УДК 517.968

ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОБМЕЖЕННЯМИ

А. Ю. Лучка, В. Ф. Мельничук

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

We find conditions for existence of solutions of quasilinear integral equations with quasilinear constraints, and substantiate the possibility of solving them by applying an iteration method.

Встановлено умови існування розв'язків квазілінійних інтегральних рівнянь з квазілінійними обмеженнями і наведено обґрунтування застосування до них ітераційного методу.

1. Об'єкт дослідження. Інтегральні рівняння з обмеженнями належать до класу нетерових задач, яким присвячено багато робіт, в тому числі і [1]. У працях [2 – 6] досліджувались питання існування та побудови розв'язків лінійних та нелінійних інтегральних рівнянь лише з лінійними обмеженнями. В даній статті висвітлюється застосування ітераційного методу до квазілінійних інтегральних рівнянь з параметрами та квазілінійними обмеженнями.

Будемо розглядати квазілінійне інтегральне рівняння вигляду

$$y(t) = f(t) + u(t) + \int_a^b K(t,s)y(s)\,ds + \varepsilon\int_a^b H(t,s)F(s,y(s))\,ds, \quad t \in [a,b]. \tag{1}$$

Поставимо задачу: знайти такі функції $y(t)$ та $u(t)$ із класу $L_2([a,b])$, щоб справджувались рівняння (1) та обмеження

$$\int_a^b S(t)y(t)\,dt = \alpha + \varepsilon\int_a^b J(t,y(t))\,dt. \tag{2}$$

Зупинимось на випадку, коли керування

$$u(t) = C(t)\lambda, \tag{3}$$

де $\lambda \in \mathbb{R}^l$ — шуканий параметр. Припустимо, що задані величини задовольняють такі умови: $f \in L_2([a,b])$, елементи $(1\times l)$-матриці $C(t)$ та $(l\times 1)$-матриці $S(t)$ і ядра $K(t,s)$ та $H(t,s)$ сумовні з квадратом на відрізку $[a,b]$ і в області $[a,b]\times[a,b]$ відповідно, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ — невід'ємний параметр і $\alpha \in \mathbb{R}^l$. Функції $F : [a,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та $J : [a,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняють умову Ліпшиця за другою змінною, тобто

$$|F(t,\xi) - F(t,\eta)| \le q(t)|\xi-\eta|, \quad |J(t,\xi) - J(t,\eta)| \le p(t)|\xi-\eta| \quad \forall\{\xi,\eta\} \subset \mathbb{R}, \tag{4}$$

де $\{p,q\} \subset L_2([a,b])$.

2. Зведення задачі до інтегрального рівняння без обмежень. Дослідження задачі (1) – (3) зводиться до дослідження квазілінійного інтегрального рівняння без обмежень. При цьому важливу роль відіграє допоміжна задача

$$y(t) = u(t) + z(t) + \varepsilon w(t), \tag{5}$$

$$\int_a^b S(t)y(t)dt = \alpha + \varepsilon\beta. \tag{6}$$

Будемо припускати, що задача (5), (6), в якій функція $u(t)$ зображується формулою (3), має єдиний розв'язок при довільно заданих значеннях функцій $z(t)$ та $w(t)$ із класу $L_2([a,b])$ та вектора $\beta \in \mathbb{R}^l$.

Побудуємо цей розв'язок. Для визначення невідомого параметра $\lambda \in \mathbb{R}^l$, підставивши вираз для $y(t)$ із (5) у рівність (6), одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$D\lambda = \alpha + \varepsilon\beta - \int_a^b S(t)z(t)\,dt - \varepsilon\int_a^b S(t)w(t)\,dt, \tag{7}$$

де стала $(l \times l)$-матриця

$$D = \int_a^b S(t)C(t)\,dt \tag{8}$$

згідно з припущенням щодо задачі (5), (6) є невиродженою. Застосувавши до рівняння (7) матрицю D^{-1}, отримаємо

$$\lambda = D^{-1}\left(\alpha + \varepsilon\beta - \int_a^b S(t)z(t)\,dt - \varepsilon\int_a^b S(t)w(t)\,dt\right). \tag{9}$$

Підставивши (9) у (3), будемо мати

$$u(t) = C(t)D^{-1}\left(\alpha + \varepsilon\beta - \int_a^b S(t)z(t)\,dt - \varepsilon\int_a^b S(t)w(t)\,dt\right). \tag{10}$$

Ввівши позначення

$$P(t) = C(t)D^{-1}, \quad r(t) = P(t)\alpha, \quad R(t,s) = P(t)S(s), \tag{11}$$

формулу (10) запишемо у вигляді

$$u(t) = r(t) - \int_a^b R(t,s)z(s)\,ds + \varepsilon P(t)\beta - \varepsilon \int_a^b R(t,s)w(s)\,dt. \tag{12}$$

На основі формул (12) та (5) дістанемо

$$y(t) = r(t) + z(t) - \int_a^b R(t,s)z(s)\,ds + \varepsilon\left(P(t)\beta + w(t) - \int_a^b R(t,s)w(s)\,dt\right). \tag{13}$$

Покладемо тепер

$$z(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s)y(s)\,ds, \tag{14}$$

$$w(t) = \int_a^b H(t,s)F(s,y(s))\,ds, \tag{15}$$

$$\beta = \int_a^b J(t,y(t))\,dt. \tag{16}$$

Тоді задача (1) – (3) набере вигляду допоміжної задачі (5), (6), і її єдиний розв'язок можна знайти за формулами (12), (13).

Підставивши вирази (14), (16) у (13), отримаємо інтегральне рівняння

$$y(t) = h(t) + \int_a^b M(t,s)y(s)\,ds + \varepsilon \int_a^b Q(t,s)F(s,y(s))\,ds + \varepsilon \int_a^b P(t)J(s,y(s))\,ds, \tag{17}$$

в якому

$$h(t) = r(t) + f(t) - \int_a^b R(t,\xi)f(\xi)\,d\xi, \tag{18}$$

$$M(t,s) = K(t,s) - \int_a^b R(t,\xi)K(\xi,s)\,d\xi, \tag{19}$$

$$Q(t,s) = H(t,s) - \int_a^b R(t,\xi)H(\xi,s)\,d\xi. \tag{20}$$

Формула (12) з урахуванням (14) – (16) набере вигляду

$$u(t) = g(t) - \int_a^b \Upsilon(t,s)y(s)\,ds + \varepsilon \int_a^b P(t)J(s,y(s))\,ds - \varepsilon \int_a^b \Xi(t,s)F(s,y(s))\,ds, \tag{21}$$

де

$$g(t) = h(t) - f(t), \quad \Upsilon(t,s) = \int_a^b R(t,\xi)K(\xi,s)\,d\xi, \quad \Xi(t,s) = \int_a^b R(t,\xi)H(\xi,s)\,d\xi. \tag{22}$$

Отже, дослідження існування розв'язків задачі (1) – (3) звелося до задачі існування розв'язків інтегрального рівняння (17).

Зауважимо, що замість припущення однозначної розв'язності задачі (5), (6) можна вимагати, щоб матриця D, яка визначається формулою (8), була невиродженою.

Використавши відому методику дослідження рівнянь із обмеженнями, неважко встановити наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо матриця D невироджена, то розв'язок задачі (1) – (3) існує тоді і тільки тоді, коли існує розв'язок інтегрального рівняння (17). Задача (1) – (3) і рівняння (17) одночасно мають єдині розв'язки.*

Питанням існування розв'язків інтегрального рівняння (17) присвячено багато робіт. Наведемо одну із достатніх умов існування та єдиності розв'язку. Для цього використаємо нерівності

$$\int_a^b \left| \int_a^b M(t,s)z(s)\,ds \right|^2 dt \le \nu^2 \int_a^b |z(s)|^2\,ds, \tag{23}$$

$$\int_a^b \left| \int_a^b |Q(t,s)q(s)|\,z(s)\,ds \right|^2 dt \le \chi^2 \int_a^b |z(s)|^2\,ds, \tag{24}$$

$$\int_a^b \left| \int_a^b |P(t)p(s)|\,z(s)\,ds \right|^2 dt \le \zeta^2 \int_a^b |z(s)|^2 ds \quad \forall z \in L_2([a,b]), \tag{25}$$

у яких існування мінімальних додатних констант ν, χ та ζ випливає із наведених вище умов.

На основі нерівностей (4), (23) – (25) неважко встановити, що оператор

$$(\Omega y)(t) = \int_a^b M(t,s)y(s)\,ds + \varepsilon\int_a^b Q(t,s)F(s,y(s))\,ds + \varepsilon\int_a^b P(t)J(s,y(s))\,ds \tag{26}$$

задовольняє умову Ліпшиця, тобто

$$\| \Omega y - \Omega z \| \leq \rho \| y - z \| \quad \forall \{y,z\} \subset L_2([a,b]), \tag{27}$$

де

$$\rho = \nu + \varepsilon(\chi + \zeta). \tag{28}$$

Справді, врахувавши вигляд оператора Ω (26), одержимо

$$\| \Omega y - \Omega z \| \leq \left(\int_a^b \left| \int_a^b M(t,s)(y(s)-z(s))\,ds \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \varepsilon \left(\int_a^b \left| \int_a^b Q(t,s)(F(s,y(s)) - F(s,z(s)))ds \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \varepsilon \left(\int_a^b \left| \int_a^b P(t)(J(s,y(s)) - J(s,z(s)))\,ds \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{29}$$

а використавши формули (4), (23) – (25), неважко встановити нерівності

$$\int_a^b \left| \int_a^b M(t,s)(y(s)-z(s))\,ds \right|^2 dt \leq \nu^2 \int_a^b |y(s)-z(s)|^2\,ds, \tag{30}$$

$$\int_a^b \left| \int_a^b Q(t,s)(F(s,y(s)) - F(s,z(s)))\,ds \right|^2 dt \leq \chi^2 \int_a^b |y(s)-z(s)|^2\,ds, \tag{31}$$

$$\int_a^b \left| \int_a^b P(t)(J(s,y(s)) - J(s,z(s)))\,ds \right|^2 dt \leq \zeta^2 \int_a^b |y(s)-z(s)|^2\,ds. \tag{32}$$

Із співвідношень (29) – (32) очевидним чином випливає нерівність (27).

Як відомо, за умови $\rho < 1$ оператор Ω (26) є оператором стиску, отже, рівняння (17) має єдиний розв'язок, а згідно з теоремою 1 задача (1) – (3) за цієї умови має єдиний розв'язок, який можна побудувати методом послідовних наближень.

Зазначимо, що за відомим розв'язком $y(t)$ рівняння (17) керування $u(t)$ обчислюється за формулою (21).

Проілюструємо теоретичні висновки на простому прикладі

$$y(t) = u(t) - \sqrt{t} + \int_0^1 \left(4\sqrt{ts} + 21\right) y(s)\, ds + \varepsilon \int_0^1 (\sqrt{t}s + 5) \cos(\pi(1 - 2\sqrt{s}y(s)))\, ds, \qquad (33)$$

$$\int_0^1 5ty(t)\, dt = 2 + \varepsilon \int_0^1 \sin(2\pi\sqrt{t}y(t))\, dt, \quad u(t) = 2\lambda, \quad t \in [0, 1]. \qquad (34)$$

У даному прикладі

$$f(t) = -\sqrt{t}, \quad C(t) = 2, \quad S(t) = 5t, \quad K(t,s) = 4\sqrt{ts} + 21, \quad H(t,s) = \sqrt{t}s + 5,$$

$$F(s,\xi) = \cos(\pi(1 - 2\sqrt{s}\xi)), \quad J(t,\xi) = \sin(2\pi\sqrt{t}\xi), \quad \alpha = 2.$$

Зведемо задачу (33), (34) до інтегрального рівняння. Для цього використаємо допоміжну задачу

$$y(t) = u(t) + z(t) + \varepsilon w(t), \quad \int_0^1 5ty(t)\, dt = 2 + \varepsilon\beta, \quad u(t) = 2\lambda, \qquad (35)$$

яка має єдиний розв'язок, оскільки тут $D = 5$. Розв'язавши задачу (36), отримаємо

$$y(t) = \frac{4}{5} + z(t) - \int_0^1 2sz(s)\, ds + \varepsilon \left(\frac{2}{5}\beta + w(t) - \int_0^1 2sw(s)\, ds \right), \qquad (36)$$

$$u(t) = \frac{4}{5} - \int_0^1 2sz(s)\, ds + \varepsilon \left(\frac{2}{5}\beta - \int_0^1 2sw(s)\, ds \right). \qquad (37)$$

Поклавши тепер у формулах (36), (37)

$$z(t) = -\sqrt{t} + \int_0^1 \left(4\sqrt{ts} + 21\right) y(s)\, ds, \qquad (38)$$

$$w(t) = \int_0^1 (\sqrt{t}s + 5)\cos(\pi(1 - 2\sqrt{s}y(s)))\, ds, \tag{39}$$

$$\beta = \int_0^1 \sin(2\pi\sqrt{t}y(t))\, dt \tag{40}$$

і виконавши нескладні обчислення, будемо мати

$$y(t) = \frac{8}{5} - \sqrt{t} + \int_0^1 \left(4\sqrt{ts} - \frac{16}{5}\sqrt{s}\right) y(s)\, ds +$$
$$+ \varepsilon\left(\int_0^1 \left(\sqrt{t}s - \frac{4}{5}s\right)\cos(\pi(1 - 2\sqrt{s}y(s)))\, ds + \int_0^1 \frac{2}{5}\sin(2\pi\sqrt{t}y(t))\, ds\right), \tag{41}$$

$$u(t) = \frac{8}{5} - \int_0^1 \left(\frac{16}{5}\sqrt{s} + 21\right) y(s)\, ds +$$
$$+ \varepsilon\left(\int_0^1 \left(\frac{4}{5}s + 5\right)\cos(\pi(1 - 2\sqrt{s}y(s)))\, ds + \int_0^1 \frac{2}{5}\sin(2\pi\sqrt{t}y(t))\, ds\right). \tag{42}$$

Таким чином, задачу (33), (34) зведено до рівнозначного інтегрального рівняння (41), в якому з урахуванням позначень (11), (18) – (20)

$$h(t) = \frac{4}{5} - \sqrt{t}, \quad M(t,s) = 4\sqrt{ts} - \frac{16}{5}\sqrt{s}, \quad Q(t,s) = \sqrt{t}s - \frac{4}{5}s, \quad P(t) = \frac{2}{5}. \tag{43}$$

Неважко переконатися, виконавши нескладні обчислення, з урахуванням формул (43), що виконуються нерівності (23) – (25), у яких

$$\nu^2 = \frac{44}{75}, \quad \chi^2 = \frac{11}{150}\pi^2, \quad \zeta^2 = \frac{8}{25}\pi^2.$$

Отже, для інтегрального рівняння (41) формула (28) набирає вигляду

$$\rho = \frac{2\sqrt{33}}{15} + \varepsilon\left(\frac{\sqrt{66}}{30} + \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)\pi. \tag{44}$$

Якщо справджується умова

$$\varepsilon < \frac{30 - 4\sqrt{33}}{(\sqrt{66} + 12\sqrt{2})\pi}, \tag{45}$$

то очевидно виконується нерівність $\rho < 1$. Отже, рівняння (41) має єдиний розв'язок, а згідно з теоремою 1 задача (33), (34) при цій умові має єдиний розв'язок, до того ж керування визначається формулою (42).

3. Ітераційний метод. Поряд із задачею встановлення існування розв'язку задачі (1)–(3) важливим є питання відшукання наближених розв'язків. Знаходження таких розв'язків можна проводити за допомогою різноманітних методів, зокрема ітераційних, проекційних та проекційно-ітеративних [2–6]. Нижче висвітлюється суть ітераційного методу.

Нехай наближення $y_{k-1}(t)$, $u_{k-1}(t)$ вже побудовано. Тоді виконуємо ітерації

$$z_k(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s)y_{k-1}(s)\,ds, \tag{46}$$

$$w_k(t) = \int_a^b H(t,s)F(s, y_{k-1}(s))\,ds, \tag{47}$$

$$\beta_k = \int_a^b J\left(s, y_{k-1}(s)\right)\,ds \tag{48}$$

і наступне наближення знаходимо із задачі

$$y_k(t) = u_k(t) + z_k(t) + \varepsilon w_k(t), \quad \int_a^b S(t)y_k(t)\,dt = \alpha + \varepsilon\beta_k, \quad u_k(t) = C(t)\lambda_k. \tag{49}$$

Початкове наближення визначаємо із задачі (49) при $k = 0$, заданих значеннях функцій $z_0(t)$, $w_0(t)$ і параметра β_0.

Використовуючи методику, описану в п. 2, запропонований метод можна звести до ітераційного методу для квазілінійного інтегрального рівняння (17). За припущення, що матриця D невироджена, існує єдиний розв'язок задачі (49) і обчислюється за формулами

$$y_k(t) = r(t) + z_k(t) - \int_a^b R(t,s)z_k(s)\,ds + \varepsilon\left(P(t)\beta_k + w_k(t) - \int_a^b R(t,s)w_k(s)\,dt\right), \tag{50}$$

$$u_k(t) = r(t) - \int_a^b R(t,s)z_k(s)\,ds + \varepsilon P(t)\beta_k - \varepsilon\int_a^b R(t,s)w_k(s)\,dt. \tag{51}$$

На основі формул (46) – (48) і (50), (51), підставивши перші у другі і врахувавши позначення (18) – (20) та (22), отримаємо

$$y_k(t) = h(t) + \int_a^b M(t,s) y_{k-1}(s)\, ds + \varepsilon \int_a^b Q(t,s) F(s, y_{k-1}(s))\, ds + \varepsilon \int_a^b P(t) J(s, y_{k-1}(s))\, ds, \tag{52}$$

$$u_k(t) = g(t) - \int_a^b \Upsilon(t,s) y_{k-1}(s)\, ds + \varepsilon \int_a^b P(t) J(s, y_{k-1}(s))\, ds - \varepsilon \int_a^b \Xi(t,s) F(s, y_{k-1}(s))\, ds. \tag{53}$$

Таким чином, питання збіжності методу (46) – (49) звелося до питання збіжності методу послідовних наближень (52) для інтегрального рівняння (17).

Теорема 2. *Якщо матриця D, яка визначається формулою (8), невироджена і виконується умова $\rho < 1$, де ρ визначається формулою (28), то задача (1) – (3) має єдиний розв'язок $y^*(t)$, $u^*(t)$, послідовність наближених розв'язків $\{y_k(t), u_k(t), k \geq 0\}$, побудована за формулами (52), (53), збігається за нормою в $L_2([a,b])$ до цього розв'язку і правильними є оцінки похибки*

$$\| y^* - y_k \| \leq \rho^k \| y^* - y_0 \|, \tag{54}$$

$$\| y^* - y_k \| \leq \frac{\rho^n}{1-\rho} \| y_{k-n+1} - y_{k-n} \|, \quad 1 \leq n \leq k, \tag{55}$$

$$\| u^* - u_k \| \leq \sigma \| y^* - y_{k-1} \|, \tag{56}$$

де константа σ має вигляд

$$\sigma = \kappa + \varepsilon(\zeta + \tau). \tag{57}$$

Справді, як відомо, за умови $\rho < 1$ існує єдиний розв'язок $y^*(t)$ інтегрального рівняння (17) і послідовність $\{y_k(t), k \geq 0\}$ збігається до цього розв'язку, а також правильними є оцінки (54), (55).

Оцінка (56) безпосередньо випливає із формул (21), (53), нерівностей (25) та

$$\int_a^b \left| \int_a^b \Upsilon(t,s) z(s)\, ds \right|^2 dt \leq \kappa^2 \int_a^b |z(s)|^2\, ds,$$

$$\int_a^b \left| \int_a^b |\Xi(t,s) q(s)|\, z(s)\, ds \right|^2 dt \leq \tau^2 \int_a^b |z(s)|^2\, ds \quad \forall z \in L_2([a,b]),$$

у яких існування мінімальних додатних констант κ і τ випливає, з урахуванням позначення (22), з наведених на початку статті умов.

Проілюструємо застосування ітераційного методу (46) – (49) до задачі (33), (34). У даному випадку наближені розв'язки знаходимо із задачі

$$y_k(t) = u_k(t) + z_k(t) + \varepsilon w_k(t), \quad \int_0^1 5ty_k(t)dt = 2 + \varepsilon\beta_k, \quad u_k(t) = 2\lambda_k, \tag{58}$$

в якій

$$z_k(t) = -\sqrt{t} + \int_0^1 \left(4\sqrt{ts} + 21\right) y_{k-1}(s)\, ds, \tag{59}$$

$$w_k(t) = \int_0^1 (\sqrt{t}s + 5)\cos(\pi(1 - 2\sqrt{s}y_{k-1}(s)))\, ds, \tag{60}$$

$$\beta_k = \int_0^1 \sin(2\pi\sqrt{t}y_{k-1}(t))\, dt. \tag{61}$$

Покладемо $\varepsilon = 10^{-2}$ і зазначимо, що в цьому випадку умова (45) виконується, а використавши формулу (44), одержимо $\rho = 0,7922\ldots$, тобто задача (33), (34) має єдиний розв'язок

$$y^*(t) = \sqrt{t}, \quad u^*(t) = -14, \tag{62}$$

в чому можна переконатися, виконавши відповідні обчислення.

Нехай $y_0(t) = 1,6 - \sqrt{t}$. Цю функцію можна отримати, якщо розв'язати задачу (58) при $k = 0$, $z_0(t) = -\sqrt{t}$, $w_0(t) = 0$ та $\beta_0 = 0$. Тоді, підрахувавши першу ітерацію за формулами (59) – (61), одержимо

$$z_1(t) = 1,26667\sqrt{t} + 19,6, \quad w_1(t) = 3,54943 + 0,36219\sqrt{t}, \quad \beta_1 = -0,14539,$$

і розв'язавши задачу

$$y_1(t) = u_1(t) + 1,26667\sqrt{t} + 19,6 + 10^{-2}(3,54943 + 0,36219\sqrt{t}),$$

$$\int_0^1 5ty_1(t)\, dt = 2 - 0,00145, \quad u_1(t) = 2\lambda_1,$$

знайдемо перше наближення

$$y_1(t) = 1,27029\sqrt{t} - 0,22454, \quad u_1(t) = -19,86003. \tag{63}$$

Продовжуючи цей процес далі, можна отримати друге і вищі наближення, зокрема

$$y_2(t) = 0,94147\sqrt{t} + 0,04742, \quad u_2(t) = -13,01654, \tag{64}$$

$$y_3(t) = 1,00947\sqrt{t} - 0,00774, \quad u_3(t) = -14,18516. \tag{65}$$

Щоб оцінити, наскільки відхиляються побудовані наближення від точного розв'язку задачі (33), (34), слід порівняти формули (62) – (65).

1. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 319 с.
2. *Лучка А. Ю.* Интегральные уравнения с ограничениями и методы их решения // Кибернетика и систем. анализ. — 1996. — № 3. — С. 82 – 96.
3. *Лучка А. Ю.* Методи розв'язання рівнянь з обмеженнями і проекційно-ітеративний метод Ю. Д. Соколова // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 11. — С. 1501 – 1509.
4. *Ковтун О. І.* Проекційно-ітеративні методи для інтегральних рівнянь зі слабкою нелінійністю і додатковими умовами // Нелінійні коливання. — 2000. — **3**, № 3. — С. 365 – 374.
5. *Лучка А. Ю., Кучерук Т. А.* Ітераційний метод побудови розв'язків лінійних рівнянь з обмеженнями // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 4. — С. 472 – 482.
6. *Лучка А. Ю., Вознюк О. М.* Ітераційний метод для інтегральних рівнянь з обмеженнями // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 2. — С. 179 – 192.

Одержано 03.09.10,
після доопрацювання — 09.03.11