УДК 517.925

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. А. Козьма

Одес. гос. эконом. ун-т
Украина, 65026, Одесса, ул. Преображенская, 8
e-mail: sanjakos@ukr.net

For an ordinary second order differential equation containing, in the right-hand side, a sum of terms with nonlinearities that regularly vary with respect to the unknown function and its derivatives, we find necessary and sufficient conditions for existence of a broad class of monotone solutions, together with exact asymptotic representations of solutions in this class in a neighborhood of the singular point.

Для звичайного диференціального рівняння другого порядку, яке містить у правій частині суму доданків з правильно мінливими відносно невідомої функції та її похідної першого порядку нелінійностями, встановлено необхідні та достатні умови існування широкого класу монотонних розв'язків, а також точні асимптотичні зображення для розв'язків з цього класу в околі особливої точки.

1. Постановка задачи. Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t)[1 + r_i(t)]\varphi_{i0}(y)\varphi_{i1}(y'), \tag{1.1}$$

в котором $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, \ldots, m$, $p_i : [a, \omega) \to (0, +\infty)$, $i = 1, \ldots, m$, $-\infty < a < \omega \le +\infty$[1], — непрерывно дифференцируемые функции, $r_i : [a, \omega) \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_i(t) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.2}$$

$\varphi_{ik} : \Delta_k \to (0, +\infty)$, $k = 0, 1$, $i = 1, \ldots, m$, — непрерывно дифференцируемые функции,

$$\Delta_k = \begin{cases} \text{либо} & [y_k, Y_k), \\ \text{либо} & (Y_k, y_k], \end{cases} \quad y_k \in \mathbb{R}, \quad Y_k = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & \pm\infty, \end{cases} \quad k = 0, 1^2, \tag{1.3}$$

причем φ_{ik} такие, что при $k = 0, 1$, $i = 1, \ldots, m$

$$\lim_{\substack{z \to Y_k \\ z \in \Delta_k}} \varphi_{ik}(z) = \varphi_{ik}^0, \quad 0 \le \varphi_{ik}^0 \le +\infty \tag{1.4}$$

[1] При $\omega = +\infty$ считаем, что $a > 0$.
[2] При $Y_k = +\infty$ ($Y_k = -\infty$) считаем, что $y_k > 0$ ($y_k < 0$).

и

$$\lim_{\substack{z\to Y_k\\ z\in\Delta_k}} \frac{z\varphi'_{ik}(z)}{\varphi_{ik}(z)} = \sigma_{ik} = \text{const}. \tag{1.5}$$

Положим

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при} \quad \omega = +\infty, \\ t-\omega & \text{при} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

Определение 1.1. *Решение y уравнения (1.1), заданное на промежутке $[t_0,\omega) \subset [a,\omega)$, будем называть $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$-решением, где $-\infty \le \mu_0 \le +\infty$, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

$$y^{(k)} : [t_0,\omega) \to \Delta_k, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = Y_k, \quad k = 0,1, \tag{1.6}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \mu_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y''(t)y(t)}{[y'(t)]^2} = 1 \quad \textit{при} \quad \mu_0 = \pm\infty. \tag{1.7}$$

В настоящей работе для $\mu_0 \in \mathbb{R}$ приведены условия, при выполнении которых на любом $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$-решении уравнения (1.1) правая его часть асимптотически эквивалентна одному слагаемому. При выполнении этих условий в случае $\mu_0 \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$ установлены необходимые и достаточные признаки существования $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$-решений, а также получены асимптотические представления для таких решений и их производных первого порядка при $t \uparrow \omega$. Аналогичные результаты при более жестких условиях на функции φ_{ik}, $k = 0,1$, $i = 1,\dots,m$, содержатся в работах [1–3].

Отметим, что признаки существования и асимптотика $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$-решений уравнения (1.1) при $\varphi_{i1} \equiv 1$ были указаны В. М. Евтуховым и В. А. Касьяновой в [4, 5], а при $m = 1$ — В. М. Евтуховым и М. А. Белозеровой в [6, 7].

2. Некоторые априорные свойства $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$-решений. Обозначим $M = \{1,\dots,m\}$ и покажем, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $\mu_0 \in \mathbb{R}$ и для некоторых $i \in M$ и $j \in M\setminus\{i\}$ выполняется условие*

$$\limsup_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p_i(t)}\right] < \xi^0_{ij}, \tag{2.1}$$

где

$$\xi^0_{ij} \operatorname{sign} \pi_\omega(t) = (1+\mu_0)(\sigma_{i0}-\sigma_{j0}) + \mu_0(\sigma_{i1}-\sigma_{j1}).$$

Тогда для каждого $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$-решения уравнения (1.1) выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_j(t)\varphi_{j0}(y(t))\varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t)\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))} = 0. \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть $y : [t_0, \omega) \to \Delta_0$ — произвольное $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-решение уравнения (1.1). Обозначим

$$z_j(t) = \frac{p_j(t)\varphi_{j0}(y(t))\varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t)\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))},$$

тогда

$$z_j'(t) = z_j(t)\left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)} + \frac{y'(t)\varphi_{j0}'(y(t))}{\varphi_{j0}(y(t))} + \frac{y''(t)\varphi_{j1}'(y'(t))}{\varphi_{j1}(y'(t))} - \frac{y'(t)\varphi_{i0}'(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))} - \frac{y''(t)\varphi_{i1}'(y'(t))}{\varphi_{i1}(y'(t))}\right].$$

Запишем последнее соотношение в виде

$$z_j'(t) = \frac{z_j(t)}{|\pi_\omega(t)|}\left[\frac{|\pi_\omega(t)|p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|p_i'(t)}{p_i(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|y'(t)}{y(t)} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{y(t)\varphi_{i0}'(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))} - \frac{y(t)\varphi_{j0}'(y(t))}{\varphi_{j0}(y(t))}\right) - \frac{|\pi_\omega(t)|y''(t)}{y'(t)}\left(\frac{y'(t)\varphi_{i1}'(y'(t))}{\varphi_{i1}(y'(t))} - \frac{y'(t)\varphi_{j1}'(y'(t))}{\varphi_{j1}(y'(t))}\right)\right].$$

В силу условий (1.5), (1.6)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y^{(k)}(t)\varphi_{lk}'(y^{(k)}(t))}{\varphi_{lk}(y^{(k)}(t))} = \sigma_{lk}, \quad k = 0, 1, \quad l = 1, \ldots, m. \tag{2.3}$$

Кроме того, согласно условию (1.7) и результатам работ [4, 5] имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y^{(k+1)}(t)}{y^{(k)}(t)} = 1 - k + \mu_0, \quad k = 0, 1. \tag{2.4}$$

Из (2.1), (2.3) и (2.4) вытекает существование постоянных $z_j^0 < 0$ и $t_1 \in [t_0, \omega)$ таких, что выполняется неравенство

$$z_j'(t) \le \frac{z_j^0 \cdot z_j(t)}{|\pi_\omega(t)|} \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega),$$

откуда следует, что

$$\ln\left|\frac{z_j(t)}{z_j(t_1)}\right| \le z_j^0 \operatorname{sign} \pi_\omega(t) \ln\left|\frac{\pi_\omega(t)}{\pi_\omega(t_1)}\right| \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega).$$

Поскольку выражение, стоящее справа, стремится к $-\infty$ при $t \uparrow \omega$, то

$$\lim_{t\uparrow\omega} z_j(t) = 0.$$

Из этого предельного соотношения следует справедливость (2.2).

3. Основные результаты. Введем вспомогательные обозначения

$$I_{i1}(t) = \int\limits_{I_{i1}^0}^{t} p_i(s)|\pi_\omega(s)|^{\sigma_{i0}} ds \quad I_{i1}^0 = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \int_a^\omega p_i(s)|\pi_\omega(s)|^{\sigma_{i0}} ds = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \int_a^\omega p_i(s)|\pi_\omega(s)|^{\sigma_{i0}} ds < +\infty. \end{cases}$$

Кроме того, введем функции $\psi_{ik}(z) = \dfrac{\varphi_{ik}(z)}{|z|^{\sigma_{ik}}}$, $k = 0, 1$, которые в силу соотношения (1.5) имеют следующее свойство:

$$\lim_{\substack{z \to Y_k \\ z \in \Delta_k}} \frac{z\psi'_{ik}(z)}{\psi_{ik}(z)} = 0.$$

Теорема 3.1. *Пусть* $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ *и для некоторого* $i \in M$ *при всех* $j \in M \setminus \{i\}$ *выполняется условие (2.1). Положим, кроме того, что выполняется неравенство* $\sigma_{i0} + \sigma_{i1} \neq 1$. *Тогда для существования* $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$*-решений уравнения (1.1) необходимо, а если выполняется одно из двух условий*

$$\mu_0(\sigma_{i1} - 2) \neq 1, \quad \mu_0(\sigma_{i1} - 2) = 1 \quad \text{и} \quad (\sigma_{i1} - 1)(\sigma_{i0} + \sigma_{i1} - 1) > 0, \tag{3.1}$$

то и достаточно, чтобы

$$Y_k = \begin{cases} \pm\infty, & \text{если} \quad \lim\limits_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0} = +\infty, \\ 0, & \text{если} \quad \lim\limits_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0} = 0, \end{cases} \qquad k = 0, 1, \tag{3.2}$$

при $t \in (a, \omega)$ *выполнялись неравенства*

$$\alpha_i(1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1}) I_{i1}(t) y_1 > 0, \quad (1 + \mu_0)\pi_\omega(t) y_0 y_1 > 0 \tag{3.3}$$

и имело место предельное соотношение

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I'_{i1}(t)}{I_{i1}(t)} = \mu_0(1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1}). \tag{3.4}$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}} \operatorname{sign} y'(t)}{\psi_{i0}(y(t))\psi_{i1}(y'(t))} = \frac{\alpha_i(1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1})}{|1 + \mu_0|^{\sigma_{i0}}} I_{i1}(t)[1 + o(1)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1 + \mu_0}{\pi_\omega(t)} [1 + o(1)]. \tag{3.5}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y : [t_0, \omega) \to \Delta_0$ — произвольное $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-решение уравнения (1.1). Поскольку $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, из соотношений (2.4) следует справедливость (3.2), второго из неравенств (3.3) и второго из асимптотических представлений (3.5). В силу выполнения условий (1.2) и (2.1) из уравнения (1.1) с учетом леммы 2.1 получаем

$$y''(t) = \alpha_i p_i(t)\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))[1+0(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega$$

или, с учетом соотношений (2.4) и определения функций ψ_{ik}, $k=0,1$,

$$\frac{y''(t)|y'(t)|^{-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}{\psi_{i1}(y'(t))\psi_{i0}(y(t))} = \frac{\alpha_i}{|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} p_i(t)|\pi_\omega(t)|^{\sigma_{i0}}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{3.6}$$

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}\operatorname{sign} y'(t)}{\psi_{i1}(y'(t))\psi_{i0}(y(t))} = \frac{\alpha_i}{\mu_0|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} p_i(t)|\pi_\omega(t)|^{\sigma_{i0}}\pi_\omega(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.7}$$

Покажем, с учетом условия $\sigma_{i0}+\sigma_{i1}\neq 1$, что имеет место асимптотическое представление

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}\operatorname{sign} y'(t)}{\psi_{i1}(y'(t))\psi_{i0}(y(t))} = \frac{\alpha_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})}{|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} I_{i1}(t)[1+o(1)]. \tag{3.8}$$

Поскольку

$$\left(\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}\operatorname{sign} y'(t)}{\psi_{i1}(y'(t))\psi_{i0}(y(t))}\right)' = \frac{|y'(t)|^{-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}y''(t)}{\psi_{i1}(y'(t))\psi_{i0}(y(t))}\times$$

$$\times\left(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}-\frac{y'(t)\psi_{i1}'(y'(t))}{\psi_{i1}(y'(t))}-\frac{(y'(t))^2}{y(t)y''(t)}\,\frac{y(t)\psi_{i0}'(y(t))}{\psi_{i0}(y(t))}\right),$$

принимая во внимание (1.5) – (1.7), свойство функций ψ_{ik}, $k=0,1$, и (3.6), имеем

$$\left(\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}\operatorname{sign} y'(t)}{\psi_{i1}(y'(t))\psi_{i0}(y(t))}\right)' = \frac{\alpha_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})}{|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} p_i(t)|\pi_\omega(t)|^{\sigma_{i0}}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Интегрируя последнее соотношение от t_0 до t ($t\in(t_0,\omega)$) с учетом определения функции $I_{i1}(t)$, получаем

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}\operatorname{sign} y'(t)}{\psi_{i1}(y'(t))\psi_{i0}(y(t))} = c_i + \frac{\alpha_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})}{|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} I_{i1}(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Если $I_{i1}^0 = t_0$, то справедливо (3.8). Покажем, что $c_i = 0$ при $I_{i1}^0 = \omega$. Предположим противное, тогда

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}\operatorname{sign} y'(t)}{\psi_{i1}(y'(t))\psi_{i0}(y(t))} = c_i + o(1),$$

и в силу (3.6)

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{\alpha_i}{|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} p_i(t)|\pi_\omega(t)|^{\sigma_{i0}}\left[\frac{1}{c_i}+o(1)\right] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Интегрируя последнее выражение от t_0 до t $(t \in (t_0, \omega))$, находим

$$\ln |y'(t)| = C_i + \frac{\alpha_i}{|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}}\, I_{i1}(t) \left[\frac{1}{c_i} + o(1)\right] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

В данном соотношении левая часть при $t \uparrow \omega$ стремится к бесконечности, а правая — к константе. Полученное противоречие доказывает справедливость (3.8) в случае, когда $I_{i1}^0 = \omega$.

Из (3.8) следует выполнение первого из неравенств (3.3) и первого из асимптотических представлений (3.5). Кроме того, в силу (3.7) и (3.8) имеет место предельное соотношение (3.4).

Достаточность. Пусть для некоторого $i \in M$ выполняются условия теоремы и (3.1)–(3.4). Зафиксировав с помощью (3.2), (3.3) значения Y_k и окрестности Δ_k, $k = 0, 1$, докажем, с учетом идей, заложенных в работах В. М. Евтухова и Е. С. Владовой, существование хотя бы одного $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-решения уравнения (1.1), допускающего при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (3.5).

Рассмотрим сначала систему соотношений вида

$$\frac{|y'(t)|^{\frac{1}{\Lambda_i}}}{\psi_{i0}(y(t))\psi_{i1}(y'(t))} = \frac{|I_{i1}(t)|}{|\Lambda_i|\,|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}}[1+v_1], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1+\mu_0}{\pi_\omega(t)}\,[1+v_2], \tag{3.9}$$

в которой $\Lambda_i = 1/(1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1})$, и установим, что она однозначно определяет заданные на множестве $D_0 = [t_0, \omega) \times V_0$, где $t_0 \in [a, \omega)$, $V_0 = \{(v_1, v_2) : |v_k| \le 0,5, k = 1, 2\}$ непрерывно дифференцируемые неявные функции $y^{(k)} = Y_{ik}(t, v_1, v_2)$, $k = 0, 1$, вида

$$Y_{ik}(t, v_1, v_2) = y_k^0 |\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0+z_{k+1}(t,v_1,v_2)}, \quad k = 0, 1, \tag{3.10}$$

где $y_k^0 = \operatorname{sign} y_k$, $|z_{k+1}(t, v_1, v_2)| \le |1-k+\mu_0|/2$ при $(t, v_1, v_2) \in D_0$ и $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z_{k+1}(t, v_1, v_2) = 0$ равномерно по $(v_1, v_2) \in V_0$. Для этого, полагая в (3.9)

$$y^{(k)} = y_k^0 |\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0+z_{k+1}}, \tag{3.11}$$

получаем, с учетом знаковых условий (3.3), систему соотношений вида

$$\begin{aligned} |\pi_\omega(t)|^{\frac{\mu_0+z_2}{\Lambda_i}} &= \frac{|I_{i1}(t)|[1+v_1]}{|\Lambda_i||1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}(y_k^0 |\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0+z_{k+1}}), \\ |\pi_\omega(t)|^{z_2-z_1} &= |1+\mu_0|[1+v_2]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Поскольку в силу условия (3.4) $|I_{i1}(t)| = |\pi_\omega(t)|^{\frac{\mu_0}{\Lambda_i}+u(t)}$, где $u(t)$ — непрерывная функция, стремящаяся к нулю при $t \uparrow \omega$, систему (3.12) можно записать в виде

$$z_2 = \Lambda_i \left(u(t) + \frac{\ln \left| \frac{1+v_1}{|\Lambda_i||1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}(y_k^0 |\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0+z_{k+1}}) \right|}{\ln |\pi_\omega(t)|} \right),$$
$$z_2 - z_1 = \frac{\ln |(1+\mu_0)[1+v_2]|}{\ln |\pi_\omega(t)|}. \tag{3.13}$$

Частично разрешая эту систему относительно z_1, z_2 (как линейную неоднородную), получаем

$$z_k = a_k(t) + b_k(t, v_1, v_2) + Z(t, z_1, z_2), \quad k = 1, 2,$$

где

$$a_1(t) = \Lambda_i u(t) - \Lambda_i \ln(|\Lambda_i|\, |1+\mu_0|^{1-\sigma_{i1}})/ \ln |\pi_\omega(t)|,$$

$$a_2(t) = \Lambda_i u(t) - \Lambda_i \ln(|\Lambda_i|\, |1+\mu_0|^{\sigma_{i0}})/ \ln |\pi_\omega(t)|,$$

$$b_1(t, v_1, v_2) = \Lambda_i \frac{\ln \left([1+v_1][1+v_2]^{-\frac{1}{\Lambda_i}} \right)}{\ln |\pi_\omega(t)|}, \quad b_2(t, v_1, v_2) = \Lambda_i \frac{\ln[1+v_1]}{\ln |\pi_\omega(t)|},$$

$$Z(t, z_1, z_2) = \Lambda_i \ln \left[\prod_{k=1}^{2} \psi_{ik}(y_k^0 |\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0+z_{k+1}}) \right] / \ln |\pi_\omega(t)|.$$

В силу свойств функций u, I_i, ψ_{ik}, $k = 0, 1$, и условий (3.2), (3.3) имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega} a_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, \quad \lim_{t\uparrow\omega} b_k(t, v_1, v_2) = 0, \quad k = 1, 2, \text{ равномерно по } (v_1, v_2) \in V_0,$$
$$\lim_{t\uparrow\omega} Z(t, z_1, z_2) = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\partial Z(t, z_1, z_2)}{\partial z_k} = 0, \quad k = 1, 2, \quad \text{равномерно по} \quad (z_1, z_2) \in Z_0, \tag{3.14}$$

где $Z_0 = \{(z_1, z_2) : |z_{k+1}| \le |1 - k + \mu_0|/2, \ k = 0, 1\}$.

Поскольку выполняется (3.14), существует число $t_0 \in [a, \omega)$ такое, что на множестве $[t_0, \omega) \times Z_0 \times V_0$ выполняются неравенства

$$|a_k(t) + b_k(t, v_1, v_2) + Z(t, z_1, z_2)| \le \beta_0/4, \quad k = 1, 2, \tag{3.15}$$

где $\beta_0 = \min\{|1 + \mu_0|, |\mu_0|\}$, и условия Липшица

$$|Z(t, z_1^2, z_2^2) - Z(t, z_1^1, z_2^1)| \le \frac{1}{3} \sum_{l=1}^{2} |z_l^2 - z_l^1|. \tag{3.16}$$

Зафиксировав число t_0, обозначим через B банахово пространство непрерывных и ограниченных на множестве $\Omega = [t_0, \omega) \times V_0$ вектор-функций $z = (z_1, z_2) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|z\| = \sup\left\{\sum_{k=1}^{2} |z_k(t, v_1, v_2)| : (t, v_1, v_2) \in \Omega\right\}.$$

Выберем из него подпространство B_0 таких функций из B, для которых $\|z\| \le \beta_0/2$, и рассмотрим на B_0, выбрав произвольное число $\nu \in (0,1)$, оператор $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, определенный соотношениями

$$\Phi_k(z)(t, v_1, v_2) = z_k(t, v_1, v_2) - \nu|z_k(t, v_1, v_2) - a_k(t) - b_k(t, v_1, v_2) - \\ - Z(t, z_1(t, v_1, v_2), z_2(t, v_1, v_2))|, \quad k = 1, 2. \tag{3.17}$$

Для любого $z \in B_0$ в силу условия (3.15) имеем

$$|\Phi_k(z)(t, v_1, v_2)| \le (1-\nu)|z_k(t, v_1, v_2)| + \frac{\nu\beta_0}{4}, \quad k = 1, 2, \quad \text{при} \quad (t, v_1, v_2) \in \Omega.$$

Поэтому на множестве Ω

$$\sum_{k=1}^{2} |\Phi_k(z)(t, v_1, v_2)| \le (1-\nu)\sum_{k=1}^{2} |z_k(t, v_1, v_2)| + \frac{\nu\beta_0}{2} \le \\ \le (1-\nu)||z|| + \frac{\nu\beta_0}{2} \le (1-\nu)\frac{\beta_0}{2} + \frac{\nu\beta_0}{2} = \frac{\beta_0}{2}.$$

Отсюда вытекает, что $||\Phi(z)|| \le \beta_0/2$ и, следовательно, $\Phi(B_0) \subset B_0$.

Пусть теперь $z^1, z^2 \in B_0$. Тогда в силу (3.16) при $(t, v_1, v_2) \in \Omega$

$$|\Phi_k(z^2)(t, v_1, v_2) - \Phi_k(z^1)(t, v_1, v_2)| \le (1-\nu)|z_k^2(t, v_1, v_2) - z_k^1(t, v_1, v_2)| + \\ + \nu|Z(t, z_1^2, z_2^2) - Z(t, z_1^1, z_2^1)| \le \\ \le (1-\nu)|z_k^2(t, v_1, v_2) - z_k^1(t, v_1, v_2)| + \\ + \frac{\nu}{3}\sum_{l=1}^{2} |z_l^2(t, v_1, v_2) - z_l^1(t, v_1, v_2)|, \quad k = 1, 2.$$

Значит, на множестве Ω

$$\sum_{k=1}^{2}|\Phi_k(z^2)(t, v_1, v_2) - \Phi_k(z^1)(t, v_1, v_2)| \le \\ \le \left(1 - \frac{\nu}{3}\right)\sum_{k=1}^{2} |z_k^2(t, v_1, v_2) - z_k^1(t, v_1, v_2)| \le \left(1 - \frac{\nu}{3}\right)\|z^2 - z^1\|,$$

откуда следует, что

$$\|\Phi(z^2) - \Phi(z^1)\| \leq \left(1 - \frac{\nu}{3}\right) \|z^2 - z^1\|.$$

Таким образом, показано, что оператор Φ отображает пространство B_0 в себя и является на нем оператором сжатия. Тогда, согласно принципу сжатых отображений, существует единственная вектор-функция $z \in B_0$ такая, что $z = \Phi(z)$. В силу (3.17) эта непрерывная на множестве Ω функция является единственным решением системы (3.13), удовлетворяющим условию $\|z\| \leq \beta_0/2$. Из (3.13) с учетом (3.14) следует, что компоненты данного решения стремятся к нулю при $t \uparrow \omega$ равномерно по $(v_1, v_2) \in V_0$. Непрерывная дифференцируемость этого решения на множестве Ω непосредственно следует из известной локальной теоремы о существовании неявных функций, определенных системой соотношений. В силу замены (3.11) полученной вектор-функции (z_1, z_2) соответствует вектор-функция (Y_{i0}, Y_{i1}) с компонентами вида (3.10), которая является решением системы (3.9), причем с учетом (3.2), (3.3)

$$\begin{gathered}\lim_{t\uparrow\omega} Y_{ik}(t, v_1, v_2) = Y_k \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, v_2) \in V_0, \quad k = 0, 1, \\ Y_{ik}(t, v_1, v_2) \subset \Delta_k \quad \text{при} \quad (v_1, v_2) \in V_0, \quad t \in [t_1, \omega), \quad \text{где} \quad t_1 \in [t_0, \omega), \quad k = 0, 1.\end{gathered} \tag{3.18}$$

Рассмотрим некоторые свойства функций Y_{ik}, $k = 0, 1$. В силу (3.18) и свойства функций ψ_{jk} при $j \in M$, $k = 0, 1$ равномерно по $(v_1, v_2) \in V_0$ имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega} G_{jk}(t, v_1, v_2) = 0, \quad \text{где} \quad G_{jk}(t, v_1, v_2) = \frac{Y_{ik}(t, v_1, v_2)\psi'_{jk}(Y_{ik}(t, v_1, v_2))}{\psi_{jk}(Y_{ik}(t, v_1, v_2))}. \tag{3.19}$$

Теперь в системе (3.9) положим $y^{(k)} = Y_{ik}(t, v_1, v_2)$, $k = 0, 1$, и продифференцируем полученные соотношения по t. В результате получим систему уравнений, линейных относительно $(Y_{i0})'_t$ и $(Y_{i1})'_t$:

$$\begin{gathered}-\frac{\psi'_{i0}(Y_{i0}(t, v_1, v_2))}{\psi_{i0}(Y_{i0}(t, v_1, v_2))} (Y_{i0})'_t + \left(\frac{1}{\Lambda_i Y_{i1}(t, v_1, v_2)} - \frac{\psi'_{i1}(Y_{i1}(t, v_1, v_2))}{\psi_{i1}(Y_{i1}(t, v_1, v_2))}\right) (Y_{i1})'_t = \frac{I'_{i1}(t)}{I_{i1}(t)}, \\ -\frac{Y_{i1}(t, v_1, v_2)}{Y^2_{i0}(t, v_1, v_2)} (Y_{i0})'_t + \frac{1}{Y_{i0}(t, v_1, v_2)} (Y_{i1})'_t = -\frac{1 + \mu_0}{\pi^2_\omega(t)} [1 + v_2].\end{gathered} \tag{3.20}$$

Из данной системы с учетом неравенства $1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1} \neq 0$, условия (3.19) и вида функции Y_{i0} получим, что на множестве $[t_2, \omega) \times V_0$, $t_2 \in [t_1, \omega)$, справедливы формулы

$$(Y_{i0}(t, v_1, v_2))'_t = \frac{\dfrac{Y_{i0}(t, v_1, v_2)I'_{i1}(t)}{I_{i1}(t)} + \dfrac{1 + \mu_0}{\pi^2_\omega(t)}[1 + v_2]\dfrac{Y^2_{i0}(t, v_1, v_2)}{Y_{i1}(t, v_1, v_2)}\left(\dfrac{1}{\Lambda_i} - G_{i1}(t, v_1, v_2)\right)}{\dfrac{1}{\Lambda_i} - G_{i0}(t, v_1, v_2) - G_{i1}(t, v_1, v_2)},$$

$$(Y_{i1}(t, v_1, v_2))'_t = \frac{\dfrac{Y_{i1}(t, v_1, v_2)I'_{i1}(t)}{I_{i1}(t)} + \dfrac{1 + \mu_0}{\pi^2_\omega(t)}[1 + v_2]Y_{i0}(t, v_1, v_2)G_{i0}(t, v_1, v_2)}{\dfrac{1}{\Lambda_i} - G_{i0}(t, v_1, v_2) - G_{i1}(t, v_1, v_2)}.$$

В свою очередь, из представлений для $(Y_{i0})'_t$, $(Y_{i1})'_t$ и условия (3.4) следует, что равномерно по $(v_1, v_2) \in V_0$ справедливы равенства

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)(Y_{i0}(t,v_1,v_2))'_t}{Y_{i0}(t,v_1,v_2)} = 1+\mu_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)(Y_{i1}(t,v_1,v_2))'_t}{Y_{i1}(t,v_1,v_2)} = \mu_0. \tag{3.21}$$

Поскольку предельные соотношения (3.19) и (3.21) выполняются равномерно по $(v_1, v_2) \in \in V_0$, воспользовавшись схемой доказательства леммы 2.1, убедимся, что равенство

$$\lim_{t\uparrow\omega} H_i(t,v_1,v_2) = 1, \tag{3.22}$$

где

$$H_i(t,v_1,v_2) = \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \alpha_j [1+r_j(t)] \frac{p_j(t)\varphi_{j0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))\varphi_{j1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}{p_i(t)\varphi_{i0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))\varphi_{i1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))},$$

также выполняется равномерно по $(v_1, v_2) \in V_0$. Кроме того, так как вектор-функция (Y_{i0}, Y_{i1}) удовлетворяет системе соотношений (3.9), имеет место равенство

$$\frac{\varphi_{i0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))\varphi_{i1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}{Y_{i1}(t,v_1,v_2)} = \alpha_i \Lambda_i \frac{|\pi_\omega(t)|^{\sigma_{i0}}}{I_{i1}(t)} \frac{1}{[1+v_1][1+v_2]^{\sigma_{i0}}}. \tag{3.23}$$

Теперь, применяя к уравнению (1.1) преобразование

$$\begin{gathered} y^{(k)}(t) = Y_{ik}(t, v_1(x), v_2(x)), \quad k = 0,1, \quad x = \beta \ln|\pi_\omega(t)|, \\ \beta = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ -1, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases} \end{gathered} \tag{3.24}$$

и учитывая, что вектор-функция (Y_{i0}, Y_{i1}) при $t \in [t_2, \omega)$ и $(v_1(x), v_2(x)) \in V_0$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{|y'(t)|^{\frac{1}{\Lambda_i}}}{\psi_{i0}(y(t))\psi_{i1}(y'(t))} = \frac{|I_{i1}(t)|}{|\Lambda_i|\,|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}}[1+v_1(x)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1+\mu_0}{\pi_\omega(t)}[1+v_2(x)], \tag{3.25}$$

получаем, с учетом (3.23), систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{gathered} v_1' = \beta[-h_i(t)[1+v_1] - (1+\mu_0)G_{i0}(t,v_1,v_2)[1+v_1][1+v_2] + \\ + (1-\Lambda_i G_{i1}(t,v_1,v_2))h_i(t)H_i(t,v_1,v_2)[1+v_2]^{-\sigma_{i0}}], \\ v_2' = \beta\left[[1+v_2] - (1+\mu_0)[1+v_2]^2 + \Lambda_i h_i(t) H_i(t,v_1,v_2)\frac{[1+v_2]^{1-\sigma_{i0}}}{1+v_1}\right], \end{gathered} \tag{3.26}$$

в которой $h_i(t) = \dfrac{\pi_\omega(t) I'_{i1}(t)}{I_{i1}(t)}$, t — функция, обратная к $x = \beta \ln|\pi_\omega(t)|$. Данную систему рассмотрим на множестве $[x_0, +\infty) \times V_0$, где $x_0 = \beta \ln|\pi_\omega(t_2)|$.

Поскольку выполняется (3.22), имеет место равенство

$$H_i(t, v_1, v_2) = 1 + R_{i1}(x, v_1, v_2), \tag{3.27}$$

где функция $R_{i1}(x, v_1, v_2)$ стремится к нулю при $x \to +\infty$ равномерно по $(v_1, v_2) \in V_0$. Кроме того, допустимы представления

$$\begin{aligned} [1 + v_2]^{-\sigma_{i0}} &= 1 - \sigma_{i0} v_2 + R_2(v_1, v_2), \\ \frac{[1 + v_2]^{1-\sigma_{i0}}}{1 + v_1} &= 1 - v_1 + (1 - \sigma_{i0}) v_2 + R_3(v_1, v_2), \end{aligned} \tag{3.28}$$

в которых функции $R_k(v_1, v_2)$, $k = 2, 3$, имеют свойство $\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0} \dfrac{R_k(v_1, v_2)}{|v_1| + |v_2|} = 0$. Учитывая (3.27) и (3.28), систему (3.26) можно записать в виде

$$\begin{aligned} v_1' &= \beta[f_1(x) + c_{11}(x) v_1 + c_{12}(x) v_2 + V_{11}(x, v_1, v_2) + V_{12}(x, v_1, v_2)], \\ v_2' &= \beta[f_2(x) + c_{21}(x) v_1 + c_{22}(x) v_2 + V_{21}(x, v_1, v_2) + V_{22}(x, v_1, v_2)], \end{aligned} \tag{3.29}$$

где

$$f_1(x) = 0, \quad c_{11}(x) = -h_i(t), \quad c_{12}(x) = -\sigma_{i0} h_i(t),$$

$$f_2(x) = -\mu_0 + \Lambda_i h_i(t), \quad c_{21}(x) = -\Lambda_i h_i(t), \quad c_{22}(x) = -1 - 2\mu_0 + \Lambda_i (1 - \sigma_{i0}) h_i(t),$$

$$\begin{aligned} V_{11}(x, v_1, v_2) = &-(1 + \mu_0) G_{i0}(t, v_1, v_2)[1 + v_1][1 + v_2] - \\ &- \Lambda_i h_i(t) G_{i1}(t, v_1, v_2) H_i(t, v_1, v_2)[1 + v_2]^{-\sigma_{i0}} + \\ &+ (1 - \Lambda_i G_{i1}(t, v_1, v_2)) h_i(t) R_{i1}(x, v_1, v_2)[1 + v_2]^{-\sigma_{i0}}, \end{aligned}$$

$$V_{12}(x, v_1, v_2) = (1 - \Lambda_i G_{i1}(t, v_1, v_2)) h_i(t) H_i(t, v_1, v_2) R_2(v_1, v_2),$$

$$V_{21}(x, v_1, v_2) = \Lambda_i h_i(t) R_{i1}(x, v_1, v_2) \frac{[1 + v_2]^{1-\sigma_{i0}}}{1 + v_1},$$

$$V_{22}(x, v_1, v_2) = -(1 + \mu_0) v_2^2 + \Lambda_i h_i(t) H_i(t, v_1, v_2) R_3(v_1, v_2).$$

В силу (3.4), (3.27), (3.28), определения Λ_i и замены независимой переменной имеют место предельные соотношения

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{11}(x) = -\mu_0(1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1}), \quad \lim_{x\to+\infty} c_{12}(x) = -\mu_0 \sigma_{i0}(1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1}),$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{21}(x) = -\mu_0, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{22}(x) = -1 - \mu_0 - \mu_0 \sigma_{i0},$$

а функции $V_{lk}(x, v_1, v_2)$, $l = 1, 2$, $k = 1, 2$, таковы, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} V_{l1}(x, v_1, v_2) = 0, \quad l = 1, 2, \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, v_2) \in V_0,$$

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0} \frac{V_{l2}(x,v_1,v_2)}{|v_1|+|v_2|} = 0, \quad l = 1,2, \quad \text{равномерно по} \quad x \in [x_0;+\infty).$$

Таким образом, система (3.29) является квазилинейной системой дифференциальных уравнений с почти постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение для предельной матрицы коэффициентов линейной части имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\beta\mu_0(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})-\lambda & -\beta\mu_0\sigma_{i0}(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}) \\ -\beta\mu_0 & -\beta(1+\mu_0+\mu_0\sigma_{i0})-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3.30}$$

или

$$\lambda^2 + \beta(2\mu_0 - \mu_0\sigma_{i1}+1)\lambda + (1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})(\mu_0^2+\mu_0) = 0.$$

Поскольку выполняется условие (3.1), данное характеристическое уравнение не имеет корней с нулевой действительной частью. Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (3.29) выполнены все условия теоремы 2.2 работы [8]. Согласно данной теореме система (3.29) имеет хотя бы одно решение $(v_1,v_2) : [x_1,+\infty) \to \mathbb{R}$ (где $x_1 \ge x_0$), стремящееся к нулю при $x \to +\infty$. Этому решению, с учетом преобразования (3.24), соответствует решение уравнения (1.1) $y(t)$, которое является $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$-решением (в силу (3.18), (3.21)) и вместе со своей производной допускает асимптотические представления (3.5) (с учетом (3.25)).

Заметим, что если наложить некоторые дополнительные ограничения на функции φ_{ik}, $k = 0,1$, то асимптотические представления для $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$-решений и их производных первого порядка при $t \uparrow \omega$ можно записать в явном виде.

Определение 3.1. *Будем говорить, что функция* φ_{jk}, $j \in \{1,\dots,m\}$, $k \in \{0,1\}$, *удовлетворяет условию* S, *если для любой непрерывно дифференцируемой функции* $L : \Delta_k \to (0;+\infty)$ *такой, что* $\lim_{\substack{z\to Y_k \\ z\in\Delta_k}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = 0$, *имеет место соотношение* $\psi_{jk}(zL(z)) = \psi_{jk}(z)[1+o(1)]$ *при* $z \to Y_k$, $z \in \Delta_k$.

Теорема 3.2. *Пусть выполняются условия теоремы 3.1 и, кроме этого, функции* φ_{ik}, $k = 0,1$, *имеют свойство* S. *Тогда при выполнении (3.1) – (3.4) каждое* $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$-*решение уравнения (1.1) при* $t \uparrow \omega$ *представимо в виде*

$$|y(t)| = |\pi_\omega(t)| \left(\frac{|(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i1}(t)|}{|1+\mu_0|^{1-\sigma_{i1}}} \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}(y_k^0|\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0}) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}} [1+o(1)], \tag{3.31}$$

$$|y'(t)| = \left(\frac{|(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i1}(t)|}{|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}(y_k^0|\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0}) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}} [1+o(1)]. \tag{3.32}$$

Доказательство. Для начала покажем, что функция

$$L_0(z) = \frac{|y(t(z))|}{|\pi_\omega(t(z))|^{1+\mu_0}},$$

где $z = y_0^0|\pi_\omega(t)|^{1+\mu_0}$, $y_0^0 = \operatorname{sign} y_0$, является медленно меняющейся при $z \to Y_0$, $z \in \Delta_0$:

$$\lim_{\substack{z\to Y_0\\ z\in\Delta_0}} \frac{zL_0'(z)}{L_0(z)} = \lim_{t\uparrow\omega}\left[y_0^0|\pi_\omega(t)|^{1+\mu_0}\frac{1}{y_0^0(1+\mu_0)|\pi_\omega(t)|^{\mu_0}\operatorname{sign}\pi_\omega(t)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{y_0^0y'(t)|\pi_\omega(t)|^{1+\mu_0}-|y(t)|(1+\mu_0)|\pi_\omega(t)|^{\mu_0}\operatorname{sign}\pi_\omega(t)}{|\pi_\omega(t)|^{2+2\mu_0}}\frac{|\pi_\omega(t)|^{1+\mu_0}}{|y(t)|}\right]=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\left[\frac{1}{1+\mu_0}\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)}-1\right]=0.$$

Поскольку функция φ_{i0} имеет свойство S, с учетом медленной изменяемости функции L_0 при $z \to Y_0$ $(z \in \Delta_0)$ и условия (3.2) получим

$$\psi_{i0}(y(t)) = \psi_{i0}(y_0^0|\pi_\omega(t)|^{1+\mu_0})[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.33}$$

Аналогично доказывается, что функция

$$L_1(z) = \frac{|y'(t(z))|}{|\pi_\omega(t(z))|^{\mu_0}},$$

где $z = y_1^0|\pi_\omega(t)|^{\mu_0}$, $y_1^0 = \operatorname{sign} y_1$, является медленно меняющейся при $z \to Y_1$, $z \in \Delta_1$, и, следовательно,

$$\psi_{i1}(y'(t)) = \psi_{i1}(y_1^0|\pi_\omega(t)|^{\mu_0})[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.34}$$

Принимая во внимание (3.33), (3.34) и (3.3), первое из соотношений (3.5) можно записать в виде

$$|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}} = \frac{|(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i1}(t)|}{|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}}\prod_{k=0}^{1}\psi_{ik}(y_k^0|\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0})[1+o(1)],$$

откуда следует асимптотическое представление (3.32). В свою очередь, из (3.32) с учетом второго из соотношений (3.5) получаем, что имеет место асимптотическое представление (3.31).

Выводы. В настоящей работе для уравнения (1.1) выделен достаточно широкий класс $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$-решений и в случае $\mu_0 \in \mathbb{R}$ получены условия, при выполнении которых на любом таком решении правая часть уравнения (1.1) асимптотически эквивалентна одному слагаемому. При выполнении этих условий приведены необходимые и достаточные признаки существования $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$-решений уравнения (1.1), для которых $\mu_0 \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$, а также асимптотические представления таких решений и их производных первого порядка при $t\uparrow\omega$.

1. *Козьма А. А.* Асимптотические представления одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 4. — С. 490–501.

2. *Козьма О. О.* Асимптотичне поводження розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2008. — Вип. 374. — С. 55 – 65.

3. *Козьма А. А.* Признаки существования одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика і механіка. — 2009. — **14**. — Вип. 20. — С. 75 – 90.

4. *Евтухов В. М., Касьянова В. А.* Асимптотическое поведение неограниченных решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 3. — С. 338 – 355.

5. *Касьянова В. О.* Асимптотичні зображення зникаючих розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2004. —Вип. 228 — С. 5 – 19.

6. *Белозерова М. А.* Асимптотические свойства одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Мат. студ. — 2008. —**29**, № 1. — С. 52 – 62.

7. *Белозерова М. А.* Асимптотические представления решений неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, близкими к степенным // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 1. — С. 3 – 15.

8. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 1. — С. 52 – 80.

Получено 20.04.11,
после доработки — 14.07.11