УДК 517.988.6

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНО ДИХОТОМІЧНІ РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ З НЕЛІПШИЦЕВИМИ ЗБУРЕННЯМИ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
Україна, 33000, Рівне, вул. Соборна, 11
e-mail: V.Ye.Slyusarchuk@NUWM.rv.ua

We obtain conditions for existence of bounded solutions of nonlinear difference equations.

Получены условия существования ограниченных решений нелинейных разностных уравнений.

1. Основний об'єкт досліджень. Нехай $\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел, $\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел, $\mathbb{C}$ — множина всіх комплексних чисел, E_n, $n \in \mathbb{Z}$, — скінченновимірні банахові простори з нормами $\|\cdot\|_{E_n}$, $n \in \mathbb{Z}$, і нульовими векторами 0_n, $n \in \mathbb{Z}$, відповідно, $\mathfrak{M}$ — банаховий простір двосторонніх послідовностей $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, де $x_n \in E_n$, $n \in \mathbb{Z}$, з нульовим елементом $\mathbf{0} = (0_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ і нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_{E_n},$$

$l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ — банаховий простір двосторонніх числових послідовностей $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ з нормою

$$\|\mathbf{a}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$$

(тут $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, якщо простір $\mathfrak{M}$ дійсний, і $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, якщо простір $\mathfrak{M}$ комплексний), X і Y — довільні банахові простори і $L(X, Y)$ — банаховий простір лінійних неперервних операторів A, що діють із простору X у простір Y, з нормою

$$\|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y.$$

Розглянемо різницеві рівняння

$$x_n = A_{n-1}x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

$$x_n = A_{n-1}x_{n-1} + h_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

і лінійний неперервний оператор $\mathfrak{D} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, що визначається рівностями

$$(\mathfrak{D}\mathbf{x})_n = x_n - A_{n-1}x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

де $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$, $A_n \in L(E_n, E_{n+1})$, $n \in \mathbb{Z}$, і

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|A_n\|_{L(E_n,E_{n+1})} < +\infty.$$

Будемо вимагати, щоб для розв'язків рівняння (1) мала місце *експоненціальна дихотомія* на $\mathbb{Z}$ (*рівняння e-дихотомічне*) [1]. Це означає, що для кожного $m \in \mathbb{Z}$ простір E_m розпадається в пряму суму замкнених підпросторів

$$E_m = E_m^+ + E_m^-$$

і виконуються наступні умови:

а) проектори P_m^+ і P_m^- на підпростори E_m^+ і E_m^- відповідно рівномірно обмежені, тобто

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} \|P_m^+\|_{L(E_m,E_m)} + \sup_{m\in\mathbb{Z}} \|P_m^-\|_{L(E_m,E_m)} < +\infty;$$

б) для кожного $z \in E_m^+$ для розв'язку y_n задачі

$$y_{n+1} = A_n y_n, \quad n \geq m,$$
$$y_m = z$$

виконується співвідношення $\|y_n\|_{E_n} \leq N_1 q_1^{n-m} \|z\|_{E_m}$, $n \geq m$, з деякими $N_1 > 0$ і $q_1 \in \in (0,1)$, що не залежать від n і m;

в) для кожного $z \in E_m^-$ для розв'язку y_n задачі

$$y_{n+1} = A_n y_n, \quad n < m,$$
$$y_m = z$$

виконується співвідношення $\|y_n\|_{E_n} \leq N_2 q_2^{m-n} \|z\|_{E_m}$, $n \leq m$, з деякими $N_2 > 0$ і $q_2 \in \in (0,1)$, що не залежать від n і m.

У подальшому також будемо використовувати два класи нелінійних операторів. Позначимо через $\mathfrak{K}^+$ множину всіх c-неперервних операторів $\mathcal{K}^+ : \mathfrak{M} \to l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, для кожного з яких

$$\sup_{x\in\mathfrak{M}} \|\mathcal{K}^+ x\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})} \leq 1. \tag{3}$$

Через $\mathfrak{K}^-$ позначимо множину всіх c-неперервних операторів $\mathcal{K}^- : \mathfrak{M} \to l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, для кожного з яких

$$\inf_{x\in\mathfrak{M},\, n\in\mathbb{Z}} |(\mathcal{K}^- x)_n| \geq 1 \tag{4}$$

і

$$\sup_{x\in\mathfrak{M}} \|\mathcal{K}^- x\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})} < +\infty. \tag{5}$$

Метою цієї статті є доведення наступного твердження.

Теорема 1. *Якщо рівняння (1) e-дихотомічне на $\mathbb{Z}$, то для довільних $\mathcal{K}^+ \in \mathfrak{K}^+$, $\mathcal{K}^- \in \mathfrak{K}^-$ і $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$ рівняння*

$$x_n = ((\mathcal{K}^+\mathbf{x})_n P_n^+ + (\mathcal{K}^-\mathbf{x})_n P_n^-) A_{n-1} x_{n-1} + h_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$.

Окремими випадками теореми 1 є два твердження.

Наслідок 1. *Нехай існують такі числа $N > 0$ і $q \in (0,1)$, що для довільних $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \le n$, виконується нерівність*

$$\|A_n A_{n-1} \ldots A_m\|_{L(E_m, En+1)} \le N q^{n-m+1}.$$

Тоді для довільних $\mathcal{K}^+ \in \mathfrak{K}^+$ і $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$ рівняння

$$x_n = (\mathcal{K}^+\mathbf{x})_n A_{n-1} x_{n-1} + h_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$.

Наслідок 2. *Нехай оператори $A_n : E_n \to E_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, мають неперервні обернені й існують такі числа $N > 0$ і $q \in (0,1)$, що для довільних $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \le n$, виконується нерівність*

$$\left\|A_m^{-1} A_{m+1}^{-1} \ldots A_n^{-1}\right\|_{L(En+1, E_m)} \le N q^{n-m+1}.$$

Тоді для довільних $\mathcal{K}^- \in \mathfrak{K}^-$ і $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$ рівняння

$$x_n = (\mathcal{K}^-\mathbf{x})_n\, A_{n-1}\, x_{n-1} + h_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$.

У даній статті задача про існування обмежених розв'язків рівняння (6) зводиться до задачі про існування нерухомих точок деякого відображення, що може бути розривним у кожній точці простору $\mathfrak{M}$ (див. п. 3), оскільки в рівнянні (6) оператори $\mathcal{K}^+$ і $\mathcal{K}^-$ можуть мати аналогічні властивості. Очевидно, що у цьому випадку для розв'язання такої задачі не можна застосовувати відомі принцип стискаючих відображень [2] та теорему Шаудера про нерухому точку [3].

Зазначимо, що експоненціальна дихотомічність різницевого рівняння (1) на $\mathbb{Z}$ досліджувалась у [4] (випадок $E_n = \mathrm{const}$ (див. теорему 7.6.5)) і [1]. Ця властивість звичайних лінійних диференціальних і диференціально-функціональних рівнянь на $\mathbb{R}$ вивчалась відповідно в [5–9] і [10, 11]. Експоненціальна дихотомічність різницевого рівняння (1) на множинах $\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} : n \ge 0\}$ і $\mathbb{Z}_- = \{n \in \mathbb{Z} : n < 0\}$ або $\mathbb{Z}_- \cup \{0\}$, коли $E_n \equiv \mathrm{const}$, та диференціальних рівнянь на півосях вивчалась відповідно в [12, 13] і [14, 15].

2. Допоміжні результати. Наведемо деякі результати статті [1] про зображення розв'язків рівнянь (2), доповнення до них і теорему про нерухому точку c-неперервного оператора, потрібні для доведення теореми 1.

2.1. Зображення розв'язків рівняння (2). У статті [1] встановлено наступне твердження.

Теорема 2. *Рівняння (1) e-дихотомічне на $\mathbb{Z}$ тоді і тільки тоді, коли оператор $\mathfrak{D}$ має неперервний обернений.*

Ця теорема справджується й у випадках $\dim E_n \leq +\infty$, $n \in \mathbb{Z}$, і $E_n \equiv E$, $\dim E \leq \leq +\infty$ [1].

Експоненціальна дихотомія розв'язків рівняння (1) дає змогу (див. [1]) ввести до розгляду функцію

$$G_{n,m} = \begin{cases} B_{n,m}, & \text{якщо} \quad n \geq m, \\ -C_{n,m}, & \text{якщо} \quad n < m, \end{cases} \tag{7}$$

де $B_{n,m}$ і $C_{n,m}$ — операторні розв'язки відповідно задач

$$Y_{n+1} = A_n Y_n, \quad n \geq m,$$

$$Y_m = P_m^+$$

і

$$Z_{n+1} = A_n Z_n, \quad n < m,$$

$$Z_m = P_m^-,$$

що визначаються єдиним чином. Завдяки означенню е-дихотомічності рівняння (1) та теоремі Банаха – Штейнгауза [2, 16] для $G_{n,m}$ справджується співвідношення

$$\|G_{n,m}\|_{L(E_m,E_n)} \leq N q^{|n-m|}, \quad (n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \tag{8}$$

де $N = \max\{N_1, N_2\}$ і $q = \max\{q_1, q_2\}$. Тому можна розглянути лінійний неперервний оператор $\mathfrak{G}$, що діє у просторі $\mathfrak{M}$ і визначається рівністю

$$(\mathfrak{G}\mathbf{h})_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G_{n,m} h_m, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Цей оператор називається *оператором Гріна*, а $G_{n,m}$ — *функцією Гріна* оператора $\mathfrak{D}$.

Згідно з [1] та теоремою 2 справджується наступне твердження.

Теорема 3. *Якщо оператор $\mathfrak{D} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ має неперервний обернений оператор $\mathfrak{D}^{-1}$, то*

$$\mathfrak{D}^{-1} = \mathfrak{G}.$$

Отже, у випадку е-дихотомічного рівняння (1) для кожного $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$ єдиний розв'язок $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$ рівняння (2) зображується за допомогою формули

$$x_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G_{n,m} h_m, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

яку на підставі (7) можна записати у вигляді

$$x_n = P_n^+ h_n + \sum_{m=-\infty}^{n-1} B_{n,m} h_m - \sum_{m=n+1}^{+\infty} C_{n,m} h_m, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Ми використаємо формулу, аналогічну (10), для дослідження рівняння (6). Для цього нам потрібні будуть деякі властивості операторів A_n, $n \in \mathbb{Z}$, $B_{n,m}$, $n \geq m$, $C_{n,m}$, $n \leq m$, і просторів E_n^-, E_n^+, $n \in \mathbb{Z}$.

Позначимо через $R(A)$ множину значень оператора $A \in L(X, Y)$, тобто множину $\{Ax : x \in X\}$, а через $\dim X$ розмірність простору X.

Теорема 4. *Справджуються співвідношення*

$$A_n E_n^+ \subset E_{n+1}^+, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

$$A_n E_n^- = E_{n+1}^-, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{12}$$

$$R(B_{n,m}) \subset E_n^+, \quad n \geq m, \tag{13}$$

$$R(C_{n,m}) = E_n^-, \quad n < m, \tag{14}$$

і

$$\dim E_n^- = \dim E_{n+1}^-, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

Доведення. Спочатку покажемо, що виконується співвідношення

$$A_n E_n^- \subset E_{n+1}^-, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

Справді, якщо для деякого числа $k_0 \in \mathbb{Z}$

$$A_{k_0} E_{k_0}^- \setminus E_{k_0+1}^- \neq \varnothing,$$

то для деяких ненульових векторів $a^- \in E_{k_0}^-$ і $b^+ \in E_{k_0+1}^+$

$$A_{k_0} a^- = b^+.$$

Легко перевірити, що

$$z_n = \begin{cases} C_{n,k_0} a^-, & \text{якщо} \quad n \leq k_0, \\ B_{n,k_0+1} b^+, & \text{якщо} \quad n \geq k_0 + 1, \end{cases}$$

є обмеженим розв'язком рівняння (1). Тому на підставі теореми 2 рівняння (1) не може бути e-дихотомічним. Отже, співвідношення (16) виконується.

Перейдемо до встановлення співвідношення (13).

Припустимо, що це співвідношення є хибним. Існують такі числа $m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$ і вектори $x^+ \in E^+_{m_0}$, $y^+ \in E^+_{n_0}$, $y^- \in E^-_{n_0}$ $(\|y^-\|_{E_{n_0}} \neq 0)$, для яких

$$B_{n_0,m_0} x^+ = y^+ + y^-.$$

Легко перевірити, що

$$v_n = \begin{cases} B_{n,m_0} x^+ - B_{n,n_0} y^+, & \text{якщо} \quad n \geq n_0, \\ C_{n,n_0} y^-, & \text{якщо} \quad n < n_0, \end{cases}$$

є розв'язком різницевого рівняння (1). Тут $B_{n,m_0} x^+$, $B_{n,n_0} y^+$ і $C_{n,n_0} y^-$ — розв'язки відповідно задач

$$x_{n+1} = A_n x_n, \quad n \geq m_0,$$
$$x_{m_0} = x^+,$$

$$u_{n+1} = A_n u_n, \quad n \geq n_0,$$
$$u_{n_0} = y^+$$

і

$$w_{n+1} = A_n w_n, \quad n < n_0,$$
$$w_{n_0} = y^-.$$

Оскільки

$$\|B_{n,m_0} x^+\|_{E_n} \leq N_1 q_1^{n-m_0} \|x^+\|_{E_{m_0}}, \quad n \geq m_0,$$

$$\|B_{n,n_0} y^+\|_{E_n} \leq N_1 q_1^{n-n_0} \|y^+\|_{E_{n_0}}, \quad n \geq n_0,$$

і

$$\|C_{n,n_0} y^-\|_{E_n} \leq N_2 q_2^{n_0-n} \|y^-\|_{E_{n_0}}, \quad n \leq n_0$$

(тут N_1, N_2, q_1 і q_2 — ті самі числа, що і в означенні е-дихотомічності рівняння (1)), то

$$\|v_n\|_{E_n} \leq N_3 q^{|n-n_0|}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

для деякого числа $N_3 > 0$ і $q = \max\{q_1, q_2\}$. Тому $\mathbf{v} = (v_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathfrak{M} \setminus \{0\}$ і, отже, $\ker \mathfrak{D} \neq \{0\}$. Звідси на підставі теореми Банаха про обернений оператор [2] випливає, що оператор $\mathfrak{D}$ не має неперервного оберненого, а рівняння (1) не є е-дихотомічним. Отже, припущення про невиконання (13) є хибним.

Співвідношення (11) випливає із (13) при $m = n - 1$.

Тепер покажемо, що

$$R(C_{n,m}) \subset E_n^-, \quad n < m. \tag{17}$$

Припустимо, що це співвідношення не виконується. Існують такі числа $m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$ і вектори $x^- \in E_{m_0}^-$, $y^- \in E_{n_0}^-$, $y^+ \in E_{n_0}^+$ ($y^+ \neq 0_{n_0}$), для яких

$$C_{n_0,m_0}x^- = y^- + y^+.$$

Легко перевірити, що

$$s_n = \begin{cases} C_{n,m_0}x^- - C_{n,n_0}y^-, & \text{якщо} \quad n \leq n_0, \\ B_{n,n_0}y^+, & \text{якщо} \quad n > n_0, \end{cases}$$

є розв'язком різницевого рівняння (1). Тут $C_{n,m_0}x^-$, $C_{n,n_0}y^-$ і $B_{n,n_0}y^+$ — розв'язки відповідно задач

$$x_{n+1} = A_n x_n, \quad n < m_0,$$
$$x_{m_0} = x^-,$$

$$u_{n+1} = A_n u_n, \quad n < n_0,$$
$$u_{n_0} = y^-$$

і

$$w_{n+1} = A_n w_n, \quad n \geq n_0,$$
$$w_{n_0} = y^+.$$

Оскільки

$$\|C_{n,m_0}x^-\|_{E_n} \leq N_2 q_2^{m_0-n}\|x^-\|_{E_{m_0}}, \quad n \leq m_0,$$

$$\|C_{n,n_0}y^-\|_{E_n} \leq N_2 q_2^{n_0-n}\|y^-\|_{E_{n_0}}, \quad n \leq n_0,$$

і

$$\|B_{n,n_0}y^+\|_{E_n} \leq N_1 q_1^{n-n_0}\|y^+\|_{E_{n_0}}, \quad n \geq n_0$$

(тут N_1, N_2, q_1 і q_2 — ті самі числа, що і в означенні e-дихотомічності рівняння (1)), то

$$\|v_n\|_{E_n} \leq N_3 q^{|n-n_0|}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

для деякого числа $N_3 > 0$ і $q = \max\{q_1, q_2\}$. Тому $\mathbf{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M} \setminus \{0\}$ і, отже, $\ker \mathfrak{D} \neq$ $\neq \{0\}$. Звідси випливає, що оператор $\mathfrak{D}$ не має неперервного оберненого, а рівняння (1) не є e-дихотомічним. Отже, припущення про невиконання (17) є хибним.

Тепер обґрунтуємо виконання співвідношення (14). Зафіксуємо довільні числа $n_0, m_0 \in \in \mathbb{Z}$, $n_0 < m_0$.

З означення $C_{n,m}$ випливає, що

$$A_{m_0-1}A_{m_0-2}\ldots A_{n_0}C_{n_0,m_0}x^- = x^- \tag{18}$$

для всіх $x^- \in E^-_{m_0}$. Оскільки множини $C_{n_0,m_0}E^-_{m_0}$ і $A_{m_0-1}A_{m_0-2}\ldots A_{n_0}E^-_{n_0}$ є підпросторами відповідно просторів $E^-_{n_0}$ і $E^-_{m_0}$, а оператори $A_{m_0-1}A_{m_0-2}\ldots A_{n_0}$ і C_{n_0,m_0} є операторами скінченного рангу, то

$$\dim C_{n_0,m_0}E^-_{m_0} \le \dim E^-_{m_0} \tag{19}$$

і

$$\dim A_{m_0-1}A_{m_0-2}\ldots A_{n_0}E^-_{n_0} \le \dim E^-_{n_0}.$$

На підставі (16)

$$A_{m_0-1}A_{m_0-2}\ldots A_{n_0}E^-_{n_0} \subset E^-_{m_0}.$$

Тому

$$\dim A_{m_0-1}A_{m_0-2}\ldots A_{n_0}E^-_{n_0} \le \dim E^-_{m_0}. \tag{20}$$

Завдяки рівності (18), нерівностям (19), (20) та включенню

$$C_{n_0,m_0}E^-_{m_0} \subset E^-_{n_0}$$

(тут використано (17)) справджуються рівності

$$\begin{gathered}\dim C_{n_0,m_0}E^-_{m_0} = \dim E^-_{m_0},\\ \dim A_{m_0-1}A_{m_0-2}\ldots A_{n_0}E^-_{n_0} = \dim E^-_{m_0}.\end{gathered} \tag{21}$$

Покажемо, що

$$\dim E^-_{n_0} = \dim E^-_{m_0}. \tag{22}$$

Припустимо, що

$$\dim E^-_{n_0} > \dim E^-_{m_0}. \tag{23}$$

Завдяки (18) і (23) існує ненульовий вектор $y \in E^-_{n_0} \setminus C_{n_0,m_0}E^-_{m_0}$, для якого

$$\|A_{m_0-1}A_{m_0-2}\ldots A_{n_0}y\|_{E_{m_0}} = 0. \tag{24}$$

На підставі (24)

$$\omega_n = \begin{cases} C_{n,n_0}y, & \text{якщо} \quad n \leq n_0, \\ A_{n_0}y, & \text{якщо} \quad n = n_0+1, \\ A_{n_0+1}A_{n_0}y, & \text{якщо} \quad n = n_0+2, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ A_{m_0-2}\dots A_{n_0+1}A_{n_0}y, & \text{якщо} \quad n = m_0-1, \\ 0_n, & \text{якщо} \quad n \geq m_0, \end{cases}$$

є обмеженим ненульовим розв'язком рівняння (1), тобто $\ker \mathfrak{D} \neq \{0\}$, що суперечить е-дихотомічності рівняння (1). Отже, припущення, що виконується співвідношення (23), є хибним.

Оскільки

$$\dim C_{n_0,m_0}E^-_{m_0} = \dim E^-_{n_0}$$

(на підставі (21) та (22)) і

$$C_{n_0,m_0}E^-_{m_0} \subset E^-_{n_0},$$

то

$$C_{n_0,m_0}E^-_{m_0} = E^-_{n_0}, \tag{25}$$

що завдяки довільності вибору чисел $n_0, m_0 \in \mathbb{Z}, n_0 < m_0$, доводить виконання співвідношення (14).

Співвідношення (15) випливає з (22).

На підставі (25)

$$C_{n,n+1}E^-_{n+1} = E^-_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тому

$$A_nC_{n,n+1}E^-_{n+1} = A_nE^-_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Звідси та з рівності

$$A_nC_{n,n+1} = P^-_{n+1}$$

(див. означення $C_{n,m}$) випливає (12).

Теорему 4 доведено.

Позначимо через $O_{n,m}$ нульовий елемент простору $L(E_m, E_n)$.

Наслідок 3. *Справджуються співвідношення*

$$P^+_{n+1}A_nP^-_n = O_{n+1,n}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

і

$$P^-_{n+1}A_nP^+_n = O_{n+1,n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Розглянемо окремі випадки формули (9).

Якщо $E_n^+ = E_n$, $n \in \mathbb{Z}$, то обмежені розв'язки рівняння (2) зображуються за допомогою формули

$$x_n = h_n + \sum_{m=-\infty}^{n-1} A_{n-1} \ldots A_m h_m, \quad n \in \mathbb{Z},$$

оскільки операторний розв'язок $B_{n,m}$ задачі

$$Y_{n+1} = A_n Y_n, \quad n \geq m,$$

$$Y_m = I_m$$

(I_m — одиничний елемент простору $L(E_m, E_m)$) записується у вигляді

$$B_{n,m} = \begin{cases} I_m, & \text{якщо} \quad n = m, \\ A_{n-1} \ldots A_m, & \text{якщо} \quad n > m, \end{cases}$$

і

$$C_{n,m} = O_{n,m}, \quad n < m.$$

У випадку $E_n^- = E_n$, $n \in \mathbb{Z}$, всі простори E_n, $n \in \mathbb{Z}$, мають однакову скінченну розмірність і $C_{n,m}E_m = E_n$, $n < m$ (на підставі теореми 4). Тому оператори $A_n : E_n \to E_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, мають неперервні обернені. У цьому випадку обмежені розв'язки рівняння (2) зображуються за допомогою формули

$$x_n = - \sum_{m=n+1}^{+\infty} A_n^{-1} \ldots A_{m-1}^{-1} h_m, \quad n \in \mathbb{Z},$$

оскільки операторний розв'язок $C_{n,m}$ задачі

$$Z_{n+1} = A_n Z_n, \quad n < m,$$

$$Z_m = I_m,$$

записується у вигляді

$$C_{n,m} = \begin{cases} I_m, & \text{якщо} \quad n = m, \\ A_n^{-1} \ldots A_{m-1}^{-1}, & \text{якщо} \quad n < m, \end{cases}$$

і

$$B_{n,m} = O_{n,m}, \quad n \geq m.$$

Зауваження 1. У співвідношенні (13) знак включення $\subset$ не можна замінити знаком рівності, що підтверджується наступним прикладом.

Приклад 1. Використаємо банаховий простір $l_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ обмежених числових послідовностей $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ дійсних чисел з нормою

$$\|\mathbf{a}\|_{l_\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|.$$

Розглянемо скінченновимірні підпростори $X_m, m \geq 1$, простору $l_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, що визначаються таким чином. Елементами підпростору X_m є тільки такі послідовності $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \in l_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, для кожної з яких $a_n = 0$, якщо $n > m$. Очевидно, що $\dim X_m = m$.

Розглянемо банахові простори $E_n, n \in \mathbb{Z}$, що визначаються співвідношенням

$$E_n = \begin{cases} X_1, & \text{якщо} \quad n \leq 1, \\ X_n, & \text{якщо} \quad n > 1, \end{cases}$$

і лінійні неперервні оператори $A_n : E_n \to E_{n+1}, n \in \mathbb{Z}$, що визначаються рівностями

$$A_n(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) = \frac{1}{2}(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Легко перевірити, що різницеве рівняння

$$x_n = A_{n-1}x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

є e-дихотомічним, $E_n = E_n^+$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$ і $R(B_{n,m}) = E_m \neq E_n$, якщо $n > 1$ і $n > m$.

2.2. Теорема про нерухому точку c-неперервного оператора. Розглянемо оператор $\mathcal{P}_m : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}, m \in \mathbb{N}$, що визначається рівністю

$$(\mathcal{P}_m\mathbf{x})_n = \begin{cases} x_n, & \text{якщо} \quad |n| \leq m, \\ 0_n, & \text{якщо} \quad |n| > m. \end{cases}$$

Послідовність елементів $\mathbf{x}_k \in \mathfrak{M}, k \geq 1$, називатимемо *локально збіжною* до $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ при $k \to \infty$ і позначатимемо

$$\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc.}, \mathfrak{M}} \mathbf{x} \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

якщо $\sup_{k \geq 1} \|\mathbf{x}_k\|_\mathfrak{M} < +\infty$ і $\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{P}_m(\mathbf{x}_k - \mathbf{x})\|_\mathfrak{M} = 0$ для кожного числа $m \in \mathbb{N}$.

Оператор $\mathcal{H} : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$ називається *c-неперервним*, якщо для довільних $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ і $\mathbf{x}_k \in \mathfrak{M}, k \in \mathbb{N}$, для яких $\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc.}, \mathfrak{M}} \mathbf{x}$ при $k \to \infty$, виконується співвідношення

$$\mathcal{H}\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc.}, \mathfrak{M}} \mathcal{H}\mathbf{x} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Важливим для рівняння (6) є наступне твердження.

Теорема 5. *Нехай $\mathcal{B}$ — замкнена куля в банаховому просторі $\mathfrak{M}$ і оператор $\mathfrak{D} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ є c-неперервним. Тоді $\mathfrak{D}$ має нерухому точку $\mathbf{x}^* \in \mathcal{B}$.*

Доведення. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $\mathbf{0}$ є центром кулі $\mathcal{B}$. Завдяки c-неперервності оператора $\mathfrak{D}$ оператори

$$\mathfrak{D}_m = \mathcal{P}_m\mathfrak{D}\mathcal{P}_m, \quad m \in \mathbb{N},$$

є неперервними. Ці оператори також є цілком неперервними, оскільки підпростори $\mathcal{P}_m\mathfrak{M}$, $m \in \mathbb{N}$, простору $\mathfrak{M}$ скінченновимірні. Також виконуються співвідношення

$$\mathfrak{D}_m\mathcal{B} \subset \mathcal{B}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Тому на підставі теореми Шаудера про нерухому точку [3] існують такі елементи $\mathbf{x}_m = (x_{m,n})_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{P}_m\mathfrak{M}$, $m \in \mathbb{N}$, що

$$\mathfrak{D}_m\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Завдяки обмеженості послідовності $(\mathbf{x}_m)_{m\geq 1}$ і скінченним розмірностям просторів E_n, $n \in \mathbb{Z}$, існують такі строго зростаюча послідовність $(m_p)_{p\geq 1}$ натуральних чисел і елемент $\mathbf{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$, для яких

$$\mathbf{x}_{m_p} \xrightarrow{\text{loc.}, \mathfrak{M}} \mathbf{z} \quad \text{при} \quad p \to \infty. \tag{26}$$

Покажемо, що

$$\mathfrak{D}\mathbf{z} = \mathbf{z}. \tag{27}$$

Використаємо очевидні співвідношення

$$\begin{aligned} \|(\mathfrak{D}\mathbf{z})_n - z_n\|_{E_n} &\leq \|((\mathfrak{D}\mathbf{z})_n - z_n) - ((\mathfrak{D}\mathbf{x}_{m_p})_n - x_{m_p,n})\|_{E_n} + \|(\mathfrak{D}\mathbf{x}_{m_p})_n - x_{m_p,n}\|_{E_n} \leq \\ &\leq \|(\mathfrak{D}\mathbf{z})_n - (\mathfrak{D}\mathbf{x}_{m_p})_n\|_{E_n} + \|z_n - x_{m_p,n}\|_{E_n} + \|(\mathfrak{D}\mathbf{x}_{m_p})_n - x_{m_p,n}\|_{E_n} \end{aligned} \tag{28}$$

і

$$\begin{aligned} \|(\mathfrak{D}\mathbf{x}_{m_p})_n - x_{m_p,n}\|_{E_n} &= \|(\mathfrak{D}\mathcal{P}_{m_p}\mathbf{x}_{m_p})_n - x_{m_p,n}\|_{E_n} = \\ &= \|(\mathfrak{D}\mathcal{P}_{m_p}\mathbf{x}_{m_p})_n - (\mathcal{P}_{m_p}\mathfrak{D}\mathcal{P}_{m_p}\mathbf{x}_{m_p})_n\|_{E_n} = \|((I - \mathcal{P}_{m_p})\mathfrak{D}\mathbf{x}_{m_p})_n\|_{E_n}, \end{aligned} \tag{29}$$

що виконуються для всіх $n \in \mathbb{Z}$ і $p \in \mathbb{N}$. Оскільки на підставі (26) і c-неперервності оператора $\mathfrak{D}$

$$\lim_{p\to\infty} \|(\mathfrak{D}\mathbf{z})_n - (\mathfrak{D}\mathbf{x}_{m_p})_n\|_{E_n} = \lim_{p\to\infty} \|z_n - x_{m_p,n}\|_{E_n} = 0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

і

$$\|((I - \mathcal{P}_{m_p})\mathfrak{D}\mathbf{x}_{m_p})_n\|_{E_n} = 0,$$

якщо $m_p > |n|$, то завдяки співвідношенням (28) і (29) виконується рівність (27).

Теорему 5 доведено.

Твердження, аналогічне теоремі 5 (випадок $E_n \equiv E$ і $\dim E < \infty$), міститься в [17].

Зазначимо, що для нелінійних операторів ні c-неперервність не випливає з неперервності, ні неперервність не випливає з c-неперервності (див. [18]).

3. Оператор $\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}$. Зафіксуємо довільний елемент $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$ і розглянемо оператор $\mathfrak{D}_{\mathbf{h}} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, що визначається рівністю

$$(\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}\mathbf{x})_n = P_n^+ h_n + \sum_{m=-\infty}^{n-1} \left(\prod_{l=m+1}^{n} (\mathcal{K}^+\mathbf{x})_l \right) B_{n,m} h_m -$$
$$- \sum_{m=n+1}^{+\infty} \left(\prod_{l=n+1}^{m} (\mathcal{K}^-\mathbf{x})_l^{-1} \right) C_{n,m} h_m, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{30}$$

Цей оператор будемо використовувати при доведенні теореми 1.

Позначимо через $\mathcal{B}_r$ замкнену кулю радіуса r із центром у точці $\mathbf{0}$, тобто множину $\{\mathbf{x} \in \mathfrak{M} : \|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} \le r\}$.

Теорема 6. *Для кожного* $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$ *оператор* $\mathfrak{D}_{\mathbf{h}} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ *є* c*-неперервним,* $\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}\mathcal{B}_r \subset \mathcal{B}_r$, *де* $r = \dfrac{2N}{1-q}\|\mathbf{h}\|_{\mathfrak{M}}$, *й існує хоча б одна точка* $\mathbf{x}^* \in \mathcal{B}_r$, *для якої* $\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*$.

Доведення. Зафіксуємо довільний елемент $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$. Завдяки (3), (4), (5), (7), (8) і (30) для кожного $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$

$$\|\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} \le$$
$$\le \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left\| P_n^+ h_n + \sum_{m=-\infty}^{n-1} \left(\prod_{l=m+1}^{n} (\mathcal{K}^+\mathbf{x})_l \right) B_{n,m} h_m - \sum_{m=n+1}^{+\infty} \left(\prod_{l=n+1}^{m} (\mathcal{K}^-\mathbf{x})_l^{-1} \right) C_{n,m} h_m \right\|_{E_n} \le$$
$$\le \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\|P_n^+ h_n\|_{E_n} + \sum_{m=-\infty}^{n-1} \|B_{n,m}\|_{L(E_m,E_n)} \|h_m\|_{E_m} + \sum_{m=n+1}^{+\infty} \|C_{n,m}\|_{L(E_m,E_n)} \|h_m\|_{E_m} \right) \le$$
$$\le \left(N + \sum_{m=-\infty}^{n-1} N q^{n-m} + \sum_{m=n+1}^{+\infty} N q^{m-n} \right) \|h\|_{\mathfrak{M}} \le \frac{2N}{1-q}\|\mathbf{h}\|_{\mathfrak{M}}.$$

Звідси, зокрема, випливає, що

$$\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}\mathcal{B}_r \subset \mathcal{B}_r$$

для $r = \dfrac{2N}{1-q}\|\mathbf{h}\|_{\mathfrak{M}}$.

Тепер покажемо, що оператор є $\mathfrak{D}_{\mathbf{h}} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ є c-неперервним.

Розглянемо довільні $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ і $\mathbf{x}_k \in \mathfrak{M}$, $k \ge 1$, для яких

$$\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc.}, \mathfrak{M}} \mathbf{x} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Покажемо, що

$$\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc.}, \mathfrak{M}} \mathfrak{D}_{\mathbf{h}}\mathbf{x} \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{31}$$

Зафіксуємо довільні числа $n_0 \in \mathbb{N}$ і $\varepsilon > 0$. Існує число $m_0 \in \mathbb{N}$, для якого

$$\left(2N \sum_{|n_0-m|>m_0} q^{|n_0-m|}\right) \|h\|_{\mathfrak{M}} < \varepsilon.$$

Тоді на підставі (30)

$$\|(\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}\mathbf{x}_k)_{n_0} - (\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}\mathbf{x})_{n_0}\|_{E_{n_0}} = \left\| \sum_{m=-\infty}^{n_0-1} \left(\prod_{l=m+1}^{n_0} (\mathcal{K}^+\mathbf{x}_k)_l - \prod_{l=m+1}^{n_0} (\mathcal{K}^+\mathbf{x})_l \right) B_{n_0,m} h_m - \right.$$

$$\left. - \sum_{m=n_0+1}^{+\infty} \left(\prod_{l=n_0+1}^{m} (\mathcal{K}^-\mathbf{x}_k)_l^{-1} - \prod_{l=n_0+1}^{m} (\mathcal{K}^-\mathbf{x})_l^{-1} \right) C_{n_0,m} h_m \right\|_{E_{n_0}} \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{m=n_0-m_0}^{n_0-1} \left(\prod_{l=m+1}^{n_0} (\mathcal{K}^+\mathbf{x}_k)_l - \prod_{l=m+1}^{n_0} (\mathcal{K}^+\mathbf{x})_l \right) B_{n_0,m} h_m \right\|_{E_{n)}} +$$

$$+ \left\| \sum_{m=n_0+1}^{n_0+m_0} \left(\prod_{l=n_0+1}^{m} (\mathcal{K}^-\mathbf{x}_k)_l^{-1} - \prod_{l=n_0+1}^{m} (\mathcal{K}^-\mathbf{x})_l^{-1} \right) C_{n_0,m} h_m \right\|_{E_{n_0}} \leq \varepsilon.$$

Оскільки оператори $\mathcal{K}^+ : \mathfrak{M} \to l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ і $\mathcal{K}^- : \mathfrak{M} \to l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ c-неперервні, то

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\prod_{l=m+1}^{n_0} (\mathcal{K}^+\mathbf{x}_k)_l - \prod_{l=m+1}^{n_0} (\mathcal{K}^+\mathbf{x})_l \right) = 0$$

і

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\prod_{l=n_0+1}^{m} (\mathcal{K}^-\mathbf{x}_k)_l^{-1} - \prod_{l=n_0+1}^{m} (\mathcal{K}^-\mathbf{x})_l^{-1} \right) = 0.$$

Тому

$$\lim_{k\to+\infty} \|(\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}\mathbf{x}_k)_{n_0} - (\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}\mathbf{x})_{n_0}\|_{E_{n_0}} \leq \varepsilon.$$

Завдяки довільності вибору числа $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to+\infty} \|(\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}\mathbf{x}_k)_{n_0} - (\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}\mathbf{x})_{n_0}\|_{E_{n_0}} = 0.$$

Звідси з урахуванням довільності вибору числа $n_0 \in \mathbb{Z}$ випливає (31), тобто c-неперервність оператора $\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}$.

Отже, для оператора $\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}$ виконуються умови теореми 5 і тому цей оператор має нерухому точку $\mathbf{x}^* \in \mathcal{B}_r$.

Теорему 6 доведено.

Зауваження 2. c-Неперервний оператор $\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}$ може бути розривним у кожній точці простору $\mathfrak{M}$ (див. наступний приклад).

Приклад 2. Будемо вважати, що $E_n = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, і відображення A_n у рівнянні (2) визначається рівністю

$$A_n x = \frac{1}{10}\, x.$$

Тоді $\mathfrak{M} = l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ і рівняння (2) записується у вигляді

$$x_n = \frac{1}{10} x_{n-1} + h_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{32}$$

де $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. Очевидно, що у випадку рівняння (32) $E_n^+ = E_n = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$. Тому рівняння (6) відповідно має вигляд

$$x_n = \frac{1}{10} (\mathcal{K}^+ \mathbf{x})_n x_{n-1} + h_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

а c-неперервний оператор $\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}$, що визначається співвідношенням (30), записується у вигляді

$$(\mathfrak{D}_{\mathbf{h}} \mathbf{x})_n = h_n + \sum_{m=-\infty}^{n-1} \frac{1}{10^{n-m}} \left(\prod_{l=m+1}^{n} (\mathcal{K}^+ \mathbf{x})_l \right) h_m, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Нехай $h_n = 1$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$.

c-Неперервний оператор $\mathcal{K}^+ : l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \to l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ визначимо співвідношенням

$$(\mathcal{K}^+ \mathbf{x})_n = \sin((n-1) x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тоді

$$(\mathfrak{D}_{\mathbf{h}} \mathbf{x})_n = 1 + \sum_{m=-\infty}^{n-1} \frac{1}{10^{n-m}} \prod_{l=m+1}^{n} \sin((l-1) x_{l-1}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Зафіксуємо довільний елемент $\mathbf{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. Кожному дійсному числу δ поставимо у відповідність елемент $\mathbf{z}_\delta = (z_n + \delta)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. Легко перевірити, що

$$\varlimsup_{\delta\to 0} \, \|\mathcal{K}^+ \mathbf{z}_\delta - \mathcal{K}^+ \mathbf{z}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})} = \varlimsup_{\delta\to 0} \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\sin(nz_n + n\delta) - \sin(nz_n)| \in [1, 2], \tag{33}$$

тобто оператор $\mathcal{K}^+$ не є неперервним у точці $\mathbf{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Завдяки довільності вибору $\mathbf{z}$ оператор $\mathcal{K}^+$ є розривним у всіх точках простору $l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$.

Оператор $\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}$, як і оператор $\mathcal{K}^+$, також є розривним у всіх точках простору $l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$.

Справді, на підставі співвідношень

$$\|(\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}\mathbf{z}_\delta - (\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}\mathbf{z}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})} =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{m=-\infty}^{n-1}\frac{1}{10^{n-m}}\prod_{l=m+1}^{n}\sin((l-1)(z_{l-1}+\delta)) - \sum_{m=-\infty}^{n-1}\frac{1}{10^{n-m}}\prod_{l=m+1}^{n}\sin((l-1)z_{l-1})\right| \geq$$

$$\geq \sup_{n\in\mathbb{Z}}\left|\frac{1}{10}\,\sin((n-1)(z_{n-1}+\delta)) - \frac{1}{10}\sin((n-1)z_{n-1})\right| -$$

$$-\sup_{n\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{m=-\infty}^{n-2}\frac{1}{10^{n-m}}\prod_{l=m+1}^{n}\sin((l-1)(z_{l-1}+\delta)) - \sum_{m=-\infty}^{n-2}\frac{1}{10^{n-m}}\prod_{l=m+1}^{n}\sin((l-1)z_{l-1})\right| \geq$$

$$\geq \frac{1}{10}\sup_{n\in\mathbb{Z}}|\sin((n-1)(z_{n-1}+\delta)) - \sin((n-1)z_{n-1})| - \frac{2}{90}$$

та (33) для кожного $\mathbf{z} \in l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})$

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\ \|(\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}\mathbf{z}_\delta - (\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}\mathbf{z}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})} \neq 0.$$

Тому оператор $\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}$ є скрізь розривним на $l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})$.

4. Доведення теореми 1. Для оператора $\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}$ справджується наступне твердження.

Теорема 7. *Кожна нерухома точка* $\mathbf{x}^* = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$ *оператора* $\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}$ *є розв'язком рівняння (6).*

Доведення. Завдяки означенню оператора $\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}$ та рівності $\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$

$$x_n^* = P_n^+ h_n + \sum_{m=-\infty}^{n-1}\left(\prod_{l=m+1}^{n}(\mathcal{K}^+\mathbf{x}^*)_l\right)B_{n,m}h_m - \sum_{m=n+1}^{+\infty}\left(\prod_{l=n+1}^{m}(\mathcal{K}^-\mathbf{x}^*)_l^{-1}\right)C_{n,m}h_m. \quad (34)$$

Покажемо, що

$$x_n^* = ((\mathcal{K}^+\mathbf{x}^*)_n P_n^+ + (\mathcal{K}^-\mathbf{x}^*)_n P_n^-)A_{n-1}x_{n-1}^* + h_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (35)$$

Використовуючи (34), теорему 4 і наслідок 3, отримуємо

$$((\mathcal{K}^+\mathbf{x}^*)_n P_n^+ + (\mathcal{K}^-\mathbf{x}^*)_n P_n^-) A_{n-1} x_{n-1}^* = ((\mathcal{K}^+\mathbf{x}^*)_n P_n^+ + (\mathcal{K}^-\mathbf{x}^*)_n P_n^-) A_{n-1} \times$$

$$\times \left(P_{n-1}^+ h_{n-1} + \sum_{m=-\infty}^{n-2} \left(\prod_{l=m+1}^{n-1} (\mathcal{K}^+\mathbf{x}^*)_l \right) B_{n-1,m} h_m - \sum_{m=n}^{+\infty} \left(\prod_{l=n}^{m} (\mathcal{K}^-\mathbf{x}^*)_l^{-1} \right) C_{n-1,m} h_m \right) =$$

$$= (\mathcal{K}^+\mathbf{x}^*)_n P_n^+ A_{n-1} P_{n-1}^+ h_{n-1} + (\mathcal{K}^+\mathbf{x}^*)_n P_n^+ A_{n-1} \sum_{m=-\infty}^{n-2} \left(\prod_{l=m+1}^{n-1} (\mathcal{K}^+\mathbf{x}^*)_l \right) B_{n-1,m} h_m -$$

$$- (\mathcal{K}^-\mathbf{x}^*)_n P_n^- A_{n-1} \sum_{m=n}^{+\infty} \left(\prod_{l=n}^{m} (\mathcal{K}^-\mathbf{x}^*)_l^{-1} \right) C_{n-1,m} h_m =$$

$$= (\mathcal{K}^+\mathbf{x}^*)_n P_n^+ A_{n-1} P_{n-1}^+ h_{n-1} + \sum_{m=-\infty}^{n-2} \left(\prod_{l=m}^{n} (\mathcal{K}^+\mathbf{x}^*)_l \right) B_{n,m} h_m -$$

$$- \sum_{m=n+1}^{+\infty} \left(\prod_{l=n+1}^{m} (\mathcal{K}^-\mathbf{x}^*)_l^{-1} \right) C_{n,m} h_m - (\mathcal{K}^-\mathbf{x}^*)_n P_n^- A_{n-1} (\mathcal{K}^-\mathbf{x}^*)_n^{-1} C_{n-1,n} h_n =$$

$$= (\mathcal{K}^+\mathbf{x}^*)_n P_n^+ A_{n-1} P_{n-1}^+ h_{n-1} + \sum_{m=-\infty}^{n-2} \left(\prod_{l=m}^{n} (\mathcal{K}^+\mathbf{x}^*)_l \right) B_{n,m} h_m -$$

$$- \sum_{m=n+1}^{+\infty} \left(\prod_{l=n+1}^{m} (\mathcal{K}^-\mathbf{x}^*)_l^{-1} \right) C_{n,m} h_m - P_n^- h_n.$$

Тому для кожного $n \in \mathbb{Z}$

$$x_n^* - ((\mathcal{K}^+\mathbf{x}^*)_n P_n^+ + (\mathcal{K}^-\mathbf{x}^*)_n P_n^-) A_{n-1} x_{n-1}^* =$$

$$= \left\{ P_n^+ h_n + \sum_{m=-\infty}^{n-1} \left(\prod_{l=m+1}^{n} (\mathcal{K}^+\mathbf{x}^*)_l \right) B_{n,m} h_m - \sum_{m=n+1}^{+\infty} \left(\prod_{l=n+1}^{m} (\mathcal{K}^-\mathbf{x}^*)_l^{-1} \right) C_{n,m} h_m \right\} -$$

$$- \left\{ (\mathcal{K}^+\mathbf{x}^*)_n P_n^+ A_{n-1} P_{n-1}^+ h_{n-1} + \sum_{m=-\infty}^{n-2} \left(\prod_{l=m}^{n} (\mathcal{K}^+\mathbf{x}^*)_l \right) B_{n,m} h_m - \right.$$

$$\left. - \sum_{m=n+1}^{+\infty} \left(\prod_{l=n+1}^{m} (\mathcal{K}^-\mathbf{x}^*)_l^{-1} \right) C_{n,m} h_m - P_n^- h_n \right\} =$$

$$= P_n^+ h_n - (\mathcal{K}^+\mathbf{x}^*)_n P_n^+ A_{n-1} P_{n-1}^+ h_{n-1} + (\mathcal{K}^+\mathbf{x}^*)_n B_{n,n-1} h_{n-1} + P_n^- h_n =$$

$$= P_n^+ h_n + P_n^- h_n = h_n$$

(тут використано те, що $P_n^+ A_{n-1} P_{n-1}^+ = B_{n,n-1}$ згідно з теоремою 4 та означенням $B_{n,m}$), що завершує обґрунтування співвідношення (35).

Теорему 7 доведено.

З теореми 7 та з того, що на підставі теореми 6 множина нерухомих точок оператора $\mathfrak{D}_{\mathbf{h}}$ є непорожньою для кожного $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$, випливає твердження теореми 1.

5. Випадок лінійного рівняння (6). Розглянемо двосторонні числові послідовності $\mathbf{k}^+ = (k_n^+)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{k}^- = (k_n^-)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, для яких

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |k_n^+| \leq 1, \tag{36}$$

$$\inf_{n\in\mathbb{Z}} |k_n^-| \geq 1, \tag{37}$$

і лінійне рівняння

$$x_n = (k_n^+ P_n^+ + k_n^- P_n^-) A_{n-1} x_{n-1} + h_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{38}$$

де $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$. Очевидно, що рівняння (38) є окремим випадком рівняння (6).

Справджується наступне твердження.

Теорема 8. *Якщо рівняння (1) експоненціально дихотомічне на* $\mathbb{Z}$, *то для кожного* $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$ *рівняння (38) має єдиний розв'язок* $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$.

Доведення. Нехай однорідне рівняння

$$x_n = (k_n^+ P_n^+ + k_n^- P_n^-) A_{n-1} x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{39}$$

що відповідає (38), має обмежений розв'язок $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$, тобто

$$y_n = (k_n^+ P_n^+ + k_n^- P_n^-) A_{n-1} y_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{40}$$

Розглянемо елементи $\mathbf{y}^+ = (y_n^+)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$ і $\mathbf{y}^- = (y_n^-)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$, де $y_n^+ = P_n^+ y_n$ і $y_n^- = P_n^- y_n$. Оскільки на підставі (40), теореми 4 і наслідку 3 для кожного $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} P_n^+ y_n &= P_n^+ (k_n^+ P_n^+ + k_n^- P_n^-) A_{n-1} y_{n-1} = \\ &= k_n^+ P_n^+ A_{n-1} (P_{n-1}^+ + P_{n-1}^-) y_{n-1} = k_n^+ P_n^+ A_{n-1} P_{n-1}^+ y_{n-1} \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} P_n^- y_n &= P_n^- (k_n^+ P_n^+ + k_n^- P_n^-) A_{n-1} y_{n-1} = \\ &= k_n^- P_n^- A_{n-1} (P_{n-1}^+ + P_{n-1}^-) y_{n-1} = k_n^- P_n^- A_{n-1} P_{n-1}^- y_{n-1}, \end{aligned}$$

то

$$y_n^+ = k_n^+ P_n^+ A_{n-1} P_{n-1}^+ y_{n-1}^+, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{41}$$

і

$$y_n^- = k_n^- P_n^- A_{n-1} P_{n-1}^- y_{n-1}^-, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{42}$$

Із означень операторів $B_{n,m}$, $C_{n,m}$ і співвідношень (41), (42) випливає, що

$$y_n^+ = \left(\prod_{l=m+1}^{n} k_l^+ \right) B_{n,m} y_m^+, \quad n > m,$$

$$y_n^- = \left(\prod_{l=n+1}^{m} (k_l^-)^{-1} \right) C_{n,m} y_m^-, \quad n < m.$$

Тому на підставі (36) і (37)

$$\|y_n^+\|_{E_n} \leq N_1 q_1^{n-m} \|y_m^+\|_{E_m}, \quad n > m,$$

$$\|y_n^-\|_{E_n} \leq N_2 q_2^{m-n} \|y_m^+\|_{E_m}, \quad n < m,$$

де N_1, N_2, q_1 і q_2 — ті самі числа, що і в означенні e-дихотомічності рівняння (1). Із цих співвідношень випливає, що

$$\|y_n^+\|_{E_n} = \|y_n^-\|_{E_n} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отже, обмеженим розв'язком рівняння (39) є лише нульовий розв'язок.

На підставі теореми 1 рівняння (38) для кожного $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$ має розв'язок $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$. Цей розв'язок єдиний завдяки попереднім міркуванням.

Теорему 8 доведено.

Наслідок 4. *Якщо рівняння (1) експоненціально дихотомічне на $\mathbb{Z}$, то рівняння (39) також експоненціально дихотомічне на $\mathbb{Z}$ і функція Гріна оператора*

$$(\mathfrak{D}_{\mathbf{k}^+,\mathbf{k}^-}\mathbf{x})_n = x_n - (k_n^+ P_n^+ + k_n^- P_n^-) A_{n-1} x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

записується у вигляді

$$G_{n,m} = \begin{cases} k_{m+1}^+ \ldots k_n^+ B_{n,m}, & \text{якщо} \quad n > m, \\ P_m^+, & \text{якщо} \quad n = m, \\ -(k_{n+1}^-)^{-1} \ldots (k_m^-)^{-1} C_{n,m}, & \text{якщо} \quad n < m. \end{cases}$$

1. *Слюсарчук В. Е.* Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем // Укр. мат. журн. — 1983. — **35**, № 1. — С. 368–378.
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968. — 496 с.
3. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977. — 233 с.
4. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.

5. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.

6. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания. — М.: Наука, 1970. — 352 с.

7. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М.: Мир, 1970. — 456 с.

8. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. — 720 с.

9. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. — Киев: Наук. думка, 1990. — 272 с.

10. *Колесов Ю. С.* Необходимые и достаточные условия экспоненциальной дихотомии решений линейных почти-периодических уравнений с последействием // Вестн. Ярослав. ун-та. — 1933. — Вып. 5. — С. 28 – 62.

11. *Курбатов В. Г.* О дихотомии решений уравнений нейтрального типа // Исследования по устойчивости и теории колебаний. — Ярославль: Ярослав. гос. ун-т, 1977. — С. 158 – 166.

12. *Coffman S. V., Schäffer J. J.* Dichotomies for linear difference equations // Math. Ann. — 1967. — **172**. — P. 139 – 166.

13. *Баскаков А. Г.* Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов // Мат. заметки. — 2000. — **67**, № 6. — С. 816 – 827.

14. *Palmer K. J.* Exponential dichotomies and transversal homoclinic points // J. Different. Equat. — 1984. — **55**. — P. 225 – 256.

15. *Бойчук А. А., Покутний А. А.* Ограниченные решения линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 1. — С. 3 – 14.

16. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975. — 445 с.

17. *Слюсарчук В. Ю.* Теорема про нерухому точку для c-цілком неперервних операторів у просторах обмежених на зліченній групі функцій // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2008. — Вип. 421. — С. 105–108.

18. *Слюсарчук В. Ю.* Оборотність нелінійних різницевих операторів. – Рівне: Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування, 2006. — 233 с.

Одержано 01.03.10