Физика низких температур, 1997, т. 23, № 10, с. 1046–1053

Спиновые волны с активацией в теории ферми-жидкости Ландау

А. И. Ахиезер, Н. В. Ласкин, С. В. Пелетминский

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт», Украина, 310108, г. Харьков, ул. Академическая, 1
E-mail: nlaskin@kipt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 10 апреля 1997 г.

Исследованы активационные спектры коллективных колебаний с квадратичным законом дисперсии в магнитоупорядоченной ферми-жидкости. Показано, что спектр активационных спиновых волн существенно зависит от структуры амплитуды взаимодействия Ландау, как функции угла между квазиимпульсами фермионов. Существование активационных спиновых волн будет проявляться в процессах рассеяния нейтронов и света, а также в процессах трансформации волн в магнитоупорядоченных средах.

Досліджено активаційні спектри колективних коливань з квадратичним законом дисперсії в магнітовпорядкованій фермі-рідині. Показано, що спектр активаційних спінових хвиль суттєво залежить від структури амплітуди взаємодії Ландау, як функції кута між квазіімпульсами ферміонів. Існування активаційних спінових хвиль буде виявлятися в процесах розсіяння нейтронів і світла, а також в процесах трансформації хвиль в магнітовпорядкованих середовищах.

PACS: **75.10.–b**

1. Введение

Одним из широко применяемых методов самосогласованного поля является модель ферми-жидкости Ландау [1]. Теория ферми-жидкости Ландау с успехом применяется при исследовании термодинамических и кинетических процессов для систем сильно взаимодействующих фермионов таких, например, как нормальная и сверхтекучая ферми-жидкости, электроны в металлах, ядерная материя.

Впервые коллективные движения в нормальной ферми-жидкости — нулевой звук и спиновый нуль-звук, — характеризующиеся линейным законом дисперсии, были исследованы Ландау и Силиным [1,2]. В дальнейшем Абрикосовым и Дзялошинским [3] теория ферми-жидкости была применена к исследованию спектров колебательных мод в магнитоупорядоченной ферми-жидкости. Этими авторами была установлена возможность существования колебаний с квадратичным законом дисперсии — спиновых волн в намагниченной ферми-жидкости. Заметим, что квадратичный закон дисперсии имеет место также и для нормальной (неупорядоченной) ферми-жидкости, находящейся в магнитном поле, как это было показано Силиным [2].

Однако в работе [3] был исследован только один случай возможных коллективных колебаний с квадратичным законом дисперсии. В действительности, спектр спиновых волн в магнитоупорядоченной ферми-жидкости оказывается более богатым. Исследованию этого вопроса и посвящена настоящая работа. Нами показано, что наряду с безактивационным спектром спиновых волн, установленном в рамках модели ферми-жидкости в работе [3], существуют коллективные колебания с квадратичным законом дисперсии с энергией активации. Причем энергия активации существенно зависит от структуры амплитуды взаимодействия Ландау как функции угла между квазиимпульсами фермионов. В простейшем случае, когда амплитуда Ландау является постоянной, не зависящей от угла между квазиимпульсами фермионов, наряду с безактивационной имеется также одна бесконечнократно вырожденная активационная мода.

Наличие активационных спектров должно приниматься во внимание при анализе процессов рассеяния нейтронов и света, а также в процессах трансформации волн в магнитоупорядоченных средах.

2. Малые колебания магнитоупорядоченной ферми-жидкости

Напомним предварительно основные положения теории ферми-жидкости Ландау. Состояние ферми-жидкости описывается одночастичной матрицей плотности $f_{\kappa,\kappa'}$, где $\kappa = \mathbf{p}, i$, здесь $\mathbf{p}$ — импульс квазичастицы (фермиона), i — квантовые числа, связанные с внутренними степенями свободы фермиона. Теория Ландау описывает квантовую жидкость при низких температурах, энергетический спектр которой аналогичен спектру идеального ферми-газа (состоящего из частиц со спином $1/2$). Исходный пункт теории заключается в том, что имеется однозначное соответствие между энергетическим спектром идеального газа и спектром взаимодействующих фермионов. Иными словами, роль частиц газа переходит к элементарным возбуждениям — квазичастицам, число которых совпадает с числом частиц и которые подчиняются статистике Ферми—Дирака. Однако следует подчеркнуть, что при этом полная энергия жидкости не сводится к сумме энергий квазичастиц, а представляет некоторый функционал $E(f)$ одночастичной матрицы плотности $f_{\kappa,\kappa'}$.

В силу совпадения энергетического спектра жидкости и идеального ферми-газа для описания равновесных свойств ферми-жидкости исходят из комбинаторного определения энтропии

$$S = \mathop{\mathrm{Sp}}_{(\kappa)} (f \ln f + (1-f) \ln f)) , \qquad (1)$$

шпур берется в пространстве квантовых чисел κ.

Равновесной матрице плотности $f_{\kappa,\kappa'}$ соответствует максимум энтропии S при фиксированной энергии $E(f)$ и фиксированном спине $\frac{1}{2} S_i$,

$$S_i = \mathop{\mathrm{Sp}}_{(\kappa)} \sigma_i f , \qquad (2)$$

где σ_i — матрицы Паули. (Предполагается, что энергия $E(f)$ инвариантна по отношению к поворотам спина.)

Вместо отыскания условного максимума энтропии можно находить безусловный минимум потенциала $\Omega(f, Y)$:

$$\Omega(f, Y) = -S(f) + Y_0 E(f) + \sum_i Y_i S_i , \qquad (3)$$

где Y_0, Y_i — термодинамические силы (множители Лагранжа), сопряженные интегралам движения. Решая эту задачу, мы приходим к следующему нелинейному уравнению для отыскания равновесной матрицы плотности:

$$f = \{\exp (Y_0 \varepsilon(f) + \sum_i Y_i S_i) + 1\}^{-1} , \qquad (4)$$

где самосогласованный гамильтониан квазичастицы $\varepsilon(f)$ связан с функционалом энергии соотношением

$$\varepsilon(f) = \frac{\partial E(f)}{\partial f} . \qquad (5)$$

Таким образом, предполагая заданным функционал энергии $E(f)$, можно рассматривать выражения (4) и (5) как систему уравнений для определения равновесных свойств ферми-жидкости.

Исследование неравновесных свойств ферми-жидкости основывается на зависящей от времени одночастичной матрице плотности $f(t)$, эволюция которой в пренебрежении столкновениями квазичастиц подчиняется кинетическому уравнению следующего вида:

$$i \frac{\partial f(t)}{\partial t} = [\varepsilon(f), f] . \qquad (6)$$

Поскольку функционал энергии $E(f)$ инвариантен относительно спиновых преобразований, имеем

$$E(UfU^+) = E(f) , \quad U = e^{i g_i \sigma_i} \qquad (7)$$

(g_i — некоторые произвольные вещественные параметры). Варьируя последнее соотношение по g_i, получаем

$$\mathop{\mathrm{Sp}}_{(\kappa)} \sigma_i [\varepsilon(f), f] = 0 . \qquad (8)$$

Из этого уравнения и кинетического уравнения (6) следует закон сохранения величины S_i. Заметим также, что из (7) и в силу определения (5) следует соотношение

$$U^+ \varepsilon(UfU^+) U = \varepsilon(f) .$$

Уравнения (4) и (6) при конкретном выборе $E(f)$ представляют собой систему уравнений для исследования колебательных мод ферми-жидкости.

Переходя от описания в терминах одночастичной матрицы плотности f к описанию в терминах вигнеровской функции распределения

$$f(\mathbf{x},\ \mathbf{p},\ t) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{qx}} f_{\mathbf{p+q}/2,\ \mathbf{p-q}/2}$$

(являющейся функцией в пространстве $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$ и матрицей по индексам σ), получаем из (6) в приближении малых градиентов

$$i\,\frac{\partial f(t)}{\partial t} = [\varepsilon(f),\ f] - \frac{i}{2}\left\{\frac{\partial \varepsilon(f)}{\partial \mathbf{p}},\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right\} + \frac{i}{2}\left\{\frac{\partial \varepsilon(f)}{\partial \mathbf{x}},\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\right\}, \tag{9}$$

где $[\ldots,\ \ldots]$ и $\{\ldots,\ \ldots\}$ обозначают соответственно коммутатор и антикоммутатор в «пространстве спина» [4].

Выражение (5) и уравнение (9) представляют собой замкнутую самосогласованную систему уравнений, которая будет служить основой для исследования малых колебаний магнитоупорядоченной ферми-жидкости.

Приступая к решению уравнения (9), выберем спиново-упорядоченное состояние в качестве равновесного, считая при этом, что $Y_i = 0$. Последнее означает, что мы будем иметь дело с фазовым переходом II рода, тогда как при $Y_i \neq 0$ фазовый переход в магнитоупорядоченное состояние будет являться фазовым переходом I рода.

Согласно (4), это состояние описывается матрицей плотности

$$f(\hat{\varepsilon}) = (e^{Y_0\hat{\varepsilon}+Y} + 1)^{-1} = \frac{1+\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}}{2}\, f_+ + \frac{1-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}}{2}\, f_-\ , \tag{10}$$

где
$$f_\pm = (e^{Y_0\varepsilon_\pm + Y} + 1)^{-1} = f(\varepsilon_\pm)\ , \tag{11}$$

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1+\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}}{2}\,\varepsilon_+ + \frac{1-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}}{2}\,\varepsilon_-\ . \tag{12}$$

В этом случае уравнение (9) допускает решение, которое соответствует колебаниям плотности и спина над спиново-упорядоченным состоянием. Одночастичную матрицу плотности $f(t) = \hat{f}$, описывающую такие колебания, можно представить в виде

$$\hat{f} = \frac{1+\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}}{2}\,\hat{f}_+ + \frac{1-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}}{2}\,\hat{f}_- + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma}\mathbf{f}\ ,\quad \mathbf{nf} = 0\ . \tag{13}$$

Легко видеть, что величины $\hat{f}_\pm$ и $\mathbf{f}$ связаны с $\hat{f}$ соотношениями

$$\hat{f}_\pm = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\hat{f} \pm \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\ , \tag{14}$$

$$\mathbf{f} = \mathrm{Sp}\,\hat{f}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{n}n_i\,\mathrm{Sp}\,\sigma_i\,\hat{f}\ . \tag{15}$$

Функционал энергии $E(\hat{f})$ при этом имеет вид

$$E(\hat{f}) = E_0(\hat{f}) + E'(\hat{f})\ ,$$

где $E_0(\hat{f})$ — функционал кинетической энергии фермионов

$$E_0(\hat{f}) = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}}\,\mathrm{Sp}\,\hat{f} = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}}(\hat{f}_+ + \hat{f}_-)$$

и $E'(\hat{f})$ — функционал энергии взаимодействия фермионов

$$E'(\hat{f}) = \frac{1}{2V}\sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}\{\mathrm{Sp}\,\hat{f}F(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}\,' + \mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\sigma}\hat{f}F_s(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')\,\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\sigma}\hat{f}\,'\} =$$

$$= \frac{1}{2V}\sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}\{(\hat{f}_+ + \hat{f}_-)F(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')(\hat{f}\,'_+ + \hat{f}\,'_-) + (\hat{f}_+ - \hat{f}_-)F_s(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')(\hat{f}\,'_+ - \hat{f}\,'_-) + \mathbf{f}F_s(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')\mathbf{f}'\}\ . \tag{16}$$

Это позволяет представить гамильтониан квазичастицы в виде

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1+\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}}{2}\,\varepsilon_+ + \frac{1-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}}{2}\,\varepsilon_- + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma\varepsilon}\ ,\quad \mathbf{n}\boldsymbol{\varepsilon} = 0\ , \tag{17}$$

где

$$\varepsilon_+ = \frac{\partial E(\hat{f})}{\partial \hat{f}_+} = \varepsilon_{\mathbf{p}} + \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}'}\{F(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')(\hat{f}\,'_+ + \hat{f}\,'_-) + F_s(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')(\hat{f}\,'_+ - \hat{f}\,'_-)\}\ , \tag{18}$$

$$\varepsilon_- = \frac{\partial E(\hat f)}{\partial \hat f_-} = \varepsilon_{\mathbf p} + \frac{1}{V}\sum_{\mathbf p'} \{F(\mathbf p, \mathbf p')(\hat f'_+ + \hat f'_-) - F_s(\mathbf p, \mathbf p')(\hat f'_+ - \hat f'_-)\} \ ,$$

$$\frac{1}{2}\,\boldsymbol\varepsilon = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf p'} F_s(\mathbf p, \mathbf p')\mathbf f' \ . \qquad (19)$$

Поскольку в состоянии статистического равновесия $\hat f_\pm = f_\pm$, $\mathbf f = 0$, формулы (18) и (10) образуют замкнутую систему уравнений для нахождения равновесной матрицы плотности $f(\hat\varepsilon)$.

Полагая в уравнении (9) $f(t) = f + \hat g$ и проводя линеаризацию по $\hat g$ (f — равновесная матрица плотности (10), $\hat g \sim e^{-i\omega t + i\mathbf{kr}}$ — малое отклонение от равновесного состояния), получаем

$$-i\omega g + i[\hat\varepsilon, \hat g] + i[\delta\hat\varepsilon, f] +$$

$$+\frac{i}{2}\left\{\mathbf k\,\frac{\partial\varepsilon(f)}{\partial\mathbf p}\ ,\ \hat g\right\} - \frac{i}{2}\left\{\delta\hat\varepsilon,\ \mathbf k\,\frac{\partial f}{\partial\mathbf p}\right\} = 0 \ , \qquad (20)$$

где

$$\delta\hat\varepsilon = \frac{1+\boldsymbol\sigma\mathbf n}{2}\,\delta\varepsilon_+ + \frac{1-\boldsymbol\sigma\mathbf n}{2}\,\delta\varepsilon_- + \frac{1}{2}\,\boldsymbol\sigma\,\delta\boldsymbol\varepsilon \ , \qquad (21)$$

величины $\delta\varepsilon_+$, $\delta\varepsilon_-$ и $\delta\boldsymbol\varepsilon$ определяются формулами

$$\delta\varepsilon_+ = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf p'} \{F(\mathbf p, \mathbf p')(g'_+ + g'_-) + F_s(\mathbf p, \mathbf p')(g'_+ - g'_-)\} \ , \qquad (22)$$

$$\delta\varepsilon_- = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf p'} \{F(\mathbf p, \mathbf p')(g'_+ + g'_-) - F_s(\mathbf p, \mathbf p')(g'_+ - g'_-)\} \ , \qquad (23)$$

$$\frac{1}{2}\,\delta\boldsymbol\varepsilon = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf p'} F_s(\mathbf p, \mathbf p')\mathbf g' \ , \qquad (24)$$

причем

$$\hat g = \frac{1+\boldsymbol\sigma\mathbf n}{2}\,g_+ + \frac{1-\boldsymbol\sigma\mathbf n}{2}\,g_- + \frac{1}{2}\,\boldsymbol\sigma\mathbf g \ , \quad \mathbf{ng} = 0 \ . \qquad (25)$$

Система уравнений (20)–(25) будет служить основой для нахождения спектров колебаний плотности и плотности спина над спиново-упорядоченным состоянием ферми-жидкости. Отметим, что, как будет показано далее, в отсутствие магнитного упорядочения ($f_+ = f_-$, см. (11)), уравнения (20)–(25) описывают звуковые колебания нормальной ферми-жидкости, а в магнитоупорядоченной ферми-жидкости наряду с продольными появляются дополнительные поперечные ветви колебаний (спиновые волны). Причем одна из этих ветвей является безактивационной (теорема Голдстоуна).

Система уравнений (20)–(25) допускает два класса решений, а именно, продольные колебания (спин колеблется вдоль направления $\mathbf n$), для которых $\mathbf g = 0$, $g_+ \neq 0$, $g_- \neq 0$, и поперечные (спин колеблется в плоскости ортогональной направлению $\mathbf n$), для которых $\mathbf g \neq 0$, $\mathbf{ng} = 0$, $g_+ = g_- = 0$.

Прежде чем перейти к исследованию поперечных мод, выясним, каким образом модифицируются продольные моды при наличии магнитного упорядочения. Уравнение (9) допускает решение, для которого $\mathbf g = 0$ (продольные колебания) и $\delta\boldsymbol\varepsilon = 0$, а $g_\pm$ удовлетворяют уравнениям

$$(\omega - \mathbf{kv})g_\pm - \mathbf k\,\frac{\partial f}{\partial\mathbf p}\,\delta\varepsilon_\pm = 0 \ , \qquad (26)$$

причем $\delta\varepsilon_\pm$ связаны с $g_\pm$ формулами (22), (23), которые представим в виде

$$\delta\varepsilon_\pm = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf p'} \{F_\pm(\mathbf p, \mathbf p')g'_+ + F_\mp(\mathbf p, \mathbf p')g'_-\} \ , \qquad (27)$$

$$F_\pm(\mathbf p, \mathbf p') = F(\mathbf p, \mathbf p') \pm F_s(\mathbf p, \mathbf p') \ .$$

Колебания, описываемые уравнением (26), будем называть продольными относительно направления намагниченности $\mathbf n$.

Замечая, что $\partial f_\pm/\partial\mathbf p = \mathbf v_\pm(\partial f_\pm/\partial\varepsilon_\pm)$ ($\mathbf v_\pm = \mathbf n v_\pm$), и вводя обозначения

$$K_\pm(s_\pm) = \int d^3p\,\frac{\cos\vartheta}{s_\pm - \cos\vartheta}\,\frac{\partial f_\pm}{\partial\varepsilon_\pm}\ , \quad s_\pm = \frac{\omega}{kv_\pm}\ ,$$

приходим к дисперсионному уравнению в случае, когда амплитуды $F_\pm$ являются постоянными, не зависящими от импульсов величинами

$$1 + (K_+ + K_-)F_+ + K_+K_-(F_+^2 - F_-^2) = 0 \qquad (28)$$

или

$$1 + (K_+ + K_-)(F + F_s) + 4K_+K_-FF_s = 0 \ . \qquad (29)$$

При отсутствии магнитного упорядочения, когда $s_+ = s_- = s$, $K_+(s) = K_-(s) = K(s)$, это уравнение распадается на два уравнения

$$K(s) = -\frac{1}{2F}\ , \quad K(s) = -\frac{1}{2F_s} \qquad (30)$$

в соответствии с результатами теории Ландау [1]. Первое дисперсионное уравнение соответствует звуковым колебаниям плотности, а второе — колебаниям спиновой плотности.

3. Активационные спиновые волны

Перейдем теперь к описанию поперечных относительно вектора намагниченности $\mathbf{n}$ колебаний, когда $g_+ = g_- = 0$ и, следовательно, $\delta\varepsilon_+ = \delta\varepsilon_- = 0$. Имеем $\hat{g} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma}\mathbf{g}$, $\mathbf{n}\mathbf{g} = 0$, $\hat{\delta\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{n}\delta\boldsymbol{\varepsilon} = 0$. В этом случае

$$[\hat{g}, \hat{b}] = i(b_+ - b_-)[\mathbf{g}, \mathbf{n}]\boldsymbol{\sigma}\ , \quad \{\hat{g}, \hat{b}\} = (b_+ + b_-)\mathbf{g}\boldsymbol{\sigma}\ ,$$

где матрица $\hat{b}$ имеет вид

$$\hat{b} = \frac{1 + \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}}{2}\, b_+ + \frac{1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}}{2}\, b_-\ ,$$

поэтому представим кинетическое уравнение (20) в виде

$$(\omega - \frac{1}{2}\,\mathbf{k}(\mathbf{v}_+ + \mathbf{v}_-))\mathbf{g} + i(\varepsilon_+ - \varepsilon_-)[\mathbf{g}, \mathbf{n}] -$$

$$- i(f_+ - f_-)[\delta\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{n}] + \frac{1}{2}\,\mathbf{k}\left(\frac{\partial f_+}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial f_-}{\partial \mathbf{p}}\right)\delta\boldsymbol{\varepsilon} = 0\ . \quad (31)$$

Уравнения (26), (31) представляют собой полную систему уравнений для нахождения спектров колебательных мод намагниченной ферми-жидкости. Покажем, каким образом трансформируется эта система при отсутствии магнитного упорядочения. Уравнения (26) переходят при этом в следующие два уравнения:

$$(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})g - \mathbf{k}\,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\,\delta\varepsilon = 0\ ,$$

$$(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})g - \mathbf{k}\,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\,\delta\varepsilon_s = 0\ , \quad (32)$$

где

$$\delta\varepsilon = \frac{2}{V}\sum_{\mathbf{p}'} F(\mathbf{p}, \mathbf{p}')g(\mathbf{p}')\ ,$$

$$\delta\varepsilon_s = \frac{2}{V}\sum_{\mathbf{p}'} F_s(\mathbf{p}, \mathbf{p}')g(\mathbf{p}')\ .$$

Первое из уравнений (32) описывает колебания плотности ферми-жидкости (нуль-звук), тогда как второе является одним из трех уравнений, описывающих трехкратно вырожденные звуковые колебания спиновой плотности. Два других уравнения для спиновых колебаний (по форме совпадающие со вторым из уравнений (32)) получаются в пределе отсутствия намагниченности из уравнений (31).

Таким образом, мы показали, что в отсутствие магнитного упорядочения ($f_+ = f_-$, см. (11)), уравнения (26), (31) описывают звуковые и спин-звуковые колебания нормальной ферми-жидкости.

Вернемся к уравнению (31). Переходя в этом уравнении к циркулярным компонентам векторов $\mathbf{g}$, $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ относительно вектора $\mathbf{n}$ (ось z)

$$g_{(\pm)} = g_1 \pm ig_2\ , \quad \delta\varepsilon_{(\pm)} = \delta\varepsilon_1 \pm i\delta\varepsilon_2$$

и замечая, что $[\mathbf{g}, \mathbf{n}]_{(\pm)} = \mp\, ig_{(\pm)}$, преобразуем уравнение (31) к виду

$$\left(\omega - \frac{1}{2}\,\mathbf{k}(\mathbf{v}_+ + \mathbf{v}_-)\right)g_{(\pm)} \pm (\varepsilon_+ - \varepsilon_-)g_{(\pm)} \mp$$

$$\mp\ (f_+ - f_-)\delta\varepsilon_{(\pm)} + \frac{1}{2}\,\mathbf{k}\left(\frac{\partial f_+}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial f_-}{\partial \mathbf{p}}\right)\delta\varepsilon_{(\pm)} = 0\ , \quad (33)$$

где

$$\delta\varepsilon_{(\pm)} = \frac{2}{V}\sum_{\mathbf{p}'} F_s(\mathbf{p}, \mathbf{p}')g'_{(\pm)} \equiv 2\int d\tau'\, F_s(\mathbf{p}, \mathbf{p}')g'_{(\pm)}\ , \quad (34)$$

и, согласно (18), для состояния статистического равновесия справедливо соотношение

$$\varepsilon_+ - \varepsilon_- = 2\int d\tau'\, F_s(\mathbf{p}, \mathbf{p}')(f'_+ - f'_-)\ . \quad (35)$$

Ясно, что решение $g_{(+)}$ может быть получено из решения $g_{(-)} \equiv g$ изменением знака частоты ω и волнового вектора $\mathbf{k}$.

Проанализируем сначала решение уравнения (33) в случае, когда спиновая амплитуда F_s не зависит от $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$. При $T \ll \mu$ ($\mu = -Y/Y_0$ — химический потенциал ферми-системы) уравнение (33) принимает вид

$$(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})g + 2\beta g + 2(f_+ - f_-)F_s\, q -$$

$$- F_s\, q(\mathbf{k}\mathbf{v}_+\, \delta(\varepsilon_+ - \mu) + \mathbf{k}\mathbf{v}_-\, \delta(\varepsilon_- - \mu)) = 0\ , \quad (36)$$

где

$$\beta = -F_s\int d\tau\, (f_+ - f_-)\ , \quad (37)$$

$$q = \int d\tau'\, g(\mathbf{p}')\ , \quad \mathbf{u} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-)\ .$$

Из этого уравнения следует, что при условии $q \neq 0$ имеет место дисперсионное уравнение

$$1/F_s =$$

$$= \int \frac{d\tau}{\omega - \mathbf{ku} + 2\beta} \left(\mathbf{kv}_+ \delta(\varepsilon_+ - \mu) + \mathbf{kv}_- \delta(\varepsilon_- - \mu) - 2(f_+ - f_-)\right), \tag{38}$$

решение которого в области малых k имеет вид*

$$\omega = \frac{\int d\tau\, u^2\{(f_+ - f_-) - \beta(\delta(\varepsilon_+ - \mu) + \delta(\varepsilon_- - \mu)\}}{6\beta \int d\tau (f_+ - f_-)}\, k^2 \, . \tag{39}$$

При этом мы использовали соотношение (37). Кроме этого решения при $\mathbf{k} = 0$ имеет место бесконечнократно вырожденное активационное решение $\omega = -2\beta$, $q = 0$.

Решению (38) соответствуют голдстоуновские спиновые волны, возникающие благодаря спонтанному нарушению симметрии.

В области больших k (и больших ω) уравнение (38) принимает вид

$$\frac{1}{F_s} = \int \frac{d\tau}{\omega - \mathbf{ku}} \left(\mathbf{v}_+ \delta(\varepsilon_+ - \mu) + \mathbf{v}_- \delta(\varepsilon_- - \mu)\right)\mathbf{k} \tag{40}$$

и его решение соответствует поперечному относительно $\mathbf{k}$ спиновому звуку $\omega = sk$ в магнитоупорядоченном состоянии.

В приближении слабого магнетизма (или вблизи температуры перехода) решение (39) принимает вид

$$\omega = k^2 \frac{2v_F^2}{3\alpha_F} \, , \tag{41}$$

где величина α_F связана с намагниченностью соотношением

$$\alpha_F \nu_F = -2 \int d\tau \, \mathrm{Sp}\, f \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, ,$$

$$\nu_F = 2 \int d\tau \, \delta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu) \, . \tag{42}$$

Уравнение (40) в случае слабого магнетизма переходит в обычное уравнение для спинового звука (см. (30)).

Перейдем теперь к анализу уравнения (33) в том случае, когда амплитуда Ландау $F_s(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ зависит от угла между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$. При этом будем использовать приближение слабого магнетизма, т.е. положим $f_+ - f_- = (\partial f_0/\partial\varepsilon)(\varepsilon_+ - \varepsilon_-)$. Кроме того, считая волновой вектор $\mathbf{k}$ малым, в соответствующих членах в уравнении (33) пренебрежем различием между ε_+ и ε_- . Тогда уравнение (33) примет вид

$$(\omega - \mathbf{kv})g - (\varepsilon_+ - \varepsilon_-)g +$$

$$+ \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} (\varepsilon_+ - \varepsilon_-)\delta\varepsilon_- + \mathbf{kv}\, \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\, \delta\varepsilon_- = 0 \, .$$

Замечая, что, согласно (34),

$$\delta\varepsilon_- = 2 \int d\tau' F_s(\mathbf{p}, \mathbf{p}') d(\mathbf{p}')$$

и используя (35) при $T << \mu$

$$1 = 2 \int d\tau' \, F_s(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\delta(\varepsilon - \mu)$$

(это уравнение определяет химический потенциал μ при $T = 0$), получаем

$$(\omega - \mathbf{kv})g - (\varepsilon_+ - \varepsilon_-)\, 2 \int d\tau' \, F_s(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\delta(\varepsilon' - \mu) g(\mathbf{p}') -$$

$$- (\varepsilon_+ - \varepsilon_-)\delta(\varepsilon - \mu)\, 2 \int d\tau' F_s(\mathbf{p}, \mathbf{p}') g(\mathbf{p}') -$$

$$- \mathbf{kv}\delta(\varepsilon - \mu)\, 2 \int d\tau' \, F_s(\mathbf{p}, \mathbf{p}') g(\mathbf{p}') = 0 \, .$$

Отсюда видно, что решение этого уравнения следует искать в виде

$$g(\mathbf{p}) = \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\, g(\cos\vartheta) \, ,$$

(ϑ — угол между вектором импульса $\mathbf{p}$ частицы и волновым вектором $\mathbf{k}$). Величина $g(\cos\vartheta)$ удовлетворяет при этом уравнению

$$(\omega - \mathbf{kv})g(\cos\vartheta) - \alpha_F\, g(\cos\vartheta)\, \frac{\nu_F}{4\pi} \int d o' \, F_s(\cos\theta) +$$

* Отметим, что в аналогичной формуле (17) работы [3] второй член в числителе содержит неправильный коэффициент.

$$+ \alpha_F \frac{\nu_F}{4\pi} \int do'\, F_s(\cos\theta) g(\cos\vartheta') +$$

$$+ \mathbf{kv} \frac{\nu_F}{4\pi} \int do'\, F_s(\cos\theta) g(\cos\vartheta') = 0 \ , \qquad (43)$$

здесь θ — угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$, и использованы обозначения (42).

Разложим $g(\cos\vartheta)$ и $\nu_F F_s(\cos\theta) \equiv B(\cos\theta)$ в ряд по полиномам Лежандра

$$g(\cos\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} g_l P_l(\cos\vartheta) \ ,$$
$$B(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l P_l(\cos\theta) \ , \qquad (44)$$

где g_l и B_l — коэффициенты разложения.

Учитывая формулу суммирования

$$P_l(\cos\theta) = P_l(\cos\vartheta) P_l(\cos\vartheta') +$$
$$+ \sum_{m=1}^{l} \frac{2(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos\vartheta) P_l^m(\cos\vartheta') \cos m(\varphi - \varphi') \ ,$$

а также условие ортогональности полиномов Лежандра

$$\int do\, P_l(\cos\vartheta) P_{l'}(\cos\vartheta) = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll'} \ ,$$

получаем

$$\int do'\, B(\cos\theta) = 4\pi B_0 \ , \qquad (45)$$

$$\int do'\, B(\cos\theta) g(\cos\vartheta') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l g_l}{2l+1} P_l(\cos\vartheta) \ .$$

Подставляя (44) и (45) в уравнение (41) и учитывая, что для полиномов Лежандра имеет место соотношение

$$x P_l(x) = \frac{l+1}{2l+1} P_{l+1}(x) + \frac{l}{2l+1} P_{l-1}(x) \ ,$$

запишем уравнение (43) в следующем виде:

$$(\omega - \omega_l) g_l = a_l\, g_{l-1} + b_l\, g_{l+1} \ , \qquad (46)$$

где введены обозначения

$$\omega_l = \alpha_F \left(B_0 - \frac{B_l}{2l+1} \right) , \qquad (47)$$

$$a_l = \mathbf{kv} \frac{l}{2l-1} \left(1 - \frac{B_{l-1}}{2l-1} \right) , \qquad (48)$$

$$b_l = \mathbf{kv} \frac{l+1}{2l+3} \left(1 - \frac{B_{l+1}}{2l+3} \right) . \qquad (49)$$

Выражение (47) определяет частоты поперечных колебаний при $\mathbf{k} = 0$. Как видно, мода с $l = 0$ является безактивационной ($\omega_0 = 0$), тогда как частоты ω_l при $l = 1, 2, \ldots$ отличны от нуля. Заметим, что если спиновая ферми-амплитуда не зависит от $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$, то выражение (47) принимает вид

$$\omega_l = \alpha_F B_0 (1 - \delta_{l,0}) \ . \qquad (50)$$

В этом случае, очевидно, при $k = 0$ имеется бесконечнократно вырожденная активационная мода

$$\omega_l = \alpha_F B_0 \ , \quad l = 1, 2, \ldots \qquad (51)$$

Вырождение снимается при учете зависимости спиновой ферми-амплитуды Ландау от угла θ между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$.

Решение уравнения (46) можно искать в виде ряда по степеням $|\mathbf{k}|$ (напомним, что, согласно (48), (49), $a_l \sim |\mathbf{k}|$ и $b_l \sim |\mathbf{k}|$)

$$\omega = \omega^{(0)} + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \ldots \ ,$$

$$g_l = g_l^{(0)} + g_l^{(2)} + g_l^{(3)} + \ldots \ .$$

Зафиксируем некоторое целое неотрицательное число r. Тогда для решения уравнения (46) в нулевом приближении будем иметь

$$\omega^{(0)} = \omega_r \ , \quad g_l^{(0)} = g_r^{(0)} \delta_{r,l} \ .$$

С учетом этого обстоятельства уравнение для нахождения первого приближения имеет вид

$$\omega_r^{(1)} g_l^{(0)} + \omega_r\, g_l^{(1)} - \omega_l\, g_l^{(1)} = a_l\, g_{l-1}^{(0)} + b_l\, g_{l+1}^{(0)} \ .$$

Полагая $l = r$, получаем $\omega_r^{(1)} = 0$, при $l \neq r$ имеем

$$g_l^{(1)} = g_r^{(0)} \frac{a_l\, \delta_{l-1,r} + b_l\, \delta_{l+1,r}}{\omega_r - \omega_l} \ . \qquad (52)$$

Откуда видно, что в спектре поперечных колебаний магнитоупорядоченной ферми-жидкости не содержится линейных по $|\mathbf{k}|$ слагаемых.

Во втором приближении теории возмущений по волновому вектору **k** уравнение (46) принимает вид

$$\omega_r^{(2)} g_l^{(0)} + \omega_r\, g_l^{(2)} - \omega_l\, g_l^{(2)} = a_l\, g_{l-1}^{(1)} + b_l\, g_{l+1}^{(1)} \ .$$

При $l = r$ это уравнение можно представить следующим образом:

$$\omega_r^{(2)} g_r^{(0)} = a_r\, g_{r-1}^{(1)} + b_r\, g_{r+1}^{(1)} \ .$$

Замечая, что, согласно (52),

$$g_{r-1}^{(1)} = g_r^{(0)} \frac{b_{r-1}}{\omega_r - \omega_{r-1}} \ , \quad g_{r+1}^{(1)} = g_r^{(0)} \frac{a_{r+1}}{\omega_r - \omega_{r+1}} \ ,$$

получаем

$$\omega = \omega_r + \frac{a_r\, b_{r-1}}{\omega_r - \omega_{r-1}} + \frac{a_{r+1}\, b_r}{\omega_r - \omega_{r+1}} + \dots \ , \qquad (53)$$

где a_r и b_r определяются выражениями (48), (49) соответственно.

Выражение (53) справедливо при $r = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$ Однако из вывода ясно, что при $r = 0$ справедлива формула

$$\omega = -\frac{a_1\, b_0}{\omega_1} \ , \qquad (54)$$

которая показывает, что $\omega \sim k^2$. Следовательно, при $r = 0$ мы приходим к безактивационному спектру спиновых волн, установленному в рамках модели ферми-жидкости в работе [3]. Ветвь колебаний (54) является голдстоуновской ветвью, возникающей при спонтанном нарушении симметрии состояния статистического равновесия, связанном с появлением намагниченности. Если $F_s = \text{const}$, то спектр (54) определяется формулой

$$\omega = \frac{2(k v_F)^2}{3\alpha_F} \ , \ B_0 = -1 \ ,$$

которая, как и следовало ожидать, совпадает с формулой (41).

Частота активации в спектре (53) определяется величиной ω_r. Для $F_s = \text{const}$ активационная частота $\omega_r = \alpha_F\, B_0$ (см. (51)), как это уже было отмечено, одна и та же для всех значений r. Поэтому формулы (53) при $r = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$ становятся несправедливыми, если $F_s = \text{const}$. Для того чтобы найти область применимости этих формул, будем считать, что $B_r \sim B_{r-1}$. Тогда $\omega_r - \omega_{r-1} \sim \alpha_F\, B_r$, $\omega_r \sim \alpha_F$, $a_l \sim b_l \sim k v_F (1 + B_r)$. Поэтому условие применимости формул (53) имеет вид

$$(1 + B_r)^2 (k v_F)^2 << \alpha_F^2\, |B_r| \ .$$

Если амплитуда F_s близка к постоянной, то $|B_r| << 1$, и это условие можно переписать таким образом:

$$(k v_F)^2 << \alpha_F^2\, |B_r| \ .$$

Как видно, формулы (53) становятся применимыми только при аномально малых k.

Авторы благодарны INTAS за поддержку работы (грант № 94-3941). Авторы благодарны также Международной Соросовской программе поддержки образования в области точных наук (ISSEP).

1. Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **30**, 1058 (1956).
2. В. П. Силин, *ЖЭТФ* **35**, 1243 (1958).
3. А. А. Абрикосов, И. Е. Дзялошинский, *ЖЭТФ* **35**, 771 (1958).
4. А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).

Activation spin waves in Landau theory of Fermi liquid

A. I. Akhiezer, N. V. Laskin, and S. V. Peletminskii

Activation spectra of collective oscillations with the quadratic dispersion relations are investigated for a magnetically ordered Fermi liquid. It is shown that the spectrum activation spin waves depends appreciably on the structure of Landau interaction amplitude as a function of the angle between fermion quasi-momenta. It is supposed that the existence of activation spin waves will manifest itself in the processes of neutron and light scattering and wave transformation in magnetically ordered substances.