УДК 517.9

ПРО АСИМПТОТИЧНУ ПОВЕДІНКУ РОЗВ'ЯЗКІВ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ

І. Г. Новак

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64

We study asymptotic correspondence with probability one and in mean square between solutions of a stochastic system and the corresponding linear deterministic system.

Исследованы вопросы асимптотического соответствия с вероятностью 1 и в среднем квадратическом между решениями стохастической системы и соответствующей ей линейной детерминированной системы.

1. Вступ. У даній роботі досліджується асимптотична поведінка розв'язків стохастичної системи Іто на півосі. Для цього використовується метод асимптотичної відповідності, який полягає у відшуканні системи звичайних диференціальних рівнянь, асимптотична поведінка розв'язків якої подібна до поведінки розв'язків стохастичної системи. Вперше такий метод для звичайних диференціальних рівнянь зустрічається в роботах [1 – 3].

У роботах [4, 5] цей метод розповсюджено на стохастичні системи. Однак у цих роботах припускалося, що розв'язки відповідної детермінованої системи обмежені при $t \geq 0$. В даній роботі розглянуто випадок, коли детермінована система може мати і необмежені розв'язки.

2. Постановка задачі. Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$dx = F(t, x)dt \tag{1}$$

з початковою умовою $x(0) = x_0, t \geq 0, x \in R^n, F(t, x) \in C(R_+, R^n)$ — n-вимірна функція.

Поряд із системою (1) розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$dy = G(t, y)dt + \sigma(t, y)\, dW(t), \tag{2}$$

де $G(t, y), \sigma(t, y)$ — неперервні за сукупністю аргументів n-вимірні функції, $W(t)$ — стандартний скалярний вінерівський процес, визначений для $t \geq 0$, на ймовірнісному просторі $(\Omega, F, \mathbf{P})$; $\{F_t : t \geq 0\}$ — потік σ-алгебр, відносно якого узгоджено процес $W(t)$.

Будемо вважати, що система (2) має потраєкторно єдиний розв'язок $y(t) = y(t, \omega) \in \in R^n$ з початковою умовою $y(0) = y_0$, де $y_0 \in F_0$ — вимірна випадкова величина і $\mathbf{E}|y_0|^2 < \infty$. Вважатимемо також, що всі розв'язки системи (1) необмежено продовжувані вправо.

Означення 1. *Якщо кожному розв'язку $y(t)$ системи (2) можна поставити у відповідність розв'язок $x(t)$ системи (1) такий, що*

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{E}|x(t) - y(t)|^2 = 0,$$

© І. Г. Новак, 2011

то систему (1) назвемо асимптотично відповідною до системи (2) в середньому квадратичному.

Означення 2. *Якщо кожному розв'язку $y(t)$ системи (2) можна поставити у відповідність розв'язок $x(t)$ системи (1) такий, що з імовірністю 1*

$$\lim_{t \to \infty} |x(t) - y(t)| = 0,$$

то систему (1) назвемо асимптотично відповідною до системи (2) з імовірністю 1.

Далі в роботі встановлено умови асимптотичної відповідності між системою (2), де функція $G(t, x)$ має спеціальний вигляд, та відповідною їй детермінованою системою (1) з імовірністю одиниця та в середньому квадратичному.

3. Основний результат. Розглянемо стохастичну диференціальну систему Іто (2), де функція $G(t, y) = Ay + f(t, y)$, та систему (1), де функція $F(t, x) = Ax$, тобто маємо

$$dy = (Ay + f(t, y))dt + \sigma(t, y)\, dW(t), \tag{3}$$

де $t \geq 0$, $y \in R^n$, A — детермінована стала n-вимірна квадратна матриця з нормою

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2} = b.$$

Функції $f(t, y)$ і $\sigma(t, y)$ неперервні за сукупністю змінних при $t \geq 0$, $y \in R^n$ і задовольняють за змінною y глобальну умову Ліпшиця.

Розв'язки стохастичної системи (3) будемо порівнювати з розв'язками детермінованої системи

$$dx = Ax\, dt. \tag{4}$$

Далі відносно нелінійностей f і σ будемо вважати виконуваними умови: існують невід'ємні неперервні при $t \geq 0$ функції $\nu(t)$ та $\rho(t)$ такі, що для всіх $t \geq 0$, $x \in R^n$

$$|f(t, x)| \leq \nu(t)|x|, \quad |\sigma(t, x)| \leq \rho(t)|x|.$$

Без обмеження загальності вважатимемо, що матриця A має квазідіагональний вигляд

$$A = \operatorname{diag}(A_1, A_2),$$

де матриці A_1, A_2 мають розмірність n_1 та n_2 відповідно, $n = n_1 + n_2$, причому $\operatorname{Re}\lambda(A_1) \geq 0$, а $\operatorname{Re}\lambda(A_2) < 0$, де $\lambda(A_i)$ — власні числа матриць A_1 та A_2.

Нехай $X(t) = \operatorname{diag}(e^{tA_1}, e^{tA_2})$ — фундаментальна матриця системи (4), яка нормована в нулі, $X(0) = \mathbf{E}_n$ – n-вимірна одинична матриця.

Далі, нехай $\mathbf{P_1}$ та $\mathbf{P_2}$ — доповнюючі проектори на підпростори R^{n_1} та R^{n_2}, $\mathbf{P_1} = \operatorname{diag}(E_{n_1}, 0)$ та $\mathbf{P_2} = \operatorname{diag}(0, E_{n_2})$, де E_{n_1}, E_{n_2} — одиничні матриці порядку n_1, n_2.

Введемо позначення

$$X_1(t) = X(t)\mathbf{P_1} = \operatorname{diag}(e^{A_1 t}, 0), \quad X_2(t) = X(t)\mathbf{P_2} = \operatorname{diag}(0, e^{A_2 t}). \tag{5}$$

Нехай $\lambda_i(A)$ — власні числа матриці A, $\lambda = \max \operatorname{Re} \lambda_i(A)$, m — максимальна розмірність жорданової клітини з власним числом, що має найбільшу дійсну частину, p — максимальна розмірність жорданової клітини з власним числом, для якого $\operatorname{Re} \lambda_i(A_1) = 0$, і $p = 1$, якщо таких немає. $\lambda_* = \max \operatorname{Re} \lambda_i(A_2)$, а m_* — максимальна розмірність жорданової клітини для власного числа з максимальною від'ємною дійсною частиною.

Тоді справджуються оцінки

$$\|X(t)\| \leq C_1 e^{\lambda t} \Xi_m(t), \quad \|X_1(-t)\| \leq C_2 \Xi_p(t), \quad \|X_2(t)\| \leq C_3 e^{\lambda_* t} \Xi_{m_*}(t), \tag{6}$$

де $t \geq 0$, $\Xi_k(t) = \begin{cases} t^{k-1}, & t > 1, \\ 1, 0 \leq t \leq 1, \end{cases}$ C_i — деякі додатні сталі.

Остання нерівність має місце при умові $X_2(t) \neq 0$.

В подальшому нам знадобиться наступна лема.

Лема 1. *Нехай для матриці A, функцій $f(t,x)$ та $\sigma(t,x)$ виконуються наведені вище умови, а також*

$$a_1 := \int_0^\infty \nu(\tau) \tau^{2m-2}\, d\tau < \infty, \tag{7}$$

$$a_2 := \int_0^\infty \rho^2(\tau) \tau^{2m-2}\, d\tau < \infty. \tag{8}$$

Тоді існує стала $a > 0$ така, що для довільного розв'язку $y(t)$ системи (3) при $t \geq 0$ справджується оцінка

$$\mathbf{E}|y(t)|^2 \leq a \mathbf{E}|y(0)|^2 e^{2\lambda t} \Xi_{2m-2}(t). \tag{9}$$

Доведення. Розв'язок $y(t)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$y(t) = X(t)y(0) + \int_0^t X(t,\tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau + \int_0^t X(t,\tau)\sigma(\tau, y(\tau)) dW(\tau), \tag{10}$$

з якого випливає оцінка

$$\mathbf{E}\,|y(t)|^2 \leq 3\|X(t)\|^2 \mathbf{E}\,|y(0)|^2 + 3\mathbf{E}\left(\int_0^t X(t,\tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau\right)^2 +$$

$$+ 3\int_0^t \|X(t,\tau)\|^2 \|\sigma(\tau, y(\tau))\|^2 d\tau.$$

З першої нерівності в (6), умов на f та σ маємо

$$\mathbf{E}\,|y(t)|^2 \le 3C_1^2 e^{2\lambda t}\Xi_{2m-2}(t)\mathbf{E}\,|y(0)|^2 +$$

$$+\,3C_1^2 \int\limits_0^t \nu(\tau)\Xi_{2m-2}(t-\tau)d\tau \int\limits_0^t e^{2\lambda(t-\tau)}\nu(\tau)\Xi_{2m-2}(t-\tau)\mathbf{E}\,|y(\tau)|^2 d\tau +$$

$$+\,3C_1^2 \int\limits_0^t e^{2\lambda(t-\tau)}\Xi_{2m-2}(t-\tau)\rho^2(\tau)\mathbf{E}\,|y(\tau)|^2 d\tau,$$

або

$$\frac{\mathbf{E}|y(t)|^2}{e^{2\lambda t}\Xi_{2m-2}(t)} \le 3C_1^2\mathbf{E}\,|y(0)|^2 + 3C_1^2 \int\limits_0^t (\nu(\tau)a_1 + \rho^2(\tau))\Xi_{2m-2}(\tau)\frac{\mathbf{E}\,|y(\tau)|^2}{e^{2\lambda\tau}\Xi_{2m-2}(\tau)}d\tau.$$

З нерівності Гронуолла – Беллмана отримуємо

$$\mathbf{E}|y(t)|^2 \le 3C_1^2\mathbf{E}\,|y(0)|^2 e^{2\lambda t}\Xi_{2m-2}(t) e^{3C_1^2 \int\limits_0^\infty (\nu(\tau)a_1 + \rho^2(\tau))\Xi_{2m-2}(\tau)d\tau}.$$

Тоді з урахуванням позначення

$$a := 3C_1^2 e^{3C_1^2 \int\limits_0^\infty (\nu(\tau)a_1 + \rho^2(\tau))\Xi_{2m-2}(\tau)d\tau}$$

маємо оцінку

$$\mathbf{E}|y(t)|^2 \le a\mathbf{E}\,|y(0)|^2 e^{2\lambda t}\Xi_{2m-2}(t), \quad t \ge 0.$$

Лему доведено.

Дослідимо асимптотичну поведінку розв'язків системи (3) на півосі. Доведемо дві теореми про асимптотичну відповідність між стохастичною та звичайною системами.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови*

$$\int\limits_0^\infty e^{2\lambda t} t^{2m+2p-4}\nu^2(t)dt < \infty, \tag{11}$$

$$\int\limits_0^\infty e^{2\lambda t} t^{2m+2p-4}\rho^2(t)dt < \infty. \tag{12}$$

Тоді система (4) асимптотично відповідна в середньому квадратичному до системи (3).

Доведення. Враховуючи еволюційну властивість матрицанта, рівняння (10) записуємо у вигляді

$$y(t) = X(t)\left[y(0) + \int\limits_0^\infty X_1(0,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau + \int\limits_0^\infty X_1(0,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right] +$$
$$+ \int\limits_0^t X_2(t,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau + \int\limits_0^t X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\sigma))dW(\tau) -$$
$$- \int\limits_t^\infty X_1(t,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau - \int\limits_t^\infty X_1(t,\tau)\sigma(t,y(\tau))dW(\tau). \qquad (13)$$

Кожному розв'язку $y(t)$ системи (3) з початковою умовою $y(0) = y_0$ поставимо у відповідність такий розв'язок $x(t)$ системи (4), що

$$x(0) = y(0) + \int\limits_0^\infty X_1(0,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau + \int\limits_0^\infty X_1(0,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))\,dW(\tau). \qquad (14)$$

Використовуючи доведену лему, оцінки (6), міркуваннями, аналогічними [4, с. 177], можна встановити збіжність у середньому квадратичному невласних інтегралів у (13).

Доведемо справедливість співвідношення

$$\mathbf{E}|x(t) - y(t)|^2 \to 0, \quad t \to \infty. \qquad (15)$$

З (13) та (14) маємо

$$\mathbf{E}\,|x(t) - y(t)|^2 \le 4\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t X_2(t,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau\right|^2 + 4\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|^2 +$$
$$+ 4\mathbf{E}\left|\int\limits_t^\infty X_1(t,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau\right|^2 + 4\mathbf{E}\left|\int\limits_t^\infty X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))\,dW(\tau)\right|^2. \qquad (16)$$

Для першого доданка в (16) одержуємо

$$\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t X_2(t,\tau)f(\tau,y(\tau))\,d\tau\right|^2 \le C_3^2(e^{2\lambda_* t}\Xi_{2m_*-2}(t) + 1)a\mathbf{E}|y(0)|^2 \times$$
$$\times \left(\int\limits_0^\infty \nu(\tau)e^{2\lambda\tau}\Xi_{2m-2}(\tau)d\tau\right)^2 \int\limits_0^\infty \nu(\tau)\Xi_{m-1}(\tau)\,d\tau \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \qquad (17)$$

Для другого доданка в (16) маємо

$$\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|^2 \le C_3^2 a\mathbf{E}\,|y(0)|^2\Xi_{m_*}^2(t)e^{2\lambda_* t}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \rho^2(\tau)e^{2\lambda\tau}\Xi_{2m-2}(\tau)d\tau \to 0 \quad \text{при} \quad t\to\infty. \tag{18}$$

Для третього доданка в (16), використовуючи при $\tau \ge t$ нерівність

$$\|X_1(t,\tau)\| \le C_1\Xi_p(\tau,t) \le C_1\Xi_p(\tau), \tag{19}$$

нерівність Коші – Буняковського та лему, отримуємо

$$\mathbf{E}\left|\int\limits_t^\infty X_1(\tau,y(\tau))f(\tau,y(\tau))d\tau\right|^2 \le \mathbf{E}\left(\int\limits_t^\infty C_2\Xi_p(\tau)\nu(\tau)y(\tau)d\tau\right)^2 \le$$

$$\le C_2^2 a\mathbf{E}\,|y(0)|^2\int\limits_t^\infty \Xi_p(\tau)\nu(\tau)d\tau\times$$

$$\times\int\limits_t^\infty \Xi_p(\tau)\nu(\tau)e^{2\lambda\tau}\tau^{2m-2}d\tau \to 0 \quad \text{при} \quad t\to\infty. \tag{20}$$

Оцінимо нарешті останній доданок:

$$\mathbf{E}\left|\int\limits_t^\infty X_1(\tau,y(\tau))\sigma(\tau,y(\tau))d\tau\right|^2 \le$$

$$\le C_1^2 a\mathbf{E}\,|y(0)|^2\int\limits_t^\infty \rho^2(\tau)e^{2\lambda\tau}\Xi^{2p+2m-4}(\tau)d\tau \to 0 \quad \text{при} \quad t\to\infty. \tag{21}$$

З оцінок (17) – (21) випливає доведення теореми.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови*

$$\int\limits_0^\infty e^{2\lambda t}t^{2m+2p-4}\nu^2(t)\,dt < \infty, \tag{22}$$

$$\int\limits_0^\infty e^{2\lambda t}t^{2m+2p-4+\alpha}\rho^2(t)\,dt < \infty \tag{23}$$

для деякого $\alpha > 1$.

Тоді система (4) асимптотично відповідна з імовірністю 1 до системи (3).

Доведення. Виберемо послідовність $\{n_k | k \geq 1\}$ так, щоб $n_k > k$, $k \geq 1$, і

$$\int\limits_{n_k}^{\infty} e^{2\lambda t} \nu^2(t) t^{2m+2p-4} dt \leq \frac{1}{2^k}, \quad k \geq 1,$$

та послідовність $\{m_k | k \geq 1\}$ так, щоб $m_k > k$, $k \geq 1$, і

$$\int\limits_{m_k}^{\infty} e^{2\lambda t} t^{2m+2p-4+\alpha} \rho^2(t) dt \leq \frac{1}{2^k}, \quad k \geq 1.$$

Внаслідок (22) і (23) такий вибір можливий.

За послідовностями $\{n_k\}$ і $\{m_k\}$ побудуємо послідовність l_k таку, що

$$l_k = 2 \max\{n_k, m_k\}, \quad k \geq 1.$$

Тоді очевидними є оцінки

$$\int\limits_{\frac{l_k}{2}}^{\infty} e^{2\alpha t} t^{2m+2p-4} \nu^2(t) dt \leq \frac{1}{2^k}, \quad k \geq 1, \tag{24}$$

$$\int\limits_{\frac{l_k}{2}}^{\infty} e^{2at} \rho^2(t) t^{2p+2m-4+\alpha} dt \leq \frac{1}{2^k}, \quad k \geq 1. \tag{25}$$

Для довільного розв'язку $y(t)$ системи (3), що стартує з точки 0, та відповідного йому розв'язку $x(t)$ системи (4), визначеного формулою (14), отримуємо

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left\{\sup_{t \geq l_k} |x(t) - y(t)| > \frac{1}{k}\right\} \leq\ & \mathbf{P}\left\{\sup_{t \geq l_k} \left| \int\limits_0^t X_2(t,\tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau \right| > \frac{1}{4k}\right\} + \\
& + \mathbf{P}\left\{\sup_{t \geq l_k} \left| \int\limits_0^t X_2(t,\tau) \sigma(\tau, y(\tau)) dW(\tau) \right| > \frac{1}{4k}\right\} + \\
& + \mathbf{P}\left\{\sup_{t \geq l_k} \left| \int\limits_t^{\infty} X_1(t,\tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau \right| > \frac{1}{4k}\right\} + \\
& + \mathbf{P}\left\{\sup_{t \geq l_k} \left| \int\limits_t^{\infty} X_1(t,\tau) \sigma(\tau, y(\tau))\, dW(\tau) \right| > \frac{1}{4k}\right\} = \\
=\ & \mathbf{P_1} + \mathbf{P_2} + \mathbf{P_3} + \mathbf{P_4}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Оцінимо кожну з імовірностей в (26) окремо. Використовуючи аналогічні до [4, с. 181] міркування, отримуємо оцінку для першого і третього доданків у (26):

$$\mathbf{P_1} \le 32k^2C_2^2a\mathbf{E}|y(0)|^2\times$$
$$\times\int\limits_0^\infty \nu(t)dt\left(e^{2\lambda_* k}k^{2m_*-2}\int\limits_0^\infty \nu(\tau)e^{2\lambda\tau}\Xi_{2m-2}(\tau)d\tau+\frac{1}{2^k}\right)=I_k^{(1)}, \tag{27}$$

$$\mathbf{P_3} \le 16k^2C_1^2a\mathbf{E}\,|y(0)|^2\int\limits_0^\infty \nu(\tau)\Xi_{p-1}(\tau)d\tau\frac{1}{2^k}=I_k^{(3)}. \tag{28}$$

Оцінимо тепер доданок $\mathbf{P_2}$ в (26). Для цього введемо для натуральних N послідовності подій

$$A_N=\left\{\omega|\sup_{l_k\le t\le N}\left|\int\limits_0^t X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|>\frac{1}{4k}\right\}.$$

Очевидно, що A_N — монотонно зростаюча послідовність множин, причому

$$A=\left\{\omega|\sup_{t\ge l_k}\left|\int\limits_0^t X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|>\frac{1}{4k}\right\}=\bigcup_N A_N=\lim_{N\to\infty}A_N,$$

а тому $\mathbf{P_2}=\mathbf{P}\{A\}=\lim\limits_{N\to\infty}\mathbf{P}(A_N)$.

При $N>l_k$ маємо

$$\mathbf{P_2}\le\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\le t\le N}\left|\int\limits_0^{l_k} X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|>\frac{1}{8k}\right\}+$$
$$+\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\le t\le N}\left|\int\limits_{l_k}^t X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|>\frac{1}{8k}\right\}. \tag{29}$$

Оцінимо кожну з імовірностей (29). З нерівності Чебишова маємо

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\le t\le N}\left|\int\limits_0^{l_k} X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|>\frac{1}{8k}\right\}\le$$
$$\le 64k^2\mathbf{E}\,|y(0)|^2C_3^2a\sup_{l_k\le t\le N}\left(\int\limits_0^{l_k}\Xi_{m_*}^2(t-\tau)e^{2\lambda*(t-\tau)}\nu(\tau)e^{2\lambda\tau}\Xi_{2m-2}(\tau)d\tau\right)\le$$

$$\leq 64k^2\mathbf{E}|y(0)|^2C_3^2a\left(\int\limits_0^{l_k}\Xi_{2m_*-2}(\tau)e^{2\lambda*k}\nu(\tau)e^{2\lambda\tau}\Xi_{2m-2}(\tau)d\tau\right)\leq$$

$$\leq 64k^2\mathbf{E}\,|y(0)|^2C_3^2e^{2\lambda_*k}k^{2m_*-2}a\left(\int\limits_0^{l_k}\nu^2(\tau)e^{2\lambda\tau}\Xi_{2m-2}(\tau)d\tau\right):=A_k.$$

Оцінимо другий доданок у (29):

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\leq t\leq N}\left|\int\limits_{l_k}^{t}X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))\,dW(\tau)\right|\right\}=$$

$$=\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\leq t\leq N}\left|\int\limits_{l_k}^{t}(X_2(t,\tau)-X_2(t,l_k)+X_2(t,l_k))\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|\right\}\leq$$

$$\leq\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\leq t\leq N}\left|\int\limits_{l_k}^{t}X_2(t,l_k)\sigma(\tau,y(\tau))\,dW(\tau)\right|>\frac{1}{16k}\right\}+$$

$$+\,\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\leq t\leq N}\left|\int\limits_{l_k}^{t}(X_2(t,\tau)-X_2(t,l_k))\sigma(\tau,y(\tau))\,dW(\tau)\right|>\frac{1}{16k}\right\}. \tag{30}$$

Маємо наступні оцінки для першої ймовірності в (30):

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\leq t\leq N}\left|\int\limits_{l_k}^{t}X_2(t,l_k)\sigma(\tau,y(\tau))\,dW(\tau)\right|>\frac{1}{16k}\right\}\leq$$

$$\leq 256k^2C_3^2\mathbf{E}\,|y(0)|^2ak^{2m_*-2}\int\limits_{l_k}^{t}\nu(\tau)e^{2\lambda\tau}\Xi_{2m-2}(\tau)d\tau\leq$$

$$\leq 256k^2C_3^2\mathbf{E}\,|y(0)|^2ak^{2m_*}\int\limits_{l_k}^{\infty}\nu(\tau)e^{2\lambda\tau}\Xi_{2m-2}(\tau)\,d\tau\leq$$

$$\leq 256k^2C_3^2\mathbf{E}\,|y(0)|^2ak^{2m_*}\frac{1}{2^k}.$$

Оцінимо другий доданок у (30). При цьому враховуємо, що $X_2(t,\tau)$, як функція другого аргументу, задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{dX_2(t,\tau)}{d\tau}=-X_2(t,\tau)A(\tau). \tag{31}$$

Звідси та з формули зміни порядку інтегрування в звичайних та стохастичних інтегралах [6, с. 256] маємо

$$\int\limits_{l_k}^{t}(X_2(t,\tau)-X_2(t,l_k))\sigma(\tau,y(\tau))\,dW(\tau)=-\int\limits_{l_k}^{t}\left(\int\limits_{l_k}^{\tau}X_2(t,s)A(s)ds)\sigma(\tau,y(\tau)\right)dW(\tau)=$$

$$=-\int\limits_{l_k}^{t}X_2(t,s)A(s)\left(\int\limits_{l_k}^{t}I_{\{s\le\tau\}}\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right)ds.$$

Таким чином, отримуємо

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\le t\le N}\left|\int\limits_{l_k}^{t}(X_2(t,\tau)-X_2(t,l_k))\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|>\frac{1}{16k}\right\}=$$

$$=\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\le t\le N}\left|\int\limits_{l_k}^{t}X_2(t,s)A(s)\left(\int\limits_{l_k}^{t}I_{\{s\le\tau\}}\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right)ds\right|>\frac{1}{16k}\right\}\le$$

$$\le 256k^2\mathbf{E}\left(\sup_{l_k\le t\le N}\left|\int\limits_{l_k}^{t}X_2(t,s)A(s)\left(\int\limits_{l_k}^{t}I_{\{s\le\tau\}}\sigma(\tau,y(\tau))\,dW(\tau)\right)ds\right|\right)^2\le$$

$$\le 256k^2\mathbf{E}\left(\sup_{l_k\le t\le N}\left(\int\limits_{l_k}^{t}C_3e^{\lambda_*(t-s)}\Xi_{m_*}(t-s)\|A(s)\|\left|\int\limits_{l_k}^{t}I_{\{s\le\tau\}}\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|ds\right)\right)^2\le$$

$$\le 256k^2C_3^2b\int\limits_{l_k}^{N}\left(\int\limits_{s}^{N}a\mathbf{E}\,|y(0)|^2\sigma(\tau,y(\tau))e^{2\lambda\tau}\Xi_{2m-2}(\tau)d\tau\right)ds\le$$

$$\le 256k^{2m_*}C_3^2b\int\limits_{l_k}^{\infty}\left(\int\limits_{s}^{N}a\mathbf{E}\,|y(0)|^2\sigma(\tau,y(\tau))e^{2\lambda\tau}\Xi_{2m-2}(\tau)d\tau\right)ds\le$$

$$\le 256bk^{2m_*}C_3^2a\mathbf{E}\,|y(t_0)|^2\frac{1}{2^k}.$$

Отже,

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\le t\le N}\left|\int\limits_{l_k}^{t}X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|>\frac{1}{8k}\right\}\le 256(b+1)k^{2m_*}C_3^2a\mathbf{E}\,|y(t_0)|^2\frac{1}{2^k}:=B_k,$$

звідки випливає, що

$$\mathbf{P_2} = \mathbf{P}\left\{\omega| \sup_{l_k \le t \le N}\left|\int\limits_0^t X_2(t,\tau)\sigma(\tau, y(\tau))dW(\tau)\right| > \frac{1}{4k}\right\} \le A_k + B_k.$$

Спрямовуючи N до нескінченності, одержуємо оцінку для доданка $\mathbf{P_2}$:

$$\mathbf{P_2} \le A_k + B_k = I^2_{(k)}. \tag{32}$$

Залишилось оцінити ймовірність $\mathbf{P_4}$. Маємо

$$\mathbf{P_4} \le \sum_{n=0}^{\infty}\left[\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k+n \le t < l_k+n+1}\left|\int\limits_{l_k+n}^{\infty} X_1(t,\tau)\sigma(\tau, y(\tau))dW(\tau)\right| > \frac{1}{8k}\right\} + \right.$$

$$\left. + \mathbf{P}\left\{\sup_{l_k+n \le t < l_k+n+1}\left|\int\limits_{l_k+n}^{t} X_1(t,\tau)\sigma(\tau, y(\tau))dW(\tau)\right| > \frac{1}{8k}\right\}\right].$$

Для другого доданка з властивостей стохастичного інтеграла отримуємо оцінку

$$64k^2 a\mathbf{E}\,|y(0)|^2 C_2^2 e^{2\lambda}(2\lambda)^{2m-2}\frac{1}{2^k}.$$

Оцінимо тепер перший доданок:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k+n \le t < l_k+n+1}\left|\int\limits_{l_k+n}^{\infty} X_1(t,\tau)\sigma(\tau, y(\tau))dW(\tau)\right| > \frac{1}{8k}\right\} \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty} 64k^2 a\mathbf{E}\,|y(0)|^2 \int\limits_{l_k+n}^{\infty} \tau^{2p+2m-4} e^{2\lambda\tau}\rho^2(\tau)d\tau \le$$

$$\le 64k^2 a\mathbf{E}\,|y(0)|^2 C_2^2 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(l_k+n)^{\alpha}}\int\limits_{l_k+n}^{\infty} \tau^{2p+2m-4+\alpha} e^{2\lambda\tau}\rho^2(\tau)d\tau \le$$

$$\le 64k^2 a\mathbf{E}\,|y(0)|^2 C_2^2 \int\limits_{l_k+n}^{\infty} \tau^{2p+2m-4+\alpha} e^{2\lambda\tau}\rho^2(\tau)d\tau \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+n)^{\alpha}}.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha}}$ є збіжним для деякого $\alpha > 1$. Позначимо його суму через S. Тоді маємо

$$\mathbf{P_4} \le 64k^2 aC_2^2\mathbf{E}\,|y(0)|^2\frac{1}{2^k}e^{2\lambda}(2\lambda)^{2m-2} + 64k^2 aC_2^2\mathbf{E}\,|y(0)|^2\mathbf{E}\,|y(0)|^2 S\frac{1}{2^k} = I_k^{(4)}.$$

Таким чином,

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq l_k}|x(t)-y(t)| > \frac{1}{k}\right\} \leq \sum_{i=1}^{4} I_{(k)}^{i} = I_k.$$

Оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty} I_k$ є збіжним, то з леми Бореля – Кантелі отримуємо доведення теореми.

1. *Witner A.* Linear variations of constants // Amer. J. Math. — 1946. — **68**. — P. 185 – 213.
2. *Levinson N.* The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations // Duke Math. J. — 1948. — **15**. — P. 111 – 126.
3. *Yakubovich V. A.* On the asymptotic behavior of systems of differential equations // Mat. Sb. — 1951. — **28**. — P. 217 – 240.
4. *Самойленко А. М., Станжицький О. М.* Якісний та асимптотичний аналіз диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями. — Київ: Наук. думка, 2009. — 338 с.
5. *Креневич А. П.* Асимптотична еквівалентність розв'язків лінійних стохастичних систем Іто // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 10. — С. 1368 – 1384.
6. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. — Киев: Вища шк., 1992. — 320 с.

Одержано 18.01.11