УДК 517.9

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ІМПУЛЬСНОЇ СИСТЕМИ З ДВОМА ТОЧКАМИ РОЗРИВУ

О. В. Іващук

Київс. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64

We obtain conditions for existence of a 2π-periodic solution of an impulsive system that has two break points in non-fixed times.

Получены условия существования 2π-периодического решения импульсной системы с двумя точками разрыва в нефиксированные моменты времени.

Уперше метод усереднення було застосовано при дослідженні рівняння з імпульсною дією М. М. Криловим та М. М. Боголюбовим [1]. Згодом у роботах А. М. Самойленка [2, 3] ідея застосування асимптотичного методу Крилова – Боголюбова була розвинена і поширена на широкий клас систем з імпульсною дією. Ці роботи започаткували активне дослідження коливних процесів в імпульсних системах.

Питання про існування періодичних розв'язків імпульсних систем розглядалося в роботах [2 – 4] та ін. Зокрема, було розглянуто питання про існування граничного розривного циклу імпульсної системи з однією точкою розриву та обґрунтовано використання методу усереднення Крилова – Боголюбова при дослідженні імпульсних систем.

Основний результат даної роботи полягає в тому, що для імпульсної системи з двома точками розриву в нефіксовані моменти часу встановлено умови на коефіцієнти та функції системи, при яких дана система має 2π-періодичнй розв'язок. При дослідженні використано метод усереднення Крилова – Боголюбова та результати з теорії чисельно-аналітичних методів дослідження періодичних розв'язків [5].

Розглянемо систему

$$\dot{x} = \lambda H x + \varepsilon X(x), \quad \|x\| \neq r_0, \tag{1}$$

з умовою

$$\Delta \|x\| \Big|_{\|x\|=r_0} = \begin{cases} \varepsilon I_1, & x_2 \leq 0, \\ \varepsilon I_2, & x_2 > 0, \end{cases} \tag{2}$$

та

$$x(t_0) = x^0, \tag{3}$$

де $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $X(x) = \begin{pmatrix} X_1(x_1, x_2) \\ X_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$, $I_1 \cdot I_2 > 0$.

Нехай для $X_1(x,y)$, $X_2(x_1,x_2)$ в області $D = B_R(0)$, $R > r_0$, виконуються наступні умови:

A) $|X_1(x_1,x_2)| \leq M_1, |X_2(x_1,x_2)| \leq M_2$;

B) функції $X_1(x_1,x_2)$, $X_2(x_1,x_2)$ є неперервними та задовольняють умову Ліпшиця зі сталими K_1, K_2 відповідно.

Розв'язки системи рівнянь (1), (2) можуть бути такими:

1. Розв'язки, які не зазнають імпульсної дії при $t \geq 0$. Це розв'язки системи (1), які задовольняють умову $\|x\| \neq r_0 \; \forall t \geq 0$.

2. Розв'язки, які зазнають імпульсної дії при $t \geq 0$ скінченну кількість разів. Це розв'язки системи (1), для яких $\|x\| = r_0$ лише для скінченної кількості значень $t \geq 0$.

3. Розв'язки, які зазнають імпульсної дії при $t \geq 0$ нескінченну кількість разів. Це розв'язки системи (1), для яких $\|x\| = r_0$ для нескінченної кількості значень $t \geq 0$.

Розв'язки перших двох видів або прямують до нескінченності при $t \to \infty$, або притягуються до циклів системи (1). Розв'язки третього виду або прямують до нескінченності при $t \to \infty$, або притягуються до розривних циклів системи (1), (2), які не є циклами системи (1), і породжують періодичні траєкторії з двома імпульсними збуреннями за період.

Наша задача — вказати умови на коефіцієнти системи рівнянь (1) – (3), при яких породжуються 2π-періодичні розв'язки цієї системи.

Виконавши заміну

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi, \\ x_2 &= -r\sin\varphi, \end{aligned} \tag{4}$$

з (1) одержимо

$$\dot{r} = \varepsilon X_1(r\cos\varphi, -r\sin\varphi)\cos\varphi - \varepsilon X_2(r\cos\varphi, -r\sin\varphi)\sin\varphi,$$

$$-r\dot{\varphi} = -\lambda r + \varepsilon X_1(r\cos\varphi, -r\sin\varphi)\sin\varphi + \varepsilon X_2(r\cos\varphi, -r\sin\varphi)\cos\varphi.$$

Позначивши

$$F(r,\varphi) = X_1(r\cos\varphi, -r\sin\varphi)\cos\varphi - X_2(r\cos\varphi, -r\sin\varphi)\sin\varphi,$$

$$G(r,\varphi) = -\frac{1}{r}(X_1(r\cos\varphi, -r\sin\varphi)\sin\varphi + X_2(r\cos\varphi, -r\sin\varphi)\cos\varphi),$$

отримаємо систему

$$\dot{r} = \varepsilon F(r,\varphi),$$

$$\dot{\varphi} = \lambda + \varepsilon G(r,\varphi),$$

від якої перейдемо до рівняння

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\varepsilon F(r,\varphi)}{\lambda + \varepsilon G(r,\varphi)}, \quad r \neq r_0. \tag{5}$$

Умова (2) після заміни набере вигляду

$$\Delta r\Big|_{r=r_0} = \begin{cases} \varepsilon I_1, & \varphi \in [2\pi n, \pi + 2\pi n], \\ \varepsilon I_2, & \varphi \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{6}$$

Початкова умова (3) приводить до системи

$$\begin{aligned} r(t_0)\cos\varphi(t_0) &= x_1^0, \\ -r(t_0)\sin\varphi(t_0) &= x_2^0. \end{aligned} \tag{7}$$

Позначивши $r^0 = r(t_0)$, $\varphi^0 = \varphi(t_0)$, отримаємо початкову умову для розв'язку системи (5), (6)

$$r(\varphi^0) = r^0, \tag{8}$$

де $r^0 = \sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}$, а φ^0 визначається з системи

$$\sin\varphi^0 = -\frac{x_2^0}{\sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}},$$

$$\cos\varphi^0 = \frac{x_1^0}{\sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}}.$$

Припустимо, що система (5), (6), (8) має 2π-періодичний розв'язок $r = r(\varphi)$. Тоді цей розв'язок на $[0, 2\pi]$ має рівно два виходи на коло $r = r_0$ в моменти $\varphi = \varphi_1 \in [0, \pi]$ та $\varphi = \varphi_2 \in (\pi, 2\pi)$. Це означає, що на відрізку $[0, 2\pi]$ 2π-періодичний розв'язок системи (5), (6) складається з трьох частин:

1) при $\varphi \in [0, \varphi_1]$ $r = r(\varphi, 0, C)$ — розв'язок рівняння (5) з початковими даними $r(0) = C$, який в момент $\varphi = \varphi_1$ набуває значення $r = r_0$;

2) при $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2]$ $r = r(\varphi, \varphi_1, r_0 + \varepsilon I_1)$ — розв'язок рівняння (5) з початковими даними $r(\varphi_1) = r_0 + \varepsilon I_1$, який в момент $\varphi = \varphi_2$ набуває значення $r = r_0$;

3) при $\varphi \in (\varphi_2, 2\pi]$ $r = r(\varphi, \varphi_2, r_0 + \varepsilon I_2)$ — розв'язок рівняння (5) з початковими даними $r(\varphi_2) = r_0 + \varepsilon I_2$, який в момент $\varphi = 2\pi$ набуває значення $r = C$.

Тобто 2π-періодичний розв'язок системи (5), (6), якщо він існує, повинен задовольняти умови:

a) $\exists \varphi_1 \in [0, \pi] : \ r(\varphi_1, 0, C) = r_0$,

b) $\exists \varphi_2 \in (\pi, 2\pi) : \ r(\varphi_2 \varphi_1, r_0 + \varepsilon I_1) = r_0$,

c) $r(2\pi, \varphi_2, r_0 + \varepsilon I_2) = C$.

Отже, для знаходження моментів φ_1, φ_2 потрібно знайти розв'язок рівняння (5). Для цього в рівнянні (5) виконаємо заміну

$$r = \rho + \frac{\varepsilon}{\lambda}\widetilde{F}(\rho, \varphi), \tag{9}$$

де $\widetilde{F}(\rho,\varphi)$ — розв'язок рівняння $\frac{\partial}{\partial\varphi}\widetilde{F}(\rho,\varphi) = F(\rho,\varphi) - \overline{F(\rho,\varphi)}$, $\overline{F(\rho,\varphi)} = F_0(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\rho,\varphi)\,d\varphi$. В результаті отримаємо

$$\frac{d\rho}{d\varphi} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\left(F(\rho,\varphi) - F_0(\rho) + \frac{\partial}{\partial\rho}\widetilde{F}(\rho,\varphi)\frac{d\rho}{d\varphi}\right) = \frac{\frac{\varepsilon}{\lambda}F\left(\rho + \frac{\varepsilon}{\lambda}\widetilde{F}(\rho,\varphi),\varphi\right)}{1 + \frac{\varepsilon}{\lambda}G\left(\rho + \frac{\varepsilon}{\lambda}\widetilde{F}(\rho,\varphi),\varphi\right)}\times$$

$$\times\frac{d\rho}{d\varphi}\left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\rho}\widetilde{F}(\rho,\varphi)\right) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\Big(F(\rho,\varphi) - F_0(\rho)\Big) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\lambda}\left(F(\rho,\varphi) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\rho}F(\rho,\varphi)\widetilde{F}(\rho,\varphi) + \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}F(\rho,\varphi)\widetilde{F}^2(\rho,\varphi) + \frac{\varepsilon^3}{\lambda^3}\ldots\right)\times$$

$$\times\left(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda}G\left(\rho + \frac{\varepsilon}{\lambda}\widetilde{F}(\rho,\varphi),\varphi\right) + \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}G^2\left(\rho + \frac{\varepsilon}{\lambda}\widetilde{F}(\rho,\varphi),\varphi\right) - \frac{\varepsilon^3}{\lambda^3}\ldots\right).$$

Використавши розклад по степенях ε функції $G\left(\rho + \frac{\varepsilon}{\lambda}\widetilde{F}(\rho,\varphi),\varphi\right)$, будемо мати

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \left(\frac{\varepsilon}{\lambda}F_0(\rho) + \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}F(\rho,\varphi)\widetilde{F}(\rho,\varphi) - F(\rho,\varphi)G(\rho,\varphi)\right) + \frac{\varepsilon^3}{\lambda^3}\ldots\right)\times$$

$$\times\left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\rho}\widetilde{F}(\rho,\varphi)\right)^{-1},$$

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \left(\frac{\varepsilon}{\lambda}F_0(\rho) + \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}F(\rho,\varphi)\widetilde{F}(\rho,\varphi) - F(\rho,\varphi)G(\rho,\varphi)\right) + \frac{\varepsilon^3}{\lambda^3}\ldots\right)\times$$

$$\times\left(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\rho}\widetilde{F}(\rho,\varphi) + \left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\rho}\widetilde{F}(\rho,\varphi)\right)^2 - \frac{\varepsilon^3}{\lambda^3}\ldots\right).$$

Тоді одержимо рівняння

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\varepsilon}{\lambda}F_0(\rho) + \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}F(\rho,\varphi)\widetilde{F}(\rho,\varphi) - \right.$$

$$\left. - F(\rho,\varphi)G(\rho,\varphi) - \frac{\partial}{\partial\rho}\widetilde{F}(\rho,\varphi)F_0(\rho)\right) + \frac{\varepsilon^3}{\lambda^3}\ldots. \tag{10}$$

Розв'язок рівняння (10) можна шукати у вигляді

$$\rho(\varphi) = \rho_0 + \varepsilon u_1(\varphi) + \varepsilon^2 u_2(\varphi) + \varepsilon^3 u_3(\varphi) + \varepsilon^4\ldots. \tag{11}$$

Підставивши (11) у рівняння (10), розклавши праву частину по степенях ε і прирівнявши коефіцієнти при відповідних степенях ε, отримаємо систему для знаходження функцій

$u_i(\varphi), i \in \mathbb{N}:$

$$\dot{u}_1(\varphi) = \frac{1}{\lambda} F_0(\rho_0), \qquad (12)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Будемо вимагати, щоб функції $u_i(\varphi), i \in \mathbb{N}$, задовольняли умову $u_i(\varphi_0) = 0, i \in \mathbb{N}$. Розв'язавши систему (12), знайдемо розв'язок рівняння (10):

$$\rho(\varphi, \varphi_0, \rho_0) = \rho_0 + \frac{\varepsilon}{\lambda} F_0(\rho_0)(\varphi - \varphi_0) + \varepsilon^2 \ldots .$$

Повернувшись до заміни (9), отримаємо

$$r = \rho_0 + \frac{\varepsilon}{\lambda} F_0(\rho_0)(\varphi - \varphi_0) + \varepsilon^2 \ldots + \frac{\varepsilon}{\lambda} \widetilde{F} \left(\rho_0 + \frac{\varepsilon}{\lambda} F_0(\rho_0)(\varphi - \varphi_0) + \varepsilon^2 \ldots, \varphi \right).$$

Розкладемо отриманий розв'язок по степенях ε :

$$r = \rho_0 + \frac{\varepsilon}{\lambda} \left(F_0(\rho_0)(\varphi - \varphi_0) + \widetilde{F}(\rho_0, \varphi) \right) + \varepsilon^2 \ldots . \qquad (13)$$

Виходячи з означення, $\widetilde{F}(\rho, \varphi)$ можна взяти у вигляді

$$\widetilde{F}(\rho, \varphi) = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} F(\rho, \tau) d\tau - F_0(\rho)(\varphi - \varphi_0).$$

Тоді, повернувшись до зображення розв'язку (13), одержимо

$$r = (\varphi, \varphi_0, \rho_0) = \rho_0 + \frac{\varepsilon}{\lambda} \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} F(\rho_0, \tau) d\tau + \varepsilon^2 \ldots . \qquad (14)$$

Отже, ми знайшли $r = r(\varphi, \varphi_0, \rho_0)$ вигляду (14) — однопараметричну сім'ю розв'язків рівняння (5).

Підкоривши знайдений розв'язок умовам a) – c), отримаємо систему рівнянь, після розв'язання якої знайдемо значення φ_1, φ_2 та умову на коефіцієнти системи (5), (6):

$$C + \frac{\varepsilon}{\lambda} \int\limits_{0}^{\varphi_1} F(C, \tau) d\tau + \varepsilon^2 \ldots = r_0,$$

$$r_0 + \varepsilon I_1 + \frac{\varepsilon}{\lambda} \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r_0 + \varepsilon I_1, \tau) d\tau + \varepsilon^2 \ldots = r_0, \qquad (15)$$

$$r_0 + \varepsilon I_2 + \frac{\varepsilon}{\lambda} \int\limits_{\varphi_2}^{2\pi} F(r_0 + \varepsilon I_2, \tau) d\tau + \varepsilon^2 \ldots = C.$$

З останнього рівняння видно, що C можна подати у вигляді розкладу по степенях ε :

$$C = r_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \varepsilon^k.$$

Звідси, розклавши по степенях ε підінтегральні функції (15), одержимо

$$\begin{gathered} C_1 + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\varphi_1} F(r_0,\tau)d\tau + \varepsilon \ldots = 0, \\ I_1 + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r_0,\tau)d\tau + \varepsilon \ldots = 0, \\ -C_1 + I_2 + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\varphi_2}^{2\pi} F(r_0,\tau)d\tau + \varepsilon \ldots = 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Розглянемо систему (16) при $\varepsilon = 0$:

$$\begin{gathered} C_1 + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\varphi_1} F(r_0,\tau)d\tau = 0, \\ I_1 + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r_0,\tau)d\tau = 0, \\ -C_1 + I_2 + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\varphi_2}^{2\pi} F(r_0,\tau)d\tau = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Виключивши $\varphi_1,\ \varphi_2$, наприклад, із другого рівняння системи (17), отримаємо додаткову умову $I_1 + I_2 + \frac{1}{\lambda}\int_0^{2\pi} F(r_0,\tau)d\tau = 0$ на коефіцієнти системи (1), (2) і систему рівнянь

$$\begin{gathered} C_1 + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\varphi_1} F(r_0,\tau)d\tau = 0, \\ -C_1 + I_2 + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\varphi_2}^{2\pi} F(r_0,\tau)d\tau = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Оскільки рівняння (16) є неперервними по $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varepsilon$, то для існування розв'язків системи рівняння (16) при малих ε достатньо, щоб система рівнянь (18) мала розв'язок $\varphi_1 \in$

$\in [0, \pi]$, $\varphi_2 \in (\pi, 2\pi)$ і цей розв'язок не перетворював на нуль якобіан функцій, що утворюють праві частини рівнянь системи (18), тобто

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \varphi_1} \displaystyle\int\limits_0^{\varphi_1} F(r_0, \tau) d\tau & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial \varphi_2} \displaystyle\int\limits_{\varphi_2}^{2\pi} F(r_0, \tau) d\tau \end{vmatrix} \neq 0. \tag{19}$$

Остання умова рівносильна наступній:

$$\begin{aligned} &F(r_0, \varphi_1) \neq 0, \\ &F(r_0, \varphi_2) \neq 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Умову $I_1 + I_2 + \dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\int_0^{2\pi} F(r_0, \tau) d\tau = 0$ на коефіцієнти системи (1), (2) можна записати у вигляді

$$\frac{I_1 + I_2}{2\pi} + \frac{1}{\lambda} F_0(r_0) = 0. \tag{21}$$

Таким чином, отримали умову

C) $\dfrac{I_1 + I_2}{2\pi} + \dfrac{1}{\lambda} F_0(r_0) = 0.$

Для знаходження значення C_k, $k \geq 1$, скористаємося початковою умовою (8). Розглянемо наступні випадки:

Випадок 1. $x_2^0 < 0 \Rightarrow \varphi^0 \in (0, \pi)$.

a) Припустимо, що $0 < \varphi^0 < \varphi_1 < \pi$, тоді $r(\varphi^0, 0, C) = r^0$. Маємо

$$r_0 + \varepsilon C_1 + \frac{\varepsilon}{\lambda} \int\limits_0^{\varphi^0} F(r_0, \tau) d\tau + \varepsilon^2 \ldots = r^0. \tag{22}$$

Звідси випливає, що r^0 можна подати у вигляді

$$r^0 = r_0 + a(\varepsilon) = r_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varepsilon^k.$$

Підставивши зображення r^0 у (22), отримаємо рівняння

$$-a_1 + C_1 + \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^{\varphi^0} F(r_0, \tau) d\tau + \varepsilon \ldots = 0. \tag{23}$$

Прирівнявши коефіцієнти при відповідних степенях ε, одержимо систему рівнянь для знаходження $C_k,\, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{gathered} -a_1 + C_1 + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\varphi^0} F(r_0,\tau)d\tau = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{24}$$

Отже, при $0 < \varphi^0 < \varphi_1 < \pi$ маємо $C_1 = a_1 - \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^{\varphi^0} F(r_0,\tau)\,d\tau$.

$b)$ Припустимо, що $0 < \varphi_1 < \varphi^0 < \pi$, тоді $r(\varphi^0, \varphi_1, r_0 + \varepsilon I_1) = r^0$. Маємо

$$r_0 + \varepsilon I_1 + \frac{\varepsilon}{\lambda}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi^0} F(r_0,\tau)d\tau + \varepsilon^2 \ldots = r^0. \tag{25}$$

Звідси випливає, що r^0 можна подати у вигляді

$$r^0 = r_0 + a(\varepsilon) = r_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\varepsilon^k.$$

Підставивши зображення r^0 у (25), одержимо рівняння

$$-a_1 + I_1 + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi^0} F(r_0,\tau)d\tau + \varepsilon \ldots = 0. \tag{26}$$

Додавши до останнього рівняння почленно перше рівняння системи (16), будемо мати

$$-a_1 + C_1 + I_1 + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\varphi^0} F(r_0,\tau)d\tau + \varepsilon \ldots = 0. \tag{27}$$

Прирівнявши коефіцієнти при відповідних степенях ε, отримаємо систему рівнянь для знаходження $C_k,\, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{gathered} -a_1 + C_1 + I_1 + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\varphi^0} F(r_0,\tau)d\tau = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{28}$$

Отже, при $0 < \varphi_1 < \varphi^0 < \pi$ маємо $C_1 = a_1 - I_1 - \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^{\varphi^0} F(r_0,\tau)d\tau$.

Провівши аналогічні міркування, одержимо значення C_1 і в інших випадках.

Випадок 2. $x_2^0 > 0 \Rightarrow \varphi^0 \in (\pi, 2\pi)$.

a) $C_1 = a_1 - I_1 - \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\varphi^0} F(r_0,\tau)d\tau$ при $\pi < \varphi^0 < \varphi_2 < 2\pi$,

b) $C_1 = a_1 - I_1 - I_2 - \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int\limits_0^{\varphi^0} F(r_0,\tau)d\tau$ при $\pi < \varphi_2 < \varphi^0 < 2\pi$.

Випадок 3. $x_2^0 = 0 \Rightarrow \varphi^0 = 0$ або $\varphi^0 = \pi$.
a) $x_1^0 > 0$, тоді $\varphi^0 = 0$ і $C_1 = a_1$,

b) $x_1^0 < 0$, тоді $\varphi^0 = \pi$ і $C_1 = a_1 - I_1 - \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int\limits_0^{\pi} F(r_0,\tau)d\tau$.

Таким чином, значення C_1 знаходимо залежно від початкових даних:

$$C_1 = \begin{cases} a_1, \quad \varphi^0 = 0, \\ a_1 - \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int\limits_0^{\varphi^0} F(r_0,\tau)d\tau, \quad 0 < \varphi^0 < \varphi_1 < \pi, \\ a_1 - I_1 - \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int\limits_0^{\varphi^0} F(r_0,\tau)d\tau, \quad 0 < \varphi_1 < \varphi^0 < \varphi_2 < 2\pi, \\ a_1 - I_1 - I_2 - \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int\limits_0^{\varphi^0} F(r_0,\tau)d\tau, \quad \pi < \varphi_2 < \varphi^0 < 2\pi. \end{cases} \tag{29}$$

Отже, якщо виконується умова (21) та існують $\varphi_1 \in [0,\pi]$, $\varphi_2 \in (\pi, 2\pi)$ — розв'язки системи (18) і $F(r_0,\varphi_1) \neq 0$, $F(r_0,\varphi_2) \neq 0$, то існують близькі до них розв'язки системи (16).

Знайшовши таким чином наближені значення φ_1, φ_2, можна від умови (6) перейти до умови

$$\Delta r\Big|_{r=r_0} = \begin{cases} \varepsilon I_1, \quad \varphi = \varphi_1 + 2\pi n, \\ \varepsilon I_2, \quad \varphi = \varphi_2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{30}$$

2π-Періодичний розв'язок системи (5), (30) буде розв'язком системи (5), (6).

Від задачі (5), (30) перейдемо до рівняння

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\varepsilon F(r,\varphi)}{\lambda + \varepsilon G(r,\varphi)} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varepsilon I_1 \delta(\varphi - \varphi_1 - 2\pi k) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varepsilon I_2 \delta(\varphi - \varphi_2 - 2\pi k).$$

Використавши формулу

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\varphi + 2\pi k) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \cos k\varphi\right),$$

останнє рівняння зведемо до вигляду

$$\frac{dr}{d\varphi} = \varepsilon\left(\frac{F(r,\varphi)}{\lambda+\varepsilon G(r,\varphi)} + \frac{I_1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\cos k(\varphi-\varphi_1)\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{I_2}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\cos k(\varphi-\varphi_2)\right)\right),\ \varphi \neq \varphi_i + 2\pi k,\ i = 1,2,\ k \geq 1. \qquad (31)$$

Виконавши у рівнянні (31) заміну

$$r = \rho + \varepsilon\left(\frac{I_1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin k(\varphi-\varphi_1)}{k} - \frac{I_2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin k(\varphi-\varphi_2)}{k} + \frac{1}{\lambda}\widetilde{F}(\rho,\varphi)\right),$$

отримаємо рівняння

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \varepsilon\left(\frac{1}{\lambda}F_0(\rho) + \frac{I_1+I_2}{\pi}\right) + \varepsilon^2 F_1(\rho,\varphi,\varepsilon),\ \varphi \neq \varphi_i + 2\pi k,\ i = 1,2,\ k \geq 1. \qquad (32)$$

Тут $F_1(\rho,\varphi,\varepsilon)$ — неперервна по ρ і кусково-неперервна по φ функція з точками розриву першого роду в $\varphi = \varphi_i + 2\pi k$, $i = 1, 2$, $k \geq 1$.

Рівняння першого наближення для (32) має вигляд

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \varepsilon\left(\frac{1}{\lambda}F_0(\rho) + \frac{I_1+I_2}{\pi}\right). \qquad (33)$$

Кожен розв'язок рівняння (32) буде знаходитися в ε-околі деякого розв'язку рівняння (33). Якщо рівняння (33) має 2π-періодичний розв'язок, то і (32) теж має близький до нього 2π-періодичний розв'язок.

Для дослідження (33) застосуємо чисельно-аналітичний метод. Накладемо на функцію $F(r,\varphi)$ додаткову умову:

D) $F_0'(r_0) \neq 0$.

Тоді, згідно з [5], при виконанні умов **A** – **D** існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що для будь-якого $\varepsilon < \varepsilon_0$ рівняння (33) має 2π-періодичний розв'язок. У даному випадку таким розв'язком є $\rho = r_0$, а отже, перше наближення 2π-періодичного розв'язку системи (5), (6) має вигляд

$$r = r_0 + \varepsilon C_1 + \frac{\varepsilon}{\lambda}\left(\int_{\varphi_0}^{\varphi} F(r_0,\tau)d\tau + \frac{I_1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin k(\varphi-\varphi_1)}{k} - \frac{I_2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin k(\varphi-\varphi_2)}{k}\right).$$

Отже, можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай для системи*

$$\dot{x} = \lambda Hx + \varepsilon X(x), \quad \|x\| \neq r_0,$$

$$x(t_0) = x^0,$$

$$\Delta\|x\|\Big|_{\|x\|=r_0} = \begin{cases} \varepsilon I_1, & x_2 \le 0, \\ \varepsilon I_2, & x_2 > 0, \end{cases}$$

де $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $X(x) = \begin{pmatrix} X_1(x_1,x_2) \\ X_2(x_1,x_2) \end{pmatrix}$, $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$, $I_1 \cdot I_2 > 0$, *в деякій області* $D = \{x | \alpha < \|x\| < \beta\}$ *виконуються наступні умови:*

1) $X_1(x_1,x_2)$, $X_2(x_1,x_2)$ *є неперервними, обмеженими та задовольняють умову Ліпшиця по* x_1, x_2;

2) $\dfrac{1}{\lambda}F_0(r_0) + \dfrac{I_1+I_2}{\pi} = 0$, *де*

$$F_0(r) = \int\limits_0^{2\pi} \left(X_1(r\cos\varphi, -r\sin\varphi)\cos\varphi - X_2(r\cos\varphi, -r\sin\varphi)\sin\varphi\right)\, d\varphi;$$

3) $\dfrac{d}{dr}F_0(r_0) \ne 0$;

4) існують $\varphi_1 \in [0,\pi]$ *та* $\varphi_2 \in (\pi, 2\pi)$ — *розв'язки системи рівнянь*

$$C_1 + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\varphi_1} F(r_0,\tau)d\tau = 0,$$

$$-C_1 + I_2 + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\varphi_2}^{2\pi} F(r_0,\tau)d\tau = 0,$$

де $F(r,\varphi) = X_1(r\cos\varphi, -r\sin\varphi)\cos\varphi - X_2(r\cos\varphi, -r\sin\varphi)\sin\varphi$, *а стала* C_1 *визначається формулою (29);*

5) $F(r_0,\varphi_1) \ne 0$, $F(r_0,\varphi_2) \ne 0$.

Тоді існує $\varepsilon_0 > 0$ *таке, що для будь-якого* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *система має* 2π*-періодичний розв'язок.*

Як приклад розглянемо рівняння Ван дер Поля з імпульсною дією

$$\frac{d^2x}{dx^2} + x = \varepsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt}, \quad \|x\| \ne 1, \tag{34}$$

$$x(0) = 1 - \frac{3}{4}\varepsilon, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

$$\Delta\|(x,\dot{x})\|\Big|_{\|(x,\dot{x})\|=1} = \begin{cases} -\varepsilon\dfrac{\pi}{2}, & \dot{x} \le 0, \\[2ex] -\varepsilon\dfrac{\pi}{4}, & \dot{x} > 0. \end{cases} \tag{35}$$

Виконавши в (34) заміну $x = x_1$, $\dfrac{dx}{dt} = x_2$, перейдемо до системи

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \\ \dot{x_2} &= -x_1 + \varepsilon x_2(1-x_1^2), \quad \|x\| \ne 1, \end{aligned} \tag{36}$$

$$\Delta\|x\|\Big|_{\|x\|=1} = \begin{cases} -\varepsilon\dfrac{\pi}{2}, & x_2 \le 0, \\ \\ -\varepsilon\dfrac{\pi}{4}, & x_2 > 0, \end{cases} \tag{37}$$

$$x_1(0) = 1 - \frac{3}{4}\varepsilon, \quad x_2(0) = 0.$$

Для (36), (37) $X_1(x,y) = 0$, $X_2(x_1,x_2) = x_2(1-x_1^2)$ і для будь-якого $R > r_0$ в області $D = B_R(0)$виконуються умови $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.

Після заміни (4) отримаємо систему

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon\left(\frac{r(4-r^2)}{8} - \frac{r}{2}\cos 2\varphi + \frac{r^3}{8}\cos 4\varphi\right), \\ \dot{\varphi} &= 1 + \varepsilon\left(\frac{2-r^2}{4}\sin 2\varphi - \frac{r^2}{8}\sin 4\varphi\right). \end{aligned} \tag{38}$$

Від системи (38) перейдемо до рівняння

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\varepsilon\left(\frac{r(4-r^2)}{8} - \frac{r}{2}\cos 2\varphi + \frac{r^3}{8}\cos 4\varphi\right)}{1 + \varepsilon\left(\frac{r(2-r^2)}{4}\sin 2\varphi - \frac{r^3}{8}\sin 4\varphi\right)}, \quad r \ne 1. \tag{39}$$

Умова (37) після заміни набере вигляду

$$\Delta r\Big|_{r=1} = \begin{cases} -\varepsilon\dfrac{\pi}{2}, & \varphi \in [0,\pi], \\ \\ -\varepsilon\dfrac{\pi}{4}, & \varphi \in (\pi, 2\pi). \end{cases} \tag{40}$$

Початкова умова $x_1(0) = 1 - \dfrac{3}{4}\varepsilon$, $x_2(0) = 0$ після заміни набере вигляду

$$r(0) = 1 - \frac{3}{4}\varepsilon.$$

Отже, після заміни отримаємо рівняння (39) з умовою (40). Для знаходження моментів $\varphi = \varphi_1 \in [0,\pi]$ та $\varphi = \varphi_2 \in (\pi, 2\pi)$ виходу розв'язку задачі (39), (40) на коло $r = r_0$ потрібно знайти розв'язок рівняння (39). Для цього виконаємо у (39) заміну

$$r = \rho + \varepsilon\left(-\frac{\rho}{4}\sin 2\varphi + \frac{\rho^3}{32}\sin 4\varphi\right) = \rho + \varepsilon u(\rho,\varphi).$$

Розклавши праву частину отриманого рівняння по степенях ε, отримаємо

$$\dot{\rho} = \varepsilon\frac{\rho(4-\rho^2)}{8} + \varepsilon^2 \ldots .$$

Нехтуючи доданками порядку ε^2, одержуємо рівняння першого наближення для знаходження ρ

$$\dot{\rho} = \varepsilon\frac{\rho(4-\rho^2)}{8}.$$

Розв'язок останнього рівняння, розкладений по степенях ε, має вигляд

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon\frac{\rho_0(4-\rho_0^2)}{8}(\varphi - \varphi_0) + \varepsilon^2 \ldots .$$

Цей розв'язок повинен задовольняти умови:

a) $\exists\, \varphi_1 \in [0,\pi] : r\left(\varphi_1, 0, 1 - \dfrac{3}{4}\varepsilon\right) = 1;$

b) $\exists\, \varphi_2 \in (\pi, 2\pi) : r\left(\varphi_2, \varphi_1, 1 - \dfrac{\pi}{2}\varepsilon\right) = 1;$

c) $r\left(2\pi, \varphi_2, 1 - \dfrac{\pi}{4}\varepsilon\right) = 1 - \dfrac{3}{4}\varepsilon.$

Система рівнянь для знаходження моментів $\varphi = \varphi_1 \in [0,\pi]$ та $\varphi = \varphi_2 \in (\pi, 2\pi)$ виходу розв'язку задачі (39), (40) на коло $r = 1$ має вигляд

$$-\frac{3}{4} + \frac{3}{8}\varphi_1 - \frac{1}{4}\sin 2\varphi_1 + \frac{1}{32}\sin 4\varphi_1 = 0,$$

$$-\frac{\pi}{4} + \frac{3}{8}(2\pi - \varphi_2) + \frac{1}{4}\sin 2\varphi_2 - \frac{1}{32}\sin 4\varphi_2 = -\frac{3}{4}.$$

Її розв'язком будуть $\varphi_1 \approx 1,735$, $\varphi_2 \approx 5,537$.

Отже, виконуються всі умови теореми і система (36), (37) має 2π-періодичний розв'язок, перше наближення якого можна подати у вигляді

$$r(\varphi) = \begin{cases} 1 + \varepsilon\left(-\dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{8}\varphi - \dfrac{1}{4}\sin 2\varphi + \dfrac{1}{32}\sin 4\varphi\right), & \varphi \in [0, \varphi_1), \\ 1 + \varepsilon\left(-\dfrac{3}{4} - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3}{8}\varphi - \dfrac{1}{4}\sin 2\varphi + \dfrac{1}{32}\sin 4\varphi\right), & \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2), \\ 1 + \varepsilon\left(-\dfrac{3}{4} - \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{3}{8}\varphi - \dfrac{1}{4}\sin 2\varphi + \dfrac{1}{32}\sin 4\varphi\right), & \varphi \in [\varphi_2, 2\pi]. \end{cases}$$

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. — Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
2. *Самойленко А. М.* К вопросу обоснования метода усреднения для исследования колебаний в системах, подверженных импульсному воздействию // Укр. мат. журн. — 1967. — **19**, № 5. — С. 96–104.
3. *Самойленко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками // Мат. физика. — 1971. — Вып. 9.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* О методе усреднения в системах с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. — 1974. — **24**, № 5. — С. 411–418.
5. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. — Киев: Вища шк., 1976. — 184 с.
6. *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 428 с.
7. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1963. — 410 с.

Одержано 27.05.09,
після доопрацювання — 07.02.11