УДК 517.929

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

І. І. Клевчук

Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича
Україна, 58012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2

We use the second approximation in the averaging method to study stability of a system of weakly coupled oscillators with time delay. A sufficient stability (instability) condition is obtained for a linear system of differential-difference equations.

Второе приближение в методе усреднения применено к исследованию устойчивости системы слабосвязанных осцилляторов с запаздыванием. Получено достаточное условие устойчивости (неустойчивости) линейной системы дифференциально-разностных уравнений.

Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x, x(t - \Delta)), \tag{1}$$

де ε — малий додатний параметр, $x \in \mathbb{R}^n$, функція $X(t, x, y)$ тричі неперервно диференційовна за всіма змінними.

Нехай

$$X(t, x, x) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} X_\nu(x).$$

Тоді усереднена система для (1) набере вигляду

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(x),$$

де $X_0(x)$ — середнє значення функції $X(t, x, x)$ за змінною t, $X_0(x) = M\{X(t, x, x)\}$. У статті Хейла [1] доведено узагальнення другої теореми Боголюбова про усереднення для системи вигляду (1). У цій статті ми побудуємо друге наближення в методі усереднення і застосуємо його до дослідження стійкості розв'язків лінійної системи.

У системі (1) виконаємо заміну $x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi)$, де

$$\tilde{X}(t, \xi) = \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} X_\nu(\xi).$$

Врахувавши, що

$$\frac{\partial \tilde{X}(t, x)}{\partial t} = X(t, x, x) - X_0(x),$$

одержимо систему

$$\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon X(t,\xi,\xi) - \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t,\xi)}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt} =$$
$$= \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}(t,\xi), \xi(t-\Delta) + \varepsilon \tilde{X}(t-\Delta, \xi(t-\Delta))). \qquad (2)$$

Оскільки, згідно з [1],

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + O(\varepsilon^2),$$

то

$$\xi(t-\Delta) = \xi(t) - \Delta\frac{d\xi}{dt} + O(\varepsilon^2) = \xi(t) - \varepsilon\Delta X_0(\xi) + O(\varepsilon^2).$$

Тому

$$X(t, \xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi), \xi(t-\Delta) + \varepsilon\tilde{X}(t-\Delta, \xi(t-\Delta))) =$$
$$= X(t,\xi,\xi) + \varepsilon Y(t,\xi)\tilde{X}(t,\xi) + \varepsilon Z(t,\xi)[\tilde{X}(t-\Delta,\xi) - \Delta X_0(\xi)] + O(\varepsilon^2),$$

де

$$Y(t,\xi) = \left.\frac{\partial X(t,x,\xi)}{\partial x}\right|_{x=\xi}, \quad Z(t,\xi) = \left.\frac{\partial X(t,\xi,y)}{\partial y}\right|_{y=\xi}.$$

Отже, система (2) набере вигляду

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) - \varepsilon^2\frac{\partial\tilde{X}(t,\xi)}{\partial\xi}X_0(\xi) + \varepsilon^2 Y(t,\xi)\tilde{X}(t,\xi) +$$
$$+ \varepsilon^2 Z(t,\xi)[\tilde{X}(t-\Delta,\xi) - \Delta X_0(\xi)] + O(\varepsilon^3). \qquad (3)$$

Система (3) — це система звичайних диференціальних рівнянь, права частина якої записана з точністю до $O(\varepsilon^3)$. Тому, згідно з [2, 3], рівняння другого наближення в методі усереднення для системи (3) наберуть вигляду

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 M\{Y(t,\xi)\tilde{X}(t,\xi) + Z(t,\xi)[\tilde{X}(t-\Delta,\xi) - \Delta X_0(\xi)]\}.$$

Розглянемо систему слабкозв'язаних осциляторів із запізненням

$$y'' + L^2 y + \varepsilon P(t) y(t-h) = 0, \qquad (4)$$

де ε — малий додатний параметр, $y = (y_1, \ldots, y_q)^T$, L — діагональна матриця з додатними різними діагональними елементами, $L = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$, $\lambda_s > 0$, $\lambda_k \neq \lambda_s$ при $k \neq s$, $h > 0$, $P(t)$ — матриця з елементами

$$P_{js}(t) = \sum_{m=1}^{n}\left(b_{jsm}e^{ia_m t} + \bar{b}_{jsm}e^{-ia_m t}\right), \quad b_{jsm} \in \mathbb{C}, \quad a_m \geq 0. \qquad (5)$$

Стійкість розв'язків диференціально-функціональних рівнянь у критичному випадку вивчалась у багатьох роботах (див., наприклад, [4–6]). Далі використаємо методику з цих робіт і знайдемо умови стійкості системи (4) в термінах її коефіцієнтів.

Систему (4) перепишемо у вигляді

$$y_j'' = -\lambda_j^2 y_j - \varepsilon \sum_{s=1}^{q} P_{js}(t) y_s(t-h), \quad j \in \{1, \ldots, q\}.$$

Позначимо $z_j = y_j'/\lambda_j$, тоді одержимо систему

$$y_j' = \lambda_j z_j, \quad z_j' = -\lambda_j y_j - \frac{\varepsilon}{\lambda_j} \sum_{s=1}^{q} P_{js}(t) y_s(t-h).$$

Перейдемо до комплексних змінних $u_j = y_j + iz_j$, тоді

$$u_j' = -i\lambda_j u_j - \frac{\varepsilon i}{2\lambda_j} \sum_{s=1}^{q} P_{js}(t)(u_s(t-h) + \bar{u}_s(t-h)).$$

Виконавши заміну $u_j = x_j \exp(-i\lambda_j t)$, одержимо систему в стандартній формі

$$x' = \varepsilon F(t) x(t-h) + \varepsilon G(t) \bar{x}(t-h), \tag{6}$$

де $x = (x_1, \ldots, x_q)^T$, $F(t)$ та $G(t)$ — матриці з елементами

$$F_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} P_{js}(t) e^{i(\lambda_j - \lambda_s)t} e^{i\lambda_s h}, \quad G_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} P_{js}(t) e^{i(\lambda_j + \lambda_s)t} e^{-i\lambda_s h} \tag{7}$$

відповідно.

Підставляючи (5) у (7), одержуємо

$$F_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} e^{i\lambda_s h} \sum_{m=1}^{n} (b_{jsm} e^{i(\lambda_j - \lambda_s + a_m)t} + \bar{b}_{jsm} e^{i(\lambda_j - \lambda_s - a_m)t}),$$

$$G_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} e^{-i\lambda_s h} \sum_{m=1}^{n} (b_{jsm} e^{i(\lambda_j + \lambda_s + a_m)t} + \bar{b}_{jsm} e^{i(\lambda_j + \lambda_s - a_m)t}).$$

Позначимо $c_j = b_{jj1} + \bar{b}_{jj1}$.

Теорема 1. *Нехай $a_1 = 0$, $a_m > 0$ при $m \geq 2$ і відсутній резонанс, тобто $\lambda_j - \lambda_s + a_m \neq \neq 0$ при $|j-s| + |m-1| > 0$, $\lambda_j + \lambda_s - a_m \neq 0$ для всіх j, s, m. Тоді нульовий розв'язок системи (4) асимптотично стійкий, якщо $c_j \sin(\lambda_j h) < 0$ при $j \in \{1, \ldots, q\}$, і нестійкий, якщо $c_j \sin(\lambda_j h) \neq 0$ для всіх j та існує k, для якого $c_k \sin(\lambda_k h) > 0$.*

Доведення. Стійкість розв'язків системи (4) рівносильна стійкості розв'язків системи (6). Оскільки середнє значення функції $e^{i\alpha t}$ дорівнює нулю при $\alpha \neq 0$, то при виконанні умов теореми середні значення всіх елементів матриці $G(t)$ та всіх позадіагональних елементів матриці $F(t)$ дорівнюють нулеві. Тому усереднена система для системи (6) матиме вигляд $x' = \varepsilon A x$, де $A = \operatorname{diag}\{\gamma_1, \ldots, \gamma_q\}$, $\gamma_j = -i \exp(i\lambda_j h) c_j/(2\lambda_j) =$

$= (c_j \sin(\lambda_j h) - i c_j \cos(\lambda_j h))/(2\lambda_j)$, $j \in \{1, \ldots, q\}$. Із теореми Хейла [1] випливає, що якщо нульовий розв'язок усередненої системи асимптотично стійкий (нестійкий), то і нульовий розв'язок системи (6) буде відповідно асимптотично стійким (нестійким).

Теорему доведено.

Нехай тепер $a_m > 0$ для всіх m. Тоді перше наближення в методі усереднення не дає відповіді на питання про стійкість.

Позначимо $d_s = \mathrm{Re}\,\{\delta_s\}$,

$$\delta_s = \sum_{k=1}^{q}\sum_{m=1}^{n}\Big(\frac{b_{skm}\bar{b}_{ksm}\exp(i(2\lambda_s + a_m)h)}{i(\lambda_k - \lambda_s - a_m)(\lambda_s + \lambda_k + a_m)} + \frac{\bar{b}_{skm}b_{ksm}\exp(i(2\lambda_s - a_m)h)}{i(\lambda_k - \lambda_s + a_m)(\lambda_s + \lambda_k - a_m)}\Big).$$

У випадку симетричної матриці $P(t)$ маємо $b_{ksm} = b_{skm}$, отже,

$$d_s = \sum_{k=1}^{q}\sum_{m=1}^{n}|b_{skm}|^2\left(\frac{\sin((2\lambda_s + a_m)h)}{(\lambda_k - \lambda_s - a_m)(\lambda_s + \lambda_k + a_m)} + \frac{\sin((2\lambda_s - a_m)h)}{(\lambda_k - \lambda_s + a_m)(\lambda_s + \lambda_k - a_m)}\right).$$

Теорема 2. *Нехай $a_m > 0$ для всіх m і відсутній резонанс, тобто $\lambda_j - \lambda_s + a_m - a_k \neq 0$ при $|j - s| + |m - k| > 0$, $\lambda_j + \lambda_s - a_m \neq 0$, $\lambda_j - \lambda_s + a_m \neq 0$, $\lambda_j + \lambda_s + a_m - a_k \neq 0$, $\lambda_j + \lambda_s - a_m - a_k \neq 0$, $\lambda_j - \lambda_s + a_m + a_k \neq 0$ для всіх j, s, m, k. Тоді нульовий розв'язок системи (4) асимптотично стійкий, якщо $d_s > 0$ при $s \in \{1, \ldots, q\}$, і нестійкий, якщо $d_s \neq 0$ для всіх s та існує k, для якого $d_k < 0$.*

Доведення. У системі (6) виконаємо заміну $x(t) = \xi(t) + \varepsilon\tilde{F}(t)\xi(t) + \varepsilon\tilde{G}(t)\bar{\xi}(t)$, де $\tilde{F}(t)$ та $\tilde{G}(t)$ — матриці з елементами

$$\tilde{F}_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j}e^{i\lambda_s h}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{b_{jsm}}{i(\lambda_j - \lambda_s + a_m)}e^{i(\lambda_j - \lambda_s + a_m)t}\frac{\bar{b}_{jsm}}{i(\lambda_j - \lambda_s - a_m)}e^{i(\lambda_j - \lambda_s - a_m)t}\right),$$

$$\tilde{G}_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j}e^{-i\lambda_s h}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{b_{jsm}}{i(\lambda_j + \lambda_s + a_m)}e^{i(\lambda_j + \lambda_s + a_m)t}\frac{\bar{b}_{jsm}}{i(\lambda_j + \lambda_s - a_m)}e^{i(\lambda_j + \lambda_s - a_m)t}\right).$$

Тоді $x(t-h) = \xi - h\xi' + \varepsilon\tilde{F}(t-h)\xi(t) + \varepsilon\tilde{G}(t-h)\bar{\xi}(t) + O(\varepsilon^2) = \xi + \varepsilon\tilde{F}(t-h)\xi(t) + \varepsilon\tilde{G}(t-h)\bar{\xi}(t) + O(\varepsilon^2)$, оскільки $\xi' = O(\varepsilon^2)$.

Підставляючи в систему (6), одержуємо

$$\xi' + \varepsilon F(t)\xi + \varepsilon\tilde{F}(t)\xi' + \varepsilon G(t)\bar{\xi} + \varepsilon\tilde{G}(t)\bar{\xi}' = \varepsilon F(t)\xi + \varepsilon^2 F(t)\tilde{F}(t-h)\xi +$$

$$+ \varepsilon^2 F(t)\tilde{G}(t-h)\bar{\xi} + \varepsilon G(t)\bar{\xi} + \varepsilon^2 G(t)\bar{\tilde{F}}(t-h)\bar{\xi} + \varepsilon^2 G(t)\bar{\tilde{G}}(t-h)\xi + O(\varepsilon^3),$$

або

$$\xi' = \varepsilon^2 F(t)\tilde{F}(t-h)\xi + \varepsilon^2 F(t)\tilde{G}(t-h)\bar{\xi} + \varepsilon^2 G(t)\bar{\tilde{F}}(t-h)\bar{\xi} + \varepsilon^2 G(t)\bar{\tilde{G}}(t-h)\xi + O(\varepsilon^3). \quad (8)$$

У системі (8) можна ще раз застосувати метод усереднення [1, 2] і одержати усереднену систему

$$\xi' = \varepsilon^2 M\{F(t)\tilde{F}(t-h)\}\xi + \varepsilon^2 M\{F(t)\tilde{G}(t-h)\}\bar{\xi} + \varepsilon^2 M\{G(t)\bar{\tilde{F}}(t-h)\}\bar{\xi} + \varepsilon^2 M\{G(t)\bar{\tilde{G}}(t-h)\}\xi.$$

Позначимо через $f_{ss}(t)$ та $g_{ss}(t)$ діагональні елементи матриць $F(t)\tilde{F}(t-h)$ та $G(t)\bar{\tilde{G}}(t-$ $-h)$ відповідно і знайдемо їх середні значення:

$$M\{f_{ss}(t)\} = M\left\{\sum_{k=1}^{q} F_{sk}(t)\tilde{F}_{ks}(t-h)\right\} =$$

$$= M\left\{\frac{i}{2\lambda_s}\sum_{k=1}^{q} e^{i\lambda_k h}\sum_{m=1}^{n}\left(b_{skm}e^{i(\lambda_s-\lambda_k+a_m)t} + \bar{b}_{skm}e^{i(\lambda_s-\lambda_k-a_m)t}\right)\frac{i}{2\lambda_k}e^{i\lambda_s h} \times\right.$$

$$\left.\times \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{b_{ksm}}{i(\lambda_k-\lambda_s+a_m)}\, e^{i(\lambda_k-\lambda_s+a_m)(t-h)} + \frac{\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_k-\lambda_s-a_m)}\, e^{i(\lambda_k-\lambda_s-a_m)(t-h)}\right)\right\} =$$

$$= M\left\{-\frac{1}{2\lambda_s}e^{i\lambda_s h}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2\lambda_k}\, e^{i\lambda_k h}\sum_{m=1}^{n}\left(b_{skm}e^{ia_m t} + \bar{b}_{skm}e^{-ia_m t}\right) \times\right.$$

$$\left.\times \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{b_{ksm}}{i(\lambda_k-\lambda_s+a_m)}\, e^{ia_m t}\, e^{i(\lambda_s-\lambda_k-a_m)h} + \frac{\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_k-\lambda_s-a_m)}\, e^{-ia_m t}\, e^{i(\lambda_s-\lambda_k+a_m)h}\right)\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2\lambda_s}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2\lambda_k}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{b_{skm}\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_k-\lambda_s-a_m)}e^{i(2\lambda_s+a_m)h} + \frac{\bar{b}_{skm}b_{ksm}}{i(\lambda_k-\lambda_s+a_m)}\, e^{i(2\lambda_s-a_m)h}\right),$$

$$M\{g_{ss}(t)\} = M\left\{\sum_{k=1}^{q} G_{sk}(t)\bar{\tilde{G}}_{ks}(t-h)\right\} =$$

$$= M\,\{\frac{i}{2\lambda_s}\sum_{k=1}^{q} e^{-i\lambda_k h}\sum_{m=1}^{n}\left(b_{skm}e^{i(\lambda_s+\lambda_k+a_m)t} + \bar{b}_{skm}e^{i(\lambda_s+\lambda_k-a_m)t}\right) \times$$

$$\times \frac{i}{2\lambda_k}\, e^{i\lambda_s h}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_s+\lambda_k+a_m)}\, e^{-i(\lambda_s+\lambda_k+a_m)(t-h)} +\right.$$

$$\left.+\ \frac{b_{ksm}}{i(\lambda_s+\lambda_k-a_m)}\, e^{-i(\lambda_s+\lambda_k-a_m)(t-h)}\right)\Bigg\} =$$

$$= M\left\{-\frac{1}{2\lambda_s}e^{i\lambda_s h}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2\lambda_k}e^{-i\lambda_k h}\sum_{m=1}^{n}(b_{skm}e^{ia_m t} + \bar{b}_{skm}e^{-ia_m t}) \times\right.$$

$$\left.\times \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_s+\lambda_k+a_m)}e^{-ia_m t}e^{i(\lambda_s+\lambda_k+a_m)h} + \frac{b_{ksm}}{i(\lambda_s+\lambda_k-a_m)}e^{ia_m t}e^{i(\lambda_s+\lambda_k-a_m)h}\right)\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2\lambda_s}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2\lambda_k}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{b_{skm}\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_s+\lambda_k+a_m)}e^{i(2\lambda_s+a_m)h} + \frac{\bar{b}_{skm}b_{ksm}}{i(\lambda_s+\lambda_k-a_m)}e^{i(2\lambda_s-a_m)h}\right).$$

Отже,

$$M\{f_{ss}(t)\} + M\{g_{ss}(t)\} = -\frac{\delta_s}{2\lambda_s}.$$

Якщо відсутній резонанс, то середні значення всіх елементів матриць $F(t)\tilde{G}(t-h)$, $G(t)\bar{\tilde{F}}(t-h)$, а також всіх позадіагональних елементів матриць $F(t)\tilde{F}(t-h)$ та $G(t)\bar{\tilde{G}}(t-h)$ дорівнюють нулю, отже, за допомогою лінійної заміни систему (8) можна звести до системи $\xi' = \varepsilon^2 D\xi + O(\varepsilon^3)$, де $D = \operatorname{diag}\{-\delta_1/(2\lambda_1), \ldots, -\delta_q/(2\lambda_q)\}$. Якщо $d_s = \operatorname{Re}\{\delta_s\} > 0$ при $s \in \{1,\ldots,q\}$, то, згідно з [1], нульовий розв'язок системи (4) асимптотично стійкий, а якщо $d_s \neq 0$ при $s \in \{1,\ldots,q\}$, але існує k, для якого $d_k < 0$, то нульовий розв'язок системи (4) нестійкий.

Теорему доведено.

Зауваження. Теореми 1 і 2 про нестійкість правильні й без припущення про відмінність від нуля величин $c_j \sin(\lambda_j h)$ та d_s. Це можна показати, виконавши в системі (8) лінійну заміну і використавши схему доведення теореми про стійкість за першим наближенням [7].

Розглянемо систему

$$x' = \varepsilon F(t)\, x(t-h), \tag{9}$$

де ε — малий додатний параметр, $h > 0$, $x \in \mathbb{R}^p$, $F(t) = \sum_{m=1}^{n}(A_m e^{ib_m t} + \overline{A}_m e^{-ib_m t})$, b_m — дійсні додатні різні числа, A_m — матриці з комплексними елементами.

У системі (9) виконаємо заміну $x(t) = \xi(t) + \varepsilon\tilde{F}(t)\xi(t)$, де

$$\tilde{F}(t) = \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{ib_m} A_m e^{ib_m t} - -\frac{1}{ib_m}\overline{A}_m e^{-ib_m t}\right).$$

Тоді $x(t-h) = \xi - h\xi' + \varepsilon\tilde{F}(t-h)\xi + O(\varepsilon^2) = \xi + \varepsilon\tilde{F}(t-h)\xi + O(\varepsilon^2,)$ оскільки $\xi' = O(\varepsilon^2)$. Підставляючи в систему (9), одержуємо

$$\xi' + \varepsilon F(t)\xi + \varepsilon\tilde{F}(t)\xi' = \varepsilon F(t)\xi + \varepsilon^2 F(t)\tilde{F}(t-h)\xi + O(\varepsilon^3),$$

або

$$\xi' = \varepsilon^2 F(t)\tilde{F}(t-h)\xi + O(\varepsilon^3). \tag{10}$$

У системі (10) можна ще раз застосувати метод усереднення [3] і одержати усереднену систему $\xi' = \varepsilon^2 B\xi$, де $B = -\sum_{m=1}^{n}\dfrac{1}{b_m}\sin(b_m h)(A_m\overline{A}_m + \overline{A}_m A_m)$.

Теорема 3. *Якщо всі власні значення матриці B мають від'ємні дійсні частини, то система (9) асимптотично стійка, а якщо існує власне значення матриці B з додатною дійсною частиною, то система (9) нестійка.*

Доведення теореми випливає з теореми Хейла про усереднення [1]. Якщо існують власні значення матриці B з нульовою та додатною дійсними частинами, то треба використати схему доведення теореми про стійкість за першим наближенням.

Як приклад розглянемо рівняння

$$x' = 2\varepsilon \cos t\, x(t-h). \tag{11}$$

Застосувавши схему доведення теореми 3, одержимо усереднене рівняння $\xi' = \varepsilon^2 B\xi$, де $B = -2\sin h$. Отже, рівняння (11) буде асимптотично стійким при $\sin h > 0$ і нестійким при $\sin h < 0$.

1. *Hale J. K.* Averaging methods for differential equations with retarded arguments and a small parameter // J. Different. Equat. — 1966.— **2**, № 1. — P. 57 – 73.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 502 с.
3. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
4. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.
5. *Фодчук В. I., Клевчук I. I.* Розщеплення лінійних диференціально-функціональних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А.— 1986. — № 8. — С. 23 – 25.
6. *Клевчук И. И.* О принципе сведения для дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Дифференц. уравнения. — 1999. — **35**, № 4. — С. 464 – 472.
7. *Гермаидзе В. Е.* Об асимптотической устойчивости систем с запаздывающим аргументом // Успехи мат. наук.— 1959. — **14**, вып. 4. — С. 149 – 156.

Одержано — 22.03.10,
після доопрацювання — 16.11.10