Low Temperature Physics/Физика низких температур, 2017, т. 43, № 12, с. 1715–1723

Спектры коллективных возбуждений и низкочастотная асимптотика функций Грина вырожденных состояний в магнетиках со спином *s* = 1

А.В. Глущенко, М.Ю. Ковалевский, В.Т. Мацкевич

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт» НАН Украины
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина
E-mail: glushchenko.ant@gmail.com, mik@kipt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 19 июня 2017 г., опубликована онлайн 25 октября 2017 г.

Дано феноменологическое описание эволюции неравновесных вырожденных состояний одно- и многоподрешеточных магнетиков со спином $s = 1$ во внешнем поле. Получены динамические уравнения для магнитных степеней свободы, на основе которых вычислены низкочастотные асимптотики двухвременных функций Грина. Найдены спектры коллективных возбуждений в состояниях ферромагнетика, квадрупольного магнетика и спинового нематика. Проведен сравнительный анализ асимптотик функций Грина и выяснен характер магнитной анизотропии, обусловленный влиянием унитарной симметрии обменного взаимодействия.

Дано феноменологічний опис еволюції нерівноважних вироджених станів одно- та багатопідграткових магнетиків зі спіном $s = 1$ у зовнішньому полі. Отримано динамічні рівняння для магнітних ступенів свободи, на основі яких обчислено низькочастотні асимптотики двочасових функцій Гріна. Знайдено спектри колективних збуджень в станах феромагнетика, квадрупольного магнетика та спінового нематика. Проведено порівняльний аналіз асимптотик функцій Гріна та з’ясовано характер магнітної анізотропії, що обумовлений впливом унітарної симетрії обмінної взаємодії.

PACS: **75.10.–b** Общая теория и модели магнитного упорядочения.

Ключевые слова: спин, симметрия, динамика, спектры возбуждений, функции Грина.

1. Введение

Исследование высокоспиновых магнетиков, структурные элементы которых обладают спином $s > 1/2$, является областью большого научного интереса и внимания современной физики. В таких многочастичных системах возможны новые коллективные свойства материи и необычные типы магнитного упорядочения [1–5]. К ним, в частности, относятся спиновый нематик, квадрупольное упорядочение и другие состояния, которые отсутствуют в магнетиках со спином $s = 1/2$. Появление степеней свободы, вызванных иной унитарной симметрией SU(n), $n > 2$ обменного взаимодействия, и различные способы ее нарушения в состоянии равновесия ведут к нетривиальным магнитным свойствам таких физических объектов [6–8]. Вопросам теоретического описания состояний равновесия и динамическим процессам в магнетиках со спином $s = 1$ посвящены работы [9–13]. Сложность этих магнетиков, в частности, проявляется в том, что количество возможных осей магнитной анизотропии, которые макроскопически полно характеризуют вырожденные состояния, изменяется от одного до шести [14]. Объектами экспериментальных исследований являются слоистый магнитный изолятор $NiGa_2S_4$ [15,16], соединения $NiGaS_2$ [17] и CeB_6, UPd_3 [18–20], одномерные спиновые цепочки $LiCuVO_4$ [8,21,22].

Ожидаемое разнообразие фаз высокоспиновых магнетиков возможно для вырожденных состояний равновесия. Их теоретическое рассмотрение существенно опирается на концепцию спонтанно нарушенной симметрии [23], которая привела к установлению характера убывания корреляций в таких состояниях, соединила нарушенную симметрию и бесщелевую моду при малых волновых векторах (теорема Голдстоуна), установила взаимосвязь остаточной симметрии с вопросом классификации состояний равновесия [24–27].

Эффективным инструментом исследования магнитных систем являются двухвременные функции Грина

[28–31], знание которых позволяет понять, как состояние равновесия, так и особенности неравновесных процессов, если отклонения от равновесия малы. Для нахождения этих величин, как правило, используют различного рода приближенные методы. К ним, в частности, относятся квазичастичное приближение, метод случайных фаз, разложение по малому параметру и аппроксимации с неконтролируемым характером приближения [29–32]. Вышеуказанные методы использовались в [33–35] при изучении свойств двухвременных функций Грина высокоспиновых магнетиков.

Вычисление функций Грина в области малых частот и волновых векторов тесно связано с поведением физической системы при больших временах. Это позволяет использовать наши знания о макроскопической динамике высокоспиновых магнетиков для нахождения таких функций в «гидродинамической» области спектра. Вычисление этих асимптотик функций Грина получило свое развитие для сверхтекучих жидкостей и вырожденных магнитных систем со спином s = 1/2 [36–41]. В настоящей работе на основе феноменологического подхода, использующего гамильтонову механику, изучена динамика вырожденных магнетиков со спином s = 1 во внешнем поле, найдены низкочастотные асимптотики функций Грина и рассмотрено влияние некоторых физических факторов на их структуру. К ним относится различие в описании одно- и многоподрешеточных магнетиков. Другим фактором является учет SO(3) или SU(3) симметрии обменного взаимодействия. Полученные результаты могут быть полезны при исследовании неупругого рассеяния в таких средах холодных нейтронов, или других частиц, которые имеют спин $s > 1/2$, с целью установления макроскопических свойств их магнитного состояния.

Структура статьи такова: в разд. 2 в рамках гамильтонова формализма введены магнитные степени свободы для одно- и многоподрешеточных магнетиков со спином s = 1. В разд. 3 сформулированы нелинейные уравнения динамики изучаемых магнетиков во внешнем поле и обсуждается их связь с низкочастотными асимптотиками двухчастичных функций Грина. В разд. 4 рассмотрены состояния квадрупольного магнетика и ферромагнетика с SU(3) и SO(3) симметрией обменного модельного гамильтониана. Найдены асимптотики двухвременных функций Грина и спектры коллективных возбуждений, которые учитывают различие унитарной симметрии обменного взаимодействия. В разд. 5 рассмотрена динамика неравновесных состояний спинового нематика во внешнем поле, вычислены низкочастотные особенности функций Грина и спектры магнитных возбуждений. Отмечено сходство и различие асимптотик функций Грина в этих состояниях и в состояниях с ферро- и квадрупольным магнитным упорядочением.

2. Магнитные степени свободы в одно- и многоподрешеточных магнетиках со спином *s* = 1 и их скобки Пуассона

В изучении неравновесных процессов вырожденных состояний магнетиков со спином s = 1 мы следуем феноменологическому подходу работы [14]. Макроскопические состояния таких магнетиков характеризуются степенями свободы, которыми являются эрмитовые и бесследные 3×3 матрицы $\hat{g}(\mathbf{x})$ и $\hat{a}(\mathbf{x})$, удовлетворяющие скобкам Пуассона:

$$i\left\{g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), g_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\right\} = \left(g_{\gamma\beta}(\mathbf{x})\delta_{\alpha\rho} - g_{\alpha\rho}(\mathbf{x})\delta_{\gamma\beta}\right)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \tag{2.1}$$

$$i\left\{a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), g_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\right\} = \left(a_{\gamma\beta}(\mathbf{x})\delta_{\alpha\rho} - a_{\alpha\rho}(\mathbf{x})\delta_{\gamma\beta}\right)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),$$
$$\left\{a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), a_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\right\} = 0. \tag{2.2}$$

Здесь $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера и $\delta(\mathbf{x})$ — дельта функция Дирака. Матрица $\hat{g}(\mathbf{x})$ представляет собой плотность генератора SU(3) симметрии. Величина $\hat{G} \equiv \int d^3x\hat{g}(\mathbf{x})$ есть аддитивный интеграл движения по отношению к обменному SU(3) симметричному гамильтониану в магнетиках со спином s = 1. Матрица $\hat{a}(\mathbf{x})$ имеет физический смысл параметра порядка вырожденных состояний в многоподрешеточных магнетиках со спином s = 1. В одноподрешеточных магнетиках плотность генератора SU(3) симметрии задает полный набор магнитных степеней свободы. Гамильтониан является функционалом этой величины $H(\hat{g}) = \int d^3xe\left(\mathbf{x}, \hat{g}(\mathbf{x}')\right)$. Плотность обменной энергии $e\left(\mathbf{x}, \hat{g}(\mathbf{x}')\right) \approx e\left(\hat{g}(\mathbf{x}), \nabla\hat{g}(\mathbf{x})\right)$ — функция этой матрицы и ее градиента. В случае нескольких магнитных подрешеток, гамильтониан является функционалом двух матриц $H = H\left(\hat{g}(\mathbf{x}), \hat{a}(\mathbf{x})\right)$, а плотность энергии $e(\mathbf{x}) = e\left(\hat{g}(\mathbf{x}), \nabla\hat{g}(\mathbf{x}), \hat{a}(\mathbf{x}), \nabla\hat{a}(\mathbf{x})\right)$ — функция обеих матриц и их градиентов. Действительные магнитные степени свободы для спин s = 1 магнетиков — плотность спина $s_\alpha(\mathbf{x})$ и квадрупольная матрица $q_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ — связаны с матрицей $\hat{g}(\mathbf{x})$ соотношением

$$g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \equiv q_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma(\mathbf{x})/2. \tag{2.3}$$

Квадрупольная матрица симметрична и бесследна $q_{\alpha\beta} = q_{\beta\alpha}$, $q_{\alpha\alpha} = 0$. Пять ее независимых компонент параметризуем следующим соотношением:

$$q_{\alpha\beta} = q_1(e_\alpha e_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3) + q_2(f_\alpha f_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3).$$

Здесь q_1, q_2 скалярные параметры этой матрицы. Оси магнитной анизотропии $e_\alpha, f_\alpha, d_\alpha = (\mathbf{e}\times\mathbf{f})_\alpha$ образуют ортонормированный репер. Согласно (2.1), (2.3), плотность спина $s_\alpha(\mathbf{x})$ удовлетворяет скобке Пуассона:

$$\left\{s_\alpha(\mathbf{x}), s_\beta(\mathbf{x}')\right\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma(\mathbf{x}). \tag{2.4}$$

Для квадрупольной матрицы, в силу определений (2.1), (2.3), найдем соотношения

$$\left\{s_\alpha(\mathbf{x}), q_{\beta\gamma}(\mathbf{x}')\right\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\left(\varepsilon_{\alpha\beta\rho}q_{\rho\gamma}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\alpha\gamma\rho}q_{\rho\beta}(\mathbf{x})\right),$$

$$\left\{q_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), q_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\right\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')s_\gamma(\mathbf{x})\times \times\left(\varepsilon_{\gamma\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} + \varepsilon_{\gamma\beta\mu}\delta_{\alpha\nu} + \varepsilon_{\gamma\beta\nu}\delta_{\alpha\mu} + \varepsilon_{\gamma\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\right)/4. \qquad (2.5)$$

Алгебра скобок Пуассона (2.4), (2.5) необходима для описания динамики одноподрешеточных магнетиков с SU(3) симметрией гамильтониана в терминах плотности спина и квадрупольной матрицы. Аналогичным образом эрмитову матрицу $\hat{a}(\mathbf{x})$ свяжем с действительными физическими величинами соотношением

$$a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \equiv m_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}n_\gamma(\mathbf{x})/2. \qquad (2.6)$$

Симметричный и бесследный тензор $\hat{m}(\mathbf{x})$ имеет физический смысл нематического параметра порядка. Антисимметричная часть матрицы $\hat{a}(\mathbf{x})$ определяет антиферромагнитный параметр порядка $\mathbf{n}(\mathbf{x})$. Для введенных магнитных степеней свободы получим, используя (2.2), (2.3), (2.6), скобки Пуассона:

$$\left\{s_\alpha(\mathbf{x}), n_\beta(\mathbf{x}')\right\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}n_\gamma(\mathbf{x}), \qquad (2.7)$$

$$\left\{n_\alpha(\mathbf{x}), q_{\beta\gamma}(\mathbf{x}')\right\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\left(\varepsilon_{\alpha\beta\rho}m_{\rho\gamma}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\alpha\gamma\rho}m_{\rho\beta}(\mathbf{x})\right),$$

$$\left\{s_\alpha(\mathbf{x}), m_{\beta\gamma}(\mathbf{x}')\right\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\left(\varepsilon_{\alpha\gamma\rho}m_{\beta\rho}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\alpha\beta\rho}m_{\gamma\rho}(\mathbf{x})\right),$$

$$\left\{m_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), q_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\right\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')n_\gamma(\mathbf{x})\times \times\left(\varepsilon_{\alpha\nu\gamma}\delta_{\beta\mu} + \varepsilon_{\beta\mu\gamma}\delta_{\alpha\nu} + \varepsilon_{\beta\nu\gamma}\delta_{\alpha\mu} + \varepsilon_{\alpha\mu\gamma}\delta_{\beta\nu}\right)/4.$$

Формулы (2.4), (2.5), (2.7) позволяют выявить подалгебры скобок Пуассона и установить динамику для некоторых физически важных типов упорядочения магнетиков со спином s = 1, которые характеризуются меньшим числом магнитных степеней свободы. Мы рассмотрим подалгебру скобок Пуассона для плотности спина и квадрупольной матрицы, которые описывают вырожденные ферро-, квадро- и ферроквадрупольные состояния в магнетиках с одной подрешеткой. Другой интересующий нас случай — это магнитные величины s_α и $m_{\alpha\beta}$, (2.4), (2.7), которые характеризуют состояния спинового нематика в многоподрешеточном магнетике.

3. Двухчастичные функции Грина и динамика магнетиков со спином s = 1 во внешнем поле

Двухвременные запаздывающие функции Грина определяются равенством [28]:

$$G_{ab}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}'t') \equiv -i\theta(t-t')\,\mathrm{Sp}\,\hat{\hat{w}}\left[\hat{\hat{a}}(\mathbf{x},t), \hat{\hat{b}}(\mathbf{x}',t')\right], \quad (3.1)$$

где $\hat{\hat{w}}$ — равновесный статистический оператор Гиббса. Произвольные локальные операторы $\hat{\hat{a}}(\mathbf{x},t) \equiv \mathrm{e}^{i\hat{\hat{H}}t}\hat{\hat{a}}(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-i\hat{\hat{H}}t}$, $\hat{\hat{b}}(\mathbf{x},t) \equiv \mathrm{e}^{i\hat{\hat{H}}t}\hat{\hat{b}}(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-i\hat{\hat{H}}t}$ в представлении Гейзенберга и квантовый гамильтониан являются функционалами бозе-операторов рождения и уничтожения. Средние локальных магнитных величин, для которых мы ищем функции Грина, имеют вид

$$a(\mathbf{x},t) = \mathrm{Sp}\,\hat{\hat{\rho}}\hat{\hat{a}}(\mathbf{x},t) = \mathrm{Sp}\,\hat{\hat{\rho}}(t)\hat{\hat{a}}(\mathbf{x}) = a_0 + \delta a(\mathbf{x},t),$$
$$b(\mathbf{x},t) = b_0 + \delta b(\mathbf{x},t),$$

где $\hat{\hat{\rho}}(t) = \hat{\hat{w}} + \delta\hat{\hat{\rho}}(t)$ — статистический оператор в момент времени t и $\delta\hat{\hat{\rho}}(t)$ — неравновесная поправка; $\delta a(\mathbf{x},t), \delta b(\mathbf{x},t)$ — отклонения физических величин от их равновесных значений a_0, b_0. Функция Грина связывает линейный отклик локальной физической величины $\delta a_\xi(\mathbf{x},t)$ и слабое внешнее возмущение:

$$\delta a_\xi(\mathbf{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x'\,\delta\xi(\mathbf{x}',t')G_{ab}(\mathbf{x}-\mathbf{x}', t-t').$$

Здесь $\delta\xi(\mathbf{x},t)$ — потенциал взаимодействия магнитной системы с внешним полем. В фурье-представлении это соотношение записывается в виде

$$\delta a_\xi(\mathbf{k},\omega) = G_{ab}(\mathbf{k},\omega)\delta\xi(\mathbf{k},\omega). \qquad (3.2)$$

С другой стороны, используя гамильтонов формализм, мы получим уравнения макроскопической динамики магнитных систем во внешнем поле. Линеаризованная версия этих уравнений связывает отклонение локальной физической величины δa и потенциал поля $\delta\xi$ и, тем самым, позволяет найти асимптотики двухвременных функций Грина в области низких частот $\omega\tau_r << 1$ и малых волновых векторов $kl << 1$. Здесь τ_r — время хаотизации (время установления локального равновесия магнитной системы) и l — характерные пространственные масштабы изменения физических величин. Полный гамильтониан магнитной системы при наличии внешнего поля имеет вид $H(t) = H + V(t)$. Здесь H — гамильтониан магнитной системы, который включает сильные обменные взаимодействия и слабые релятивистские взаимодействия. Энергия взаимодействия магнитной системы с внешним переменным полем $V(t)$ имеет вид

$$V(t) = \int d^3x\,\delta\xi(\mathbf{x},t)b(\mathbf{x},t), \qquad (3.3)$$

где $b(\mathbf{x},t)$ — вторая локальная физическая величина, для которой находятся функции Грина. Мы полагаем изменение внешнего поля достаточно медленным, так что характерная частота его изменения мала по сравнению с τ_r^{-1}. В этом случае физическая система успевает подстраиваться к мгновенным значениям поля. В области времен $t >> \tau_r$ зависимость от времени величины $b(\mathbf{x},t)$ осуществляется посредством магнитных степеней свободы. В случае одноподрешеточных магнетиков выполняется соотношение

$$b(\mathbf{x},t) \xrightarrow[t>>\tau_r]{} b\left(\mathbf{x}, \hat{g}(\mathbf{x}',t)\right) \approx b\left(\hat{g}(\mathbf{x},t)\right).$$

Для его справедливости характерные пространственные масштабы изменения физических величин должны быть много больше среднего межатомного расстояния, $l >> a$. Учитывая (2.1), (2.2), (3.3), получим уравнения магнитной динамики магнетиков во внешнем поле

$$\dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) = i\left[\hat{g}(\mathbf{x}), \frac{\delta\hat{H}(\hat{g})}{\delta g(\mathbf{x})}\right] + \hat{\eta}_g(\mathbf{x}, \hat{g}),$$

$$\hat{\eta}_g(\mathbf{x}, \hat{g}) = i\delta\xi(\mathbf{x})\left[\hat{g}(\mathbf{x}), \frac{\partial\hat{b}(\mathbf{x}, \hat{g}(\mathbf{x}))}{\partial g(\mathbf{x})}\right]. \tag{3.4}$$

В многоподрешеточных магнетиках при больших временах для локальной физической величины справедливо асимптотическое соотношение

$$b(\mathbf{x},t) \xrightarrow[t>>\tau_r]{} b\left(\mathbf{x}, \hat{g}(\mathbf{x}',t), \hat{a}(\mathbf{x}',t)\right) \approx b\left(\hat{g}(\mathbf{x},t), \hat{a}(\mathbf{x},t)\right),$$

которое учитывает магнитные степени свободы, связанные с параметром порядка. Аналогичным образом найдем уравнения динамики для матриц $\hat{g}(\mathbf{x})$ и $\hat{a}(\mathbf{x})$ в присутствии внешнего поля:

$$\dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) = i\left[\hat{g}(\mathbf{x}), \frac{\delta\hat{H}(\hat{g},\hat{a})}{\delta g(\mathbf{x})}\right] + i\left[\hat{a}(\mathbf{x}), \frac{\delta\hat{H}(\hat{g},\hat{a})}{\delta a(\mathbf{x})}\right] + \hat{\eta}_g(\mathbf{x}, \hat{g}, \hat{a}),$$

$$\dot{\hat{a}}(\mathbf{x}) = i\left[\hat{a}(\mathbf{x}), \frac{\delta\hat{H}(\hat{g},\hat{a})}{\delta g(\mathbf{x})}\right] + \hat{\eta}_a(\mathbf{x}, \hat{g}, \hat{a}),$$

$$\hat{\eta}_g(\mathbf{x}, \hat{g}, \hat{a}) = i\delta\xi(\mathbf{x})\left[\hat{g}(\mathbf{x}), \frac{\partial\hat{b}(\mathbf{x}, \hat{g}(\mathbf{x}), \hat{a}(\mathbf{x}))}{\partial g(\mathbf{x})}\right] + i\delta\xi(\mathbf{x})\left[\hat{a}(\mathbf{x}), \frac{\partial\hat{b}(\mathbf{x}, \hat{g}(\mathbf{x}), \hat{a}(\mathbf{x}))}{\partial a(\mathbf{x})}\right], \tag{3.5}$$

$$\hat{\eta}_a(\mathbf{x}, \hat{g}, \hat{a}) = i\delta\xi(\mathbf{x})\left[\hat{a}(\mathbf{x}), \frac{\partial\hat{b}(\mathbf{x}, \hat{g}(\mathbf{x}), \hat{a}(\mathbf{x}))}{\partial g(\mathbf{x})}\right].$$

Правая часть уравнений (3.4), (3.5) содержит источники η_g, η_a, которые линейным образом связаны с внешним полем. Мы детально проанализируем случаи, при которых локальные операторы $\hat{\hat{a}}(\mathbf{x}), \hat{b}(\mathbf{x}')$ являются магнитными степенями свободы. Отметим, что в используемом методе «источников» не всегда этим полям можно придать очевидный физический смысл. Роль фиктивного внешнего поля заключается в выведении интересующей нас локальной физической величины из состояния статистического равновесия. В силу определения двухвременных функций Грина в окончательные выражения функций Грина эти внешние поля не входят.

4. Спектры и низкочастотные асимптотики функций Грина в одноподрешеточных магнетиках

В этом разделе мы рассмотрим одноподрешеточные магнетики со спином s = 1, обменный гамильтониан которых имеет SU(3) или SO(3) симметрию, получим и сравним низкочастотные асимптотики функций Грина для обоих случаев. Следуя представлениям физики магнетизма принятым для магнетиков со спином s = 1/2, мы используем обобщение модели обменного взаимодействия Гейзенберга на случай SU(3) симметрии. Модельный вид гамильтониана в виде функционала плотности генератора SU(3) симметрии приведен в работе [12]:

$$H\left(\hat{g}(\mathbf{x})\right) = -2\int d^3x d^3x' J\left(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\right) \mathrm{tr}\ \hat{g}(\mathbf{x})\hat{g}(\mathbf{x}').$$

В виду быстрого убывания обменного интеграла $J\left(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\right)$ с расстоянием и малостью пространственных градиентов, ограничиваясь их квадратичным приближением, найдем однородную и неоднородную части макроскопической энергии

$$e(\mathbf{x}) = e_0(\mathbf{x}) + e_n(\mathbf{x}),\ e_0(\mathbf{x}) = -2Jg_2(\mathbf{x})$$

$$e_n(\mathbf{x}) = \bar{J}\ \mathrm{tr}\left(\nabla_k \hat{g}(\mathbf{x})\right)^2 / 2. \tag{4.1}$$

Однородная энергия e_0 представима в терминах инварианта Казимира $g_2 \equiv \mathrm{tr}\ \hat{g}^2$ алгебры (2.1) и удовлетворяет соотношению SU(3) симметрии $\left\{\hat{G}, e(\mathbf{x})\right\} = 0$. Эта алгебра имеет также инвариант Казимира $g_3 \equiv \mathrm{tr}\ \hat{g}^3$. Так как инвариант Казимира g_3 содержит магнитные величины третьего порядка и не имеет знаковой определенности, его мы не используем в настоящей работе. Обменные константы $J, \bar{J}$ связаны с обменным интегралом двухчастичного магнитного взаимодействия равенствами $J \equiv \int d^3xJ\left(|\mathbf{x}|\right)$, $\bar{J} \equiv \int d^3xx^2J\left(|\mathbf{x}|\right)/3$. Неоднородная часть плотности обменной энергии (4.1) является положительной величиной при $\bar{J} > 0$. Вопрос о равновесных значениях спина и квадрупольной матрицы, а также устойчивость магнитных состояний для аналогичного квантового гамильтониана с билинейно-биквадратичным взаимодействием, рассмотрен в работах [1,11,13]. В рамках приближения самосогласованного поля показано, что наряду с парамагнитным состоянием ($s_0 = q_0 = 0$), также возможны квадрупольное ($s_0 = 0$, $q_0 \neq 0$), ферромагнитное ($s_0 \neq 0$, $q_0 = 0$) и ферроквадрупольное ($s_0 \neq 0$, $q_0 \neq 0$) состояния равновесия. Различия в форме записи уравнений динамики магнетиков в [11,13] и в нашем подходе обусловлены выбором двух разных базисов представления магнитных степеней свободы. В [11,13] использован базис Рака, а в настоящей работе — базис Вейля. Связь этих базисов рассмотрена в [14]. В силу явного вида энергии (4.1) уравнения (3.4) упрощаются

$$\dot{s}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{J}\left(\left[\hat{q}, \Delta\hat{q}\right] + \left[\Delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{s}), \hat{\varepsilon}(\mathbf{s})\right]\right)_{\beta\gamma} + \eta_\alpha(\mathbf{s}),$$

$$\dot{\hat{q}} = \bar{J}\left[\Delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{s}), \hat{q}\right] + \bar{J}\left[\Delta\hat{q}, \hat{\varepsilon}(\mathbf{s})\right] + \hat{\eta}(\hat{q}). \tag{4.2}$$

Здесь $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\mathbf{s}) \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma / 2$. В эти нелинейные уравнения вошла только неоднородная часть обменной энергии. Источники в правой части уравнений определяются формулами

$$\eta_\alpha(\mathbf{s}) = \xi\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial b}{\partial s_\beta}s_\gamma + 2\frac{\partial b}{\partial q_{\beta\lambda}}q_{\gamma\lambda}\right), \qquad (4.3)$$

$$\eta_{\beta\gamma}(\hat{q}) = \xi\frac{\partial b}{\partial q_{\mu\nu}}\left(\varepsilon_{\beta\nu}(\mathbf{s})\delta_{\gamma\mu} + \varepsilon_{\gamma\nu}(\mathbf{s})\delta_{\beta\mu}\right) -$$

$$-\xi\frac{\partial b}{\partial s_\alpha}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\rho}q_{\gamma\rho} + \varepsilon_{\alpha\gamma\rho}q_{\beta\rho}\right).$$

Рассмотрим динамику системы вблизи квадрупольного магнитного состояния равновесия ($s_0 = 0$, $\hat{q}_0 \neq 0$). Исходя из (4.2), (4.3), получим линеаризованные уравнения динамики в фурье-представлении около этого состояния

$$i\omega\delta s_\alpha(\mathbf{k},\omega) = -k^2\bar{J}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left[\hat{q}_0, \delta\hat{q}(\mathbf{k},\omega)\right]_{\beta\gamma} + \eta_\alpha(\mathbf{s},\mathbf{k},\omega),$$

$$\eta_\alpha(\mathbf{s},\mathbf{k},\omega) = 2\delta\xi(\mathbf{k},\omega)\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial b}{\partial q_{\beta\lambda}}q^0_{\gamma\lambda}. \qquad (4.4)$$

$$i\omega\delta\hat{q}(\mathbf{k},\omega) = -k^2\bar{J}\left[\hat{\varepsilon}\left(\delta\mathbf{s}(\mathbf{k},\omega)\right), \hat{q}_0\right] + \hat{\eta}(\hat{q},\mathbf{k},\omega),$$

$$\eta_{\beta\gamma}(\hat{q},\mathbf{k},\omega) = -\delta\xi(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial b}{\partial s_\alpha}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\rho}q^0_{\rho\gamma} + \varepsilon_{\alpha\gamma\rho}q^0_{\rho\beta}\right),$$

Здесь $\delta\mathbf{s}(\mathbf{k},\omega)$, $\delta\hat{q}(\mathbf{k},\omega)$ — отклонения плотности спина и квадрупольной матрицы от равновесных значений $\mathbf{s}_0$, $\hat{q}_0$. Исключая вариацию квадрупольной матрицы с помощью второго уравнения в (4.4), выразим вариацию плотность спина в терминах потенциала внешнего поля

$$\delta s_\lambda(\mathbf{k},\omega) = \hat{\bar{D}}^{-1}_{\lambda\alpha}(\mathbf{k},\omega)\bar{\eta}_\alpha(\mathbf{k},\omega).$$

Матрица $\hat{\bar{D}}(\mathbf{k},\omega)$ и источник $\bar{\eta}_\alpha(\mathbf{k},\omega)$ определены формулами

$$\underline{D}_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) = i\omega\delta_{\alpha\beta} + ik^4\bar{J}^2\left[3\hat{q}_0^2 - 2\hat{I}\mathrm{tr}\hat{q}_0^2\right]_{\alpha\beta}/\omega, \qquad (4.5)$$

$$\bar{\eta}_\alpha(\mathbf{k},\omega) \equiv \eta_\alpha(\mathbf{s},\mathbf{k},\omega) +$$

$$+ 2ik^2\delta\xi\bar{J}\frac{\partial b}{\partial s_\beta}\left[3\hat{q}_0^2 - 2\hat{I}\mathrm{tr}\hat{q}_0^2\right]_{\alpha\beta}/\omega.$$

Пусть в равновесии квадрупольная матрица одноосна $q^0_{\alpha\beta} = q_0(e_\alpha e_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3)$, где e_α — ось магнитной анизотропии и q_0 ее модуль. Отклик величины $\delta a(\mathbf{k},\omega)$ на внешнее возмущение $\delta\xi(\mathbf{k},\omega)$ в главном приближении по малым волновым векторам и частотам имеет вид

$$\delta a(\mathbf{k},\omega) = \frac{\partial a}{\partial s_\alpha}\delta s_\alpha(\mathbf{k},\omega) + \frac{\partial a}{\partial q_{\alpha\beta}}\delta q_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega). \qquad (4.6)$$

Используя соотношения (3.2), (3.3), (4.4)–(4.6), получим выражение двухвременной асимптотики функции Грина для квадрупольного магнитного состояния в терминах базисных функций Грина:

$$G_{ab}(\mathbf{k},\omega) = \frac{\partial a}{\partial s_\alpha}G_{s_\alpha,s_\beta}(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial b}{\partial s_\beta} + \frac{\partial a}{\partial q_{\alpha\beta}}G_{q_{\alpha\beta},q_{\gamma\rho}}(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial b}{\partial q_{\gamma\rho}} + \frac{\partial a}{\partial s_\alpha}G_{s_\alpha,q_{\mu\lambda}}(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial b}{\partial q_{\mu\lambda}} + \frac{\partial a}{\partial q_{\mu\lambda}}G_{q_{\mu\lambda},s_\alpha}(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial b}{\partial s_\alpha}.$$

Для базисных функций Грина получены выражения

$$G_{s_\alpha,s_\beta}(\mathbf{k},\omega) = -\frac{2\bar{J}k^2q_0^2\delta^\perp_{\alpha\beta}(\mathbf{e})}{\Delta(\mathbf{k},\omega)},$$

$$G_{q_{\alpha\beta},q_{\gamma\rho}}(\mathbf{k},\omega) = \frac{q_0^2\bar{J}k^2F_{\alpha\beta,\gamma\rho}(\mathbf{e})}{2\Delta(\mathbf{k},\omega)},$$

$$G_{q_{\beta\gamma},s_\alpha}(\mathbf{k},\omega) = \frac{i\omega q_0F^\alpha_{\beta\gamma}(\mathbf{e})}{\Delta(\mathbf{k},\omega)} = -G_{s_\alpha,q_{\beta\gamma}}(\mathbf{k},\omega). \qquad (4.7)$$

Здесь $\Delta(\mathbf{k},\omega) \equiv \omega^2 - k^4q_0^2\bar{J}^2$ и тензоры, характеризующие магнитную анизотропию функций Грина, определяются равенствами

$$F_{\alpha\beta,\gamma\rho}(\mathbf{e}) = F^\mu_{\alpha\beta}(\mathbf{e})F^\mu_{\gamma\rho}(\mathbf{e}),$$

$$F^\alpha_{\beta\gamma}(\mathbf{e}) \equiv 2\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{e})e_\gamma + 2\varepsilon_{\alpha\gamma}(\mathbf{e})e_\beta, \qquad \delta^\perp_{\mu\lambda}(\mathbf{e}) \equiv \delta_{\mu\lambda} - e_\nu e_\rho.$$

Из условия $\Delta(\mathbf{k},\omega) = 0$ получим спектр квадрупольной волны для одноосного магнитного упорядочения

$$\omega = k^2\bar{J}q_0.$$

Этот закон дисперсии совпадает с найденным спектром работы [13].

Вычислим асимптотики функций Грина для ферромагнитного состояния равновесия ($s_0 \neq 0$, $\hat{q}_0 = 0$). Линеаризованные уравнения около этого состояния (4.2), (4.3) в фурье-представлении приобретают вид

$$i\omega\delta s_\alpha(\mathbf{k},\omega) = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{J}k^2\left[\hat{\varepsilon}\left(\delta\mathbf{s}(\mathbf{k},\omega)\right), \hat{\varepsilon}(\mathbf{s}_0)\right]_{\beta\gamma} + \eta_\alpha(\mathbf{s},\mathbf{k},\omega),$$

$$\eta_\alpha(\mathbf{s},\mathbf{k},\omega) = 2\delta\xi(\mathbf{k},\omega)\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{s}_0)\frac{\partial b}{\partial s_\beta}, \qquad (4.8)$$

$$i\omega\delta q_{\beta\gamma}(\mathbf{k},\omega) = \theta(\mathbf{k})\left(\varepsilon_{\beta\rho}(\mathbf{s}_0)\delta q_{\rho\gamma} - \varepsilon_{\rho\gamma}(\mathbf{s}_0)\delta q_{\rho\beta}\right) +$$
$$+\eta_{\beta\gamma}(\hat{q};\mathbf{k},\omega),$$

$$\eta_{\beta\gamma}(\hat{q};\mathbf{k},\omega) = \delta\xi(\mathbf{k},\omega)\left(\frac{\partial b}{\partial q_{\gamma\nu}}\varepsilon_{\beta\nu}(\mathbf{s}_0) + \frac{\partial b}{\partial q_{\beta\nu}}\varepsilon_{\gamma\nu}(\mathbf{s}_0)\right).$$

Здесь $\theta(\mathbf{k}) \equiv k^2\bar{J}s_0/2$. Уравнения динамики для плотности спина и квадрупольной матрицы в этом случае разделяются. Из первого уравнения (4.8) получим связь вариации плотности спина и потенциала внешнего поля

$$\delta s_\alpha(\mathbf{k},\omega) = D^{-1}_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)\eta_\beta(\mathbf{s};\mathbf{k},\omega), \qquad (4.9)$$

где

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)=i\omega\delta_{\alpha\beta}-\bar{J}k^2\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{s}_0). \qquad (4.10)$$

Уравнение динамики для квадрупольной матрицы в (4.8) содержит двойное суммирование по спиновым индексам. Для его решения удобно перейти к новым переменным и одинарному суммированию с помощью подстановки: $q_{\alpha\beta}\to q_n$, $\eta_{\alpha\beta}\to\eta_n$, $n=1,2,..,9$: $q_{11}\to q_1$, $q_{12}\to q_2,\ldots,$ $q_{33}\to q_9$. Такая подстановка разделяет уравнения для величин δq_m с индексами $(m=1,2,4,5)$ и величин δq_p с индексами $(p=3,6,7,8)$; $\delta q_9(\mathbf{k},\omega)\equiv 0$. Из (4.8) получим вариации δq_m и δq_p в терминах потенциала внешнего поля

$$\delta q_m(\mathbf{k},\omega)=\delta\xi(\mathbf{k},\omega)s_0D^{-1}_{mn}(\mathbf{k},\omega)M_{nl}\frac{\partial b}{\partial q_l}/2,$$
$$m,n,l=1,2,4,5; \qquad (4.11)$$

$$\delta q_p(\mathbf{k},\omega)=\delta\xi(\mathbf{k},\omega)s_0\underline{D}^{-1}_{ps}(\mathbf{k},\omega)\underline{M}_{st}\frac{\partial b}{\partial q_t}/4,$$
$$p,s,t=3,6,7,8.$$

Здесь (4х4) матрицы $\hat{D}$ и $\hat{\underline{D}}$, входящие в правую часть соотношений (4.11), представлены в виде прямого произведения матриц Паули $\hat{\sigma}_\alpha$ и единичной матрицы:

$$\hat{D}(\mathbf{k},\omega)=i\omega\hat{I}_4+i\theta(\mathbf{k})\hat{M}, \qquad \hat{M}=\hat{\sigma}_2\otimes\hat{I}_2+\hat{I}_2\otimes\hat{\sigma}_2,$$

$$\hat{\underline{D}}(\mathbf{k},\omega)=i\omega\hat{I}_4-\theta(\mathbf{k})\hat{I}_2\otimes\hat{\sigma}_2, \qquad \hat{\underline{M}}=\hat{\sigma}_1\otimes\hat{\sigma}_2+\hat{I}_2\otimes\hat{\sigma}_2.$$

Матрицы $\hat{I}_2,\hat{I}_4$ — единичные и имеют размерность 2×2 и 4×4. Учитывая (4.9)–(4.11) и соотношение (3.2), получим структуру низкочастотной асимптотики функции Грина:

$$G_{ab}(\mathbf{k},\omega)=\frac{\partial a}{\partial s_\alpha}G_{s_\alpha,s_\beta}(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial b}{\partial s_\beta}+$$
$$+\frac{\partial a}{\partial q_m}G_{q_m,q_n}(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial b}{\partial q_n}+\frac{\partial a}{\partial q_p}G_{q_p,q_s}(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial b}{\partial q_s}.$$

Приведем явные выражения базисных функций Грина:

$$G_{s_\alpha,s_\beta}(\mathbf{k},\omega)=s_0\left[\theta(\mathbf{k})\delta^{\perp}_{\alpha\beta}(\mathbf{m})-i\omega\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{m})\right]/\Delta_0\left(\theta(\mathbf{k}),\omega\right), \qquad (4.12)$$

$$G_{q_p,q_s}(\mathbf{k},\omega)=X_{ps}\left(\theta(\mathbf{k}),\omega\right)/\Delta_0\left(\theta(\mathbf{k}),\omega\right),$$
$$G_{q_m,q_n}(\mathbf{k},\omega)=X_{mn}\left(2\theta(\mathbf{k}),\omega\right)/\Delta_0\left(2\theta(\mathbf{k}),\omega\right).$$

Здесь 4×4 матрица $\hat{X}\left(\theta(\mathbf{k}),\omega\right)$ определяется равенством

$$\hat{X}\left(\theta(\mathbf{k}),\omega\right)=s_0\begin{bmatrix}\omega\left(\hat{\sigma}_2\otimes\hat{I}_2+\hat{I}_2\otimes\hat{\sigma}_2\right)-\\-\theta(\mathbf{k})\left(\hat{I}_4+\hat{\sigma}_2\otimes\hat{\sigma}_2\right)\end{bmatrix}/4. \qquad (4.13)$$

Знаменатели выражений (4.12) $\Delta_0\left(\theta(\mathbf{k}),\omega\right)\equiv\equiv\omega^2-\theta^2(\mathbf{k})$ и $\Delta_0\left(2\theta(\mathbf{k}),\omega\right)$ показывают, что полюсные особенности базисных функций Грина могут быть двух типов, соответствующих спектрам коллективных возбуждений:

$$\omega=k^2\bar{J}s_0/2, \qquad \omega=k^2\bar{J}s_0.$$

Формулы (4.12), (4.13) решают задачу о нахождении низкочастотных асимптотик функций Грина ферромагнитных состояний со спином s = 1 для обменного взаимодействия, обладающего SU(3) симметрией.

Рассмотрим теперь задачу нахождения низкочастотной асимптотики функций Грина с SO(3) симметричным обменным взаимодействием, для которого справедливо соотношение симметрии $\left\{S_\alpha,e(\mathbf{x})\right\}=0$. Плотность неоднородной обменной энергии следует из формулы для неоднородной части обменной энергии s = 1 магнетиков (4.1). Она имеет вид $e_n=\bar{J}(\nabla_k s_\alpha)^2/4$. Используя метод «источников», получим общую структуру низкочастотной асимптотики функции Грина:

$$G_{ab}(\mathbf{k},\omega)=\frac{\partial a}{\partial s_\alpha}G_{s_\alpha,s_\beta}(\mathbf{k},\omega)\frac{\partial b}{\partial s_\beta}. \qquad (4.14)$$

Базисная функция Грина $G_{s_\alpha,s_\beta}(\mathbf{k},\omega)$ в (4.14) совпадает с формулой (4.12) для функции Грина $G_{s_\alpha,s_\beta}(\mathbf{k},\omega)$ и данными [30], (см. стр. 92, 99). Используя выражение (4.14), справедливое для произвольных локальных величин, и замечая, что $q_{\mu\nu}=s_\mu s_\nu-s^2\delta_{\mu\nu}/3$, получим функции Грина $G_{q_{\mu\nu},q_{\beta\gamma}}(\mathbf{k},\omega)$ и $G_{s_\alpha,q_{\beta\gamma}}(\mathbf{k},\omega)$

$$G_{q_{\mu\nu},q_{\beta\gamma}}(\mathbf{k},\omega)=\frac{s_0^3}{\Delta_0\left(\theta(\mathbf{k}),\omega\right)}\times$$
$$\times\left\{-i\omega\Phi_{\mu\nu,\beta\gamma}(\mathbf{m})+2\theta(\mathbf{k})F_{\mu\nu,\beta\gamma}(\mathbf{m})\right\}, \qquad (4.15)$$

$$G_{s_\alpha,q_{\beta\gamma}}(\mathbf{k},\omega)=\frac{s_0^2}{\Delta_0\left(\theta(\mathbf{k}),\omega\right)}\times$$
$$\times\left\{-i\omega F^{\alpha}_{\beta\gamma}(\mathbf{m})+2\theta(\mathbf{k})\left(\delta^{\perp}_{\alpha\beta}(\mathbf{m})m_\gamma+\delta^{\perp}_{\alpha\gamma}(\mathbf{m})m_\beta\right)\right\}.$$

Здесь введено обозначение

$$\Phi_{\mu\nu,\beta\gamma}(\mathbf{m})\equiv\varepsilon_{\mu\beta}(\mathbf{m})m_\nu m_\gamma+\varepsilon_{\mu\gamma}(\mathbf{m})m_\nu m_\beta+$$
$$+\varepsilon_{\nu\beta}(\mathbf{m})m_\mu m_\gamma+\varepsilon_{\nu\gamma}(\mathbf{m})m_\mu m_\beta.$$

Формулы (4.12) и (4.15) показывают качественное совпадение особенностей функций Грина по волновым векторам и частоте при различной унитарной симметрии обменного взаимодействия. Однако коэффициенты при этих особенностях имеют существенно иную функциональную зависимость от равновесных значений магнитных величин. Если обменное взаимодействие имеет SU(3) симметрию, то для состояния ферромагнетика функция Грина $G_{s_\alpha,q_n}(\mathbf{k},\omega)$ обращается в нуль, тогда как в случае SO(3) симметрии обменного взаимодействия эта величина представлена формулой (4.15). Кроме того, полюсная особенность функции Грина с SO(3) симметрией взаимодействия ферромагнетика демонстрирует наличие одной ветви спиновой волны, тогда как функции Грина с SU(3) симметричным взаимодействием магнетика имеют полюсные особенности двух типов, отражающие распространение двух типов волн: спиновой и квадрупольной.

5. Спектр возбуждений и низкочастотная асимптотика функций Грина спинового нематика

Исследуем теперь динамические процессы в другом физически важном случае многоподрешеточных магнетиков со спином $s = 1$, которые обладают SO(3) симметричным обменным взаимодействием и нематическим параметром порядка. Модель обменной энергии также представим в виде суммы однородной и неоднородной части $e = e_o + e_n$. Однородная обменная энергия есть функция инварианта Казимира исходной алгебры скобок Пуассона (2.4) и инварианта Казимира расширенной алгебры (2.4), (2.7). Для простоты рассмотрим одноосный нематический параметр порядка $m_{\alpha\beta} = m(l_\alpha l_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3)$. Инвариант Казимира подалгебры величин $\mathbf{s}$ и $\hat{m}$ (2.4), (2.7) в этом случае имеет вид $m_2 = \mathrm{tr}\,\hat{m}^2 = 2m^2/3$, а инвариант Казимира $m_3 = \mathrm{tr}\,\hat{m}^3$ связан с m_2 соотношением $m_2^3 = 6m_3^2$.
Таким образом, модель энергии приобретает вид

$$e_0(s^2, m^2) = -As^2/2 - Cm_2/2 + Bs^4/4 + Dm_2^2/4,$$

$$e_n(\nabla\mathbf{s}, \nabla\hat{m}) = \bar{\bar{J}}\mathrm{tr}(\nabla_k m_{\alpha\beta})^2/2 + \bar{J}(\nabla_k s_\alpha)^2/2. \quad (5.1)$$

Неоднородная часть обменной энергии (5.1) содержит константы неоднородного обмена $\bar{\bar{J}}, \bar{J}$, которые являются положительными величинами. Условия экстремума и устойчивости для однородной части энергии (5.1) ведут к таким магнитным состояниям равновесия:

1) парамагнетик, устойчивое состояние $s_0 = 0$, $m_0 = 0$, если: $A < 0$, $C < 0$; 2) ферромагнетик, решение $s_0^2 = A/B$, $m_0 = 0$ устойчиво, если: $A > 0$, $B > 0$, $C < 0$; 3) спиновый нематик, состояние $s_0 = 0$, $m_0^2 = 3C/2D$ устойчиво, если: $A < 0$, $C > 0$, $D > 0$.

Учитывая плотность энергии (5.1) из (3.5), получим уравнения динамики во внешнем поле

$$\dot{s}_\alpha = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\bar{J}s_\gamma\Delta s_\beta + 2\bar{\bar{J}}m_{\gamma\lambda}\Delta m_{\lambda\beta}\right) + $$

$$+\delta\xi\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial b}{\partial s_\beta}s_\gamma + 2\frac{\partial b}{\partial m_{\beta\lambda}}m_{\gamma\lambda}\right), \quad (5.2)$$

$$\dot{m}_{\beta\gamma} = -\left(\varepsilon_{\alpha\gamma\rho}m_{\rho\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta\rho}m_{\rho\gamma}\right)\times$$

$$\times\left(\left(-A + Bs^2\right)s_\alpha - \bar{J}\Delta s_\alpha + \delta\xi\frac{\partial b}{\partial s_\alpha}\right).$$

В отличие от уравнений (4.2) одноподрешеточного магнетика, в случае многоподрешеточного однородная обменная энергия входит в уравнения (5.2). Для ферромагнитного состояния получена низкочастотная асимптотика двухвременной функции Грина $G_{s_\alpha s_\beta}(\mathbf{k}, \omega)$, которая совпадает с аналогичным выражением в формуле (4.13). В состоянии спинового нематика найдено выражение низкочастотной асимптотики функции Грина:

$$G_{ab}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\partial a}{\partial s_\alpha}G_{s_\alpha, s_\beta}(\mathbf{k}, \omega)\frac{\partial b}{\partial s_\beta} + $$

$$+\frac{\partial a}{\partial m_{\alpha\beta}}G_{m_{\alpha\beta}, m_{\gamma\rho}}(\mathbf{k}, \omega)\frac{\partial b}{\partial m_{\gamma\rho}} + \frac{\partial a}{\partial s_\alpha}G_{s_\alpha, m_{\mu\lambda}}(\mathbf{k}, \omega)\frac{\partial b}{\partial m_{\mu\lambda}} + $$

$$+\frac{\partial a}{\partial m_{\mu\lambda}}G_{m_{\mu\lambda}, s_\alpha}(\mathbf{k}, \omega)\frac{\partial b}{\partial s_\alpha}.$$

Для базисных функций Грина получены соотношения:

$$G_{s_\alpha, s_\beta}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\psi^2 m_0^2\delta^\perp_{\alpha\beta}(\mathbf{l})}{A\Delta(\mathbf{k}, \omega)},$$

$$G_{m_{\alpha\beta}, m_{\gamma\rho}}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{4Am_0^2F_{\alpha\beta,\gamma\rho}(\mathbf{l})}{\Delta(\mathbf{k}, \omega)},$$

$$G_{m_{\mu\lambda}, s_\alpha}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{im_0\omega F^\alpha_{\mu\lambda}(\mathbf{l})}{\Delta(\mathbf{k}, \omega)} = -G_{s_\alpha, m_{\mu\lambda}}(\mathbf{k}, \omega). \quad (5.3)$$

Знаменатель асимптотик функций Грина $\Delta(\mathbf{k}, \omega) \equiv \omega^2 - m_0^2\psi^2$, $(\psi^2 \equiv -2\bar{\bar{J}}Ak^2 > 0)$ задает полюсные особенности функций Грина и ведет к голдстоуновскому спектру

$$\omega = ck,$$

где $c \equiv m_0\sqrt{-2\bar{\bar{J}}A}$ — скорость магнитной волны. Ранее линейный закон дисперсии для нематической фазы получен в [4]. Сравнивая формулы (5.3) для спинового нематика и функций Грина квадрупольного магнетика (4.7), видим, что структура магнитной анизотропии асимптотик функций Грина для обоих магнитных состояний совпадает и описывается в терминах тензоров $F_{\alpha\beta,\gamma\rho}(\mathbf{e})$, $F^\alpha_{\beta\gamma}(\mathbf{e})$, $\delta^\perp_{\alpha\beta}(\mathbf{e})$. Качественное совпадение наблюдается для асимптотик функций Грина

$$G_{q_{\alpha\beta}, q_{\gamma\rho}}(\mathbf{k}, 0) \sim 1/k^2 \sim G_{m_{\alpha\beta}, m_{\gamma\rho}}(\mathbf{k}, 0) \text{ и } G_{s_\alpha, s_\beta}(0, \omega) = 0,$$

а также

$$G_{q_{\alpha\beta}, s_\gamma}(\mathbf{k}, 0) = 0 = G_{m_{\alpha\beta}, s_\gamma}(\mathbf{k}, 0)$$

и

$$G_{q_{\alpha\beta}, s_\gamma}(0, \omega) \sim 1/\omega \sim G_{m_{\alpha\beta}, s_\gamma}(0, \omega).$$

Асимптотики функции $G_{s_\alpha, s_\beta}(\mathbf{k}, 0)$ для спинового нематика и квадрупольного магнетика разные. Для квадрупольного состояния эта асимптотика содержит квадратичную расходимость по волновому вектору, а для спинового нематика эта функция выходит на константу. Функция Грина $G_{q_{\alpha\beta},q_{\gamma\rho}}(0,\omega)$ для квадрупольного магнетика обращается в нуль, в то время как для спинового нематика $G_{m_{\alpha\beta},m_{\gamma\rho}}(0,\omega)$ имеет квадратичную особенность по частоте.

Заключение

Рассмотрена задача влияния слабого переменного поля на эволюцию магнетиков со спином $s = 1$. Получены нелинейные уравнения динамики, которые учитывают свойства SO(3) или SU(3) симметрии обменных взаимодействий. На основе этих уравнений вычислены «гидродинамические» асимптотики двухвременных функций Грина в явном виде по волновому вектору и частоте. Представленные результаты исследований показывают важность учета конкретной унитарной симметрии обменного взаимодействия в описании коллективных свойств изучаемых магнетиков. Выяснено, что та или иная унитарная симметрия существенно влияет на возможные магнитные состояния равновесия и характер анизотропии асимптотик функций Грина.

Одной из особенностей представленного подхода является нахождение асимптотик функции в низкочастотной области Грина для произвольных локальных физических величин. Это позволило провести сравнительный анализ вычисленных функций Грина магнетиков с различной унитарной симметрией обменного взаимодействия. Рассмотренные примеры состояний демонстрируют особенности проявления дополнительных магнитных степеней свободы, которые имеют различные трансформационные свойства относительно операции обращения времени. Привлечение модельного вида однородной части обменной энергии, как определенной функции инвариантов Казимира алгебры плотностей генераторов унитарной симметрии и расширенной алгебры, включающей степени свободы параметра порядка, позволило изучить возможные состояния равновесия в спин $s = 1$ магнетиках.

Изложенная схема учета SO(3) или SU(3) симметрии обменного магнитного взаимодействия может быть обобщена на произвольную унитарную группу симметрии SU(n), и, в частности, применима для описания коллективных свойств магнетиков со спином $s = 3/2$.

1. M. Nauciel-Bloch, G. Sarma, and A. Castets, *Phys. Rev. B* **5**, 4603 (1972).
2. A.F. Andreev, and I.A. Grishchuk, *Sov. Phys. JETP* **60**, 267 (1984).
3. V.C. Ostrovskii, *Sov. Phys. JETP* **64**, 999 (1986).
4. N. Papanicolaou, *Nuclear Phys. B* **305**, 367 (1988).
5. G. Fath, and J. Solyom, *Phys. Rev. B* **51**, 3620 (1995).
6. Peng Li and Shun-Qing Shen, *New J. Phys.* **6**, 160 (2004).
7. M. Snoek and Fei Zhou, *Phys. Rev. B* **69**, 094410 (2004).
8. M.E. Zhitomirsky and H. Tsunetsugu, *Europhys. Lett.* **92**, 37001 (2010).
9. B.A. Ivanov and A.K. Kolezhuk, *Phys. Rev. B* **68**, 052401 (2003).
10. Ю.А. Фридман, Д.А. Матюнин, *Письма в ЖТФ* **33**, 23 (2007).
11. J. Bernatska and P. Holod, *J. Phys. A* **42**, 075401 (2009).
12. M.Y. Kovalevsky and T.Q. Vuong, *Phys. Lett. A* **374**, 3676 (2010).
13. V. Bar'yakhtar, V. Butrim, A. Kolezhuk, and B. Ivanov, *Phys. Rev. B* **87**, 224407 (2013).
14. М.Ю. Ковалевский, *ФНТ* **41**, 919 (2015) [*Low Temp. Phys.* **41**, 713 (2015)].
15. S. Nakatsuji, Y. Nambu, H. Tonomura, O. Sakai, S. Jonas, C. Broholm, H. Tsunetsugu, Y. Qiu, and Y. Maeno, *Science* **309**, 1697 (2005).
16. H. Takeya, K. Ishida, K. Kitagava, Y. Ihara, K. Onuma, Y. Maeno, Y. Nambu, S. Nakatsuji, D.E. MacLaughlin, A. Koda, and R. Kadono, *Phys. Rev. B* **77**, 054429 (2008).
17. A. Läuchli, F. Mila, and K. Penc, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 087205 (2006).
18. D. Hall, Z. Fisk, and R. Goodrich, *Phys. Rev. B* **62**, 84 (2000).
19. S. Demishev, A. Semeno, A. Bogach, Y Paderno, N. Shitsevalova, and N. Sluchanko, *Physica B* **378**, 602 (2006).
20. P. Santini, S. Carreta, and G. Amoretti, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 807 (2009).
21. A.V. Syromyatnikov, *Phys. Rev B* **86**, 014423 (2012).
22. L.E. Svistov, T. Fujita, H. Yamaguchi, S. Kimura, K. Omura, A. Prokofiev, A.I. Smirnov, Z. Honda, and M. Hagiwara, *JETP Lett.* **93**, 21 (2011).
23. N.N. Bogolyubov, *Physica* **S26**, 1 (1960).
24. J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962).
25. P.C. Hohenberg, *Phys. Rev.* **158**, 383 (1967).
26. L. Michel, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 617 (1980).
27. M. Kovalevsky, and S. Peletminsky, ЭЧАЯ **33**, 1357 (2002); [*Phys. Part. Nucl.* **33**, 1 (2002)].
28. Н.Н. Боголюбов, С.В. Тябликов, *ДАН СССР* **126**, 53 (1959).
29. А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Наука, Москва (1962).
30. В.Г. Барьяхтар, В.Н. Криворучко, Д.А. Яблонский, *Функции Грина в теории магнетизма*, Наукова думка, Киев (1984).
31. D. Mahan, *Many-Particle Physics*, Plenum Press, New York (1990).
32. M. Bonitz, Quantum Kinetic Theory, Springer, New York (2016).
33. Peng Li, Guang-Ming Zhang, and Shun-Qing Shen, *Phys. Rev. B* **75**, 104420 (2007).
34. E.B. Brown, *Phys. Rev B* **40**, 775 (1989).
35. A. Smerald and N. Shannon, *Phys. Rev. B* **88**, 184430 (2013).
36. А.И. Ахиезер, С.В. Пелетминский, *Методы статистической механики*, Наука, Москва (1977).
37. Н.Н. Боголюбов, *Препринт ОИЯИ Р1395*, Дубна (1963).
38. B.I. Halperin and W.M. Saslow, *Phys. Rev. B* **16**, 2154 (1977).
39. Z. Galasiewicz, *J. Low Temp. Phys.* **57**, 123 (1984); *J. Low Temp. Phys.* **72**, 153 (1988).
40. Н.Н. Боголюбов (мл.), М.Ю. Ковалевский, А.М. Курбатов, С.В. Пелетминский, А.Н. Тарасов, *УФН*, **159**, 585 (1989); [*Sov. Phys. Usp.* **32**, 1041 (1989)].
41. M.Y. Kovalevsky and A.A. Rozhkov, *Physica A* **216**, 169 (1995).

Spectra of collective excitations and the low-frequency asymptotic of Green's functions of degenerate states of spin *s* = 1 magnets

A.V. Glushchenko, M.Y. Kovalevsky, and V.T. Matskevich

The paper describes the evolution of nonequilibrium degenerate states of one- and many-sublattice magnets with spin $s = 1$ in an external field. Dynamic equations for magnetic degrees of freedom have been obtained and low-frequency asymptotics of two-time Green's functions were calculated. The spectra of collective excitations in the states of a ferromagnet, a quadrupole magnet, and a spin nematic are found. A comparative analysis of these asymptotics is carried out and influence of the unitary symmetry of the exchange interaction on the character of the magnetic anisotropy is clarified.

PACS: **75.10.–b** General theory and models of magnetic ordering.

Keywords: spin, symmetry, dynamics, spectra of excitations, Green's functions.