якщо $\sup_t |B_2(t)| < \inf_t A(t)$ (див. [11, с. 154]).

Отже, рівномірно асимптотично стійким є і кожний розв'язок рівняння (8), (9), який належить області перманентності. За теоремою 2 всі ці розв'язки асимптотично w-майже періодичні. Тому рівняння (8), (9) має єдиний w-майже періодичний розв'язок, а отже, і рівняння (1), (2) має єдиний w-майже періодичний розв'язок, який є додатнозначним і асимптотично стійким при $t \to +\infty$.

Наслідок. *Нехай виконуються умови (5) і (6), а також*

$$\frac{B^M}{1 + C^L \varepsilon_*^p} < \sigma_1,$$

якщо $p \leq 1$, *або*

$$\frac{B^M p}{1 + C^L (\varepsilon^*)^p} < \sigma_1,$$

якщо $p > 1$. *Тоді рівняння (1), (2) має єдиний додатний асимптотично стійкий* w*-майже періодичний розв'язок.*

1. *Mackey M. C., Glass L.* Oscillation and chaos in physiological control systems // Science. — 1977. — **197**. — P. 287–289.
2. *Alzabut J. O., Nieto J. J., Stamov G. T.* Existence and exponentioal stability of positive almost periodic solutions for a model of hematopoiesis // Boundary Value Problems. — 2009. — ID 127510. — 10 p.
3. *Berezansky L., Braverman E.* Mackey–Glass equation with variable coefficients // Comput. and Math. Appl. — 2006. — **51.** — P. 1–16.
4. *Gopalsamy K., Trofimchuk S. I., Bantsur N. R.* A note on global attractivity in modems of hematopoiesis // Ukr. Math. J. — 1998. — **50**, № 1. — P. 5–12.
5. *Gyori I., Ladas G.* Oscillation theory of delay differential equations. — Oxford: Clarendon Press, 1991. — 368 p.
6. *Liz E., Pinto M., Tkachenko V., Trofimchuk S.* A global stability criterion for a family of delayed population models // Quart. Appl. Math. — 2005. — **63**. — P. 56–70.
7. *Myslo Y. M., Tkachenko V. I.* Global attractivity in almost periodic single species models // Funct. Different. Equat. — 2011. — **18**, № 3–4. — P. 269–278.
8. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсних систем. — М.: Мир, 1971. — 310 с.
9. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. — Singapore: World Sci., 1995. — 462 p.
10. *Fink A.M.* Almost periodic differential equations // Lect. Notes Math. — Springer, 1974. — **337**. — 336 p.
11. *Hale J. K., Lunel S. M. V.* Introduction to functional differential equations. — New York: Springer, 1993. — 447 p.

Одержано 11.05.11