УДК 517.925

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. М. Евтухов

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
Украина, 65000, Одесса, ул. Дворянская, 2
e-mail: emden@farlep.net

Муса Джабер Абу Эль-Шаур

Ал ал-байт ун-т
Иордания, Мафрак
e-mail: drmousa67@yahoo.com

We find asymptotic representations for certain classes of second order ordinary differential equations that are close, in some, sense to linear equations.

Встановлено асимптотичні зображення для деяких класів розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку, що у деякому сенсі є близькими до лінійних рівнянь.

1. Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0\, p(t)\, y\, L(y), \tag{1.1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \le +\infty$ [1], $L : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная и медленно меняющаяся при $y \to Y_0$ функция, Y_0 равно либо 0, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_0} — односторонняя окрестность Y_0.

Согласно определению медленно меняющейся функции (см. [1])

$$\lim_{y \to Y_0} \frac{L(\lambda y)}{L(y)} = 1 \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0, \tag{1.2}$$

причем это предельное соотношение выполняется равномерно по λ на любом промежутке $[c, d] \subset]0, +\infty[$ (свойство M_1).

Примерами медленно меняющихся при $y \to Y_0$ функций являются

$$|\ln|y||^{\sigma_1},\ \ \ln^{\sigma_2}|\ln|y||,\ \ \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R},\ \ \exp(|\ln|y||^{\sigma_3}),\ \ 0 < \sigma_3 < 1,\ \ \exp\left(\frac{\ln|y|}{\ln|\ln|y||}\right), \tag{1.3}$$

функции, имеющие отличный от нуля конечный предел при $y \to Y_0$, и др.

[1] При $\omega = +\infty$ полагаем, что $a > 1$.

© В. М. Евтухов, Муса Джабер Абу Эль-Шаур, 2011

В частном случае, когда $L(y) \equiv 1$, уравнение (1.1) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Асимптотическое поведение при $t \to +\infty$ (случай $\omega = +\infty$) его решений достаточно подробно исследовано (см., например, [2]).

При $L(y) = |\ln|y||^\sigma$, $\sigma \in \mathbb{R}$, в работах [3–7] установлены условия существования и асимптотические при $t \uparrow \omega$ представления всех возможных типов так называемых $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений уравнения (1.1).

Определение 1.1. *Решение y уравнения (1.1) называется $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решением, $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и удовлетворяет условиям*

$$y : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0, \tag{1.4}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \begin{cases} \textit{либо} & 0, \\ \textit{либо} & \pm\infty, \end{cases} \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{[y'(t)]^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \tag{1.5}$$

Целью настоящей статьи является распространение результатов из [4] на случай произвольной медленно меняющейся при $y \to Y_0$ функции L.

2. Основные результаты. Для формулировки основных результатов потребуются некоторые вспомогательные обозначения и условия. Прежде всего введем два числа, положив

$$\mu_0 = \operatorname{sign} y_0, \quad \mu_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta_{Y_0} \text{ — левая окрестность } Y_0, \\ -1, & \text{если } \Delta_{Y_0} \text{ — правая окрестность } Y_0, \end{cases}$$

где $y_0 \in \Delta_{Y_0}$ и такое, что

$$|y_0| < 1 \quad \text{при} \quad Y_0 = 0, \quad y_0 > 1 \quad (y_0 < -1) \quad \text{при} \quad Y_0 = +\infty \quad (Y_0 = -\infty).$$

В силу (1.1) и (1.4) каждое $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решение уравнения (1.1) и его первая производная отличны от нуля на некотором промежутке $[t_1, \omega[$. Нетрудно понять, что числа μ_0 и μ_1 определяют на таком промежутке знаки $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решения и его первой производной. При таком их интерпретировании ясно, что

$$\mu_0\mu_1 < 0, \quad \text{если} \quad Y_0 = 0, \qquad \mu_0\mu_1 > 0, \quad \text{если} \quad Y_0 = \pm\infty. \tag{2.1}$$

Далее, введем вспомогательные функции

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

$$q(t) = p(t)\pi_\omega^2(t)\, L(\mu_0|\pi_\omega(t)|), \quad Q(t) = \int_{a_1}^{t} p(\tau)\pi_\omega(\tau) L(\mu_0|\pi_\omega(t)|)\, d\tau,$$

где $a_1 \in [a, \omega[$ такое, что $\mu_0|\pi_\omega(t)| \in \Delta_{Y_0}$ при $t \in [a_1, \omega[$, а также два следующих определения.

Определение 2.1. *Будем говорить, что медленно меняющаяся при $y \to Y_0$ функция L удовлетворяет условию S_1, если функция $L(\mu_0 \exp z)$ является правильно меняющейся функцией какого-либо порядка σ при $z \to Z_0$, где $Z_0 = +\infty$ в случае, когда $Y_0 = \pm\infty$, и $Z_0 = -\infty$ в случае, когда $Y_0 = 0$, т. е. представима в виде*

$$L(\mu_0 \exp z) = |z|^\sigma L_1(z), \tag{2.2}$$

где L_1 — непрерывная в окрестности Z_0 и медленно меняющаяся функция при $z \to Z_0$.

Определение 2.2. *Будем говорить, что медленно меняющаяся при $y \to Y_0$ функция L удовлетворяет условию S_2, если имеет место асимптотическое соотношение*

$$L\left(\mu_0 e^{(1+o(1))\ln|z|}\right) = L(\mu_0|z|)[1 + o(1)] \quad \textit{при} \quad z \to Y_0. \tag{2.3}$$

Условиям S_i, $i = 1, 2, 3$, заведомо удовлетворяют функции L, для которых существует отличный от нуля конечный предел при $y \to Y_0$, функции первых двух видов из (1.3) и другие.

Для уравнения (1.1) имеют место следующие утверждения.

Теорема 2.1. *Пусть функция L удовлетворяет условию S_1. Тогда для существования $P_\omega(\pm\infty)$-решений уравнения (1.1) необходимо и достаточно выполнения условий*

$$\mu_0\mu_1\pi_\omega(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a, \omega[, \quad \mu_0 \lim_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)| = Y_0, \tag{2.4}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} q(t) = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} Q(t) = \infty, \tag{2.5}$$

причем для каждого такого решения при $t \uparrow \omega$ имеют место асимптотические представления

$$\ln|y(t)| = \ln|\pi_\omega(t)| + \alpha_0 Q(t)[1 + o(1)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)}[1 + o(1)]. \tag{2.6}$$

Более того, при выполнении условий (2.4), (2.5) существуют в случае $\omega = +\infty$ двупараметрическое семейство $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$ решений с представлениями (2.6), а в случае $\omega < +\infty$ — однопараметрическое семейство таких решений.

Теорема 2.2. *Пусть функция L удовлетворяет условию S_2, функция $p : [a, \omega[\longrightarrow$ $\longrightarrow]0, +\infty[$ непрерывно дифференцируема и существует (конечный или равный $\pm\infty$) предел*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) q'(t)}{q(t)}.$$

Тогда для существования $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-решений уравнения (1.1) необходимо и достаточно выполнения условий (2.4), (2.5), причем для каждого такого решения при $t \uparrow \omega$ имеют место асимптотические представления

$$\ln|y(t)| = \ln|\pi_\omega(t)| + \alpha_0 Q(t)[1 + o(1)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)}[1 + \alpha_0\, q(t)[1 + o(1)]]. \tag{2.7}$$

Более того, при выполнении условий (2.4), (2.5) существуют в случае $\omega = +\infty$ *двупараметрическое семейство* $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$*-решений с представлениями (2.7), а в случае* $\omega < +\infty$ — *однопараметрическое семейство таких решений.*

Теорема 2.3. *Пусть выполняются условия (2.4), функция* $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ *непрерывно дифференцируема и такая, что выполняются второе из условий (2.5) и*

$$\int\limits_a^\omega |q'(t)|\, dt < +\infty, \quad \int\limits_a^\omega \frac{q^2(t)}{|\pi_\omega(t)|}\, dt < +\infty, \quad \int\limits_a^\omega \frac{q(t)|Q(t)|}{\pi_\omega(t)\ln|\pi_\omega(t)|}\, dt < +\infty. \tag{2.8}$$

Пусть, кроме того, для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$ *имеет место асимптотическое соотношение*

$$L\left(\mu_0|e^{\ln|\pi_\omega(t)| + \alpha_0 Q(t)[1+o(1)]}\right) = L(\mu_0|\pi_\omega(t)|)\,(1 + Q(t)[\gamma + o(1)]) \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.9}$$

Тогда для любого c*, удовлетворящего неравенству* $c\mu_1 > 0$*, существует* $P_\omega(\pm\infty)$*-решение уравнения (1.1), допускающее при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$y(t) = \pi_\omega(t)\exp[\alpha_0 Q(t)][c + o(1)], \quad y'(t) = \exp[\alpha_0 Q(t)][c + o(1)]. \tag{2.10}$$

Доказательство теоремы 2.1. *Необходимость.* Пусть $y : [t_0, \omega[\to \mathbb{R}$ — произвольное $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-решение уравнения (1.1). Тогда выполняются условия (1.4), (1.5), причем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y''(t)y(t)}{(y'(t))^2} = 0$$

и $\operatorname{sign} y(t) = \mu_0$, $\operatorname{sign} y'(t) = \mu_1$ на некотором промежутке $[t_1, \omega[\subset [t_0, \omega[$. Отсюда с учетом тождества

$$\frac{y''(t)y(t)}{(y'(t))^2} = \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)' \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^{-2} + 1$$

следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = 1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = 0. \tag{2.11}$$

В силу первого из этих предельных соотношений выполняются первое из условий (2.4) и второе из асимптотических соотношений (2.6). Кроме того, из него следует, что $y(t) = \mu_0|\pi_\omega(t)|^{1+o(1)}$ при $t \uparrow \omega$. Поэтому вследствие (1.4) выполняется второе из условий (2.4).

Поскольку $y(t) = \mu_0 e^{[1+\varepsilon(t)]\ln|\pi_\omega(t)|}$, где $\varepsilon(t) = o(1)$ ири $t \uparrow \omega$ и функция L удовлетворяет условию S_1, в силу (2.2) имеем

$$L(y(t)) = L\left(\mu_0 e^{[1+\varepsilon(t)]\ln|\pi_\omega(t)|}\right) = |(1+\varepsilon(t))\ln|\pi_\omega(t)||^\sigma\, L_1\left([1+\varepsilon(t)]\ln|\pi_\omega(t)|\right),$$

откуда с учетом свойства M_1 медленно меняющихся функций следует, что

$$L(y(t)) = L\left(\mu_0 e^{[1+\varepsilon(t)]\ln|\pi_\omega(t)|}\right) = |\ln|\pi_\omega(t)||^\sigma L_1\left(\ln|\pi_\omega(t)|\right)[1+o(1)] =$$

$$= L\left(\mu_0 e^{\ln|\pi_\omega(t)|}\right)[1+o(1)] = L(\mu_0|\pi_\omega(t)|)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Учитывая это асимптотическое соотношение и первое из предельных соотношений (2.11), из (1.1) находим

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \alpha_0 p(t)\pi_\omega(t)\, L(\mu_0|\pi_\omega(t)|)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.12}$$

Отсюда в силу второго из предельных соотношений (2.11) следует первое из условий (2.5).

Интегрируя (2.12) на промежутке от t_2 до t, где $t_2 = \max\{a_1, t_1\}$, приходим к выводу, с учетом первого из условий (1.5), что выполняется второе из условий (2.5) и

$$\ln|y'(t)| = \alpha_0 Q(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Из этого соотношения непосредственно следует первое из асимптотических представлений (2.6), если учесть, что выполнено второе из условий (2.5) и согласно (2.11) $y'(t) \sim \sim \dfrac{y(t)}{\pi_\omega(t)}$ при $t \uparrow \omega$.

Достаточность. Предположим, что выполняются условия (2.4), (2.5). Уравнение (1.1) с помощью преобразования

$$\ln|y(t)| = \ln|\pi_\omega(t)|[1+v_1(\tau)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1+v_2(\tau)}{\pi_\omega(t)}, \quad \tau = \beta\ln|\pi_\omega(t)|, \tag{2.13}$$

где

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ -1, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

сведем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{1}{\tau}[v_2 - v_1], \\ v_2' &= \beta\left[\alpha_0 p(t)\pi_\omega^2(t)L(Y(t,v_1)) - v_2 - v_2^2\right], \end{aligned} \tag{2.14}$$

в которой $t = t(\tau)$ — функция, обратная к $\tau = \beta\ln|\pi_\omega(t)|$,

$$Y(t, v_1) = \mu_0 e^{(1+v_1)\ln|\pi_\omega(t)|}. \tag{2.15}$$

Эту систему уравнений рассмотрим на множестве

$$\Omega = [\tau_0, +\infty[\times\left\{(v_1, v_2) : |v_i| \le \frac{1}{2},\ i = 1,2\right\},$$

где $\tau_0 = \beta \ln |\pi_\omega(t_0)|$, а $t_0 \in [a, \omega[$ выбрано с учетом (2.1) и (2.4) так, чтобы при $t \in [t_0, \omega[$ и $|v_1| \leq \dfrac{1}{2}$ выполнялось условие $Y(t, v_1) \in \Delta_{Y_0}$.

На этом множестве правые части системы непрерывны. Кроме того, учитывая, что функция L удовлетворяет условию S_1, а функция Y имеет вид (2.15), с использованием свойства M_1 медленно меняющихся функций получаем представление

$$L(Y(t, v_1)) = |1 + v_1|^\sigma L(\mu_0 |\pi_\omega(t)|)[1 + r(t, v_1)],$$

в котором функция r стремится к нулю при $t \uparrow \omega$ равномерно по $|v_1| \leq \dfrac{1}{2}$. В силу этого представления систему дифференциальных уравнений (2.14) можно записать в виде

$$v_1' = \frac{1}{\tau}[v_2 - v_1],$$

$$v_2' = \beta \left[f(\tau, v_1) - v_2 - v_2^2 \right],$$

где

$$f(\tau, v_1) = f(\tau(t), v_1) = \alpha_0 q(t)(1 + v_1)^\sigma [1 + r(t, v_1)].$$

Здесь вследствие первого из условий (2.5) и указанного выше свойства функции r

$$\lim_{\tau \to +\infty} f(\tau, v_1) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad |v_1| \leq \frac{1}{2}.$$

Поэтому к данной системе применима теорема 2.5 из работы [8]. Согласно этой теореме данная система дифференциальных уравнений в случае $\beta > 0$ имеет двупараметрическое, а в случае $\beta < 0$ — однопараметрическое семейство решений $(v_1, v_2) : [\tau_1 + \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\tau_1 \geq \tau_0$, стремящихся к нулю при $\tau \to +\infty$. Каждому из таких решений в силу замен (2.13) соответствует решение $y : [t_1, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ ($\tau_1 = \beta \ln |\pi_\omega(t_1)|$), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\ln |y(t)| = [1 + o(1)] \ln |\pi_\omega(t)|, \qquad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)}[1 + o(1)].$$

Вследствие этих асимптотических соотношений и второго из условий (2.5) такое y, как было показано при доказательстве необходимости, допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.6).

Кроме того, учитывая вышеизложенное и определение числа β, приходим к выводу, что существуют двупараметрическое семейство решений с представлениями (2.6) в случае, когда $\omega = +\infty$, и однопараметрическое в случае $\omega < +\infty$. Используя эти представления, а также условия (2.4), (2.5) нетрудно проверить, что любое из таких решений уравнения (1.1) является $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-решением.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.2. *Необходимость.* Сначала, рассматривая произвольное $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-решение $y : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$ уравнения (1.1), точно так же, как при доказательстве необходимости теоремы 2.1, устанавливаем, с использованием условия S_2 (вместо условия S_1), что выполняются условия (2.4), (2.5) и при $t \uparrow \omega$ имеют место асимптотические соотношения (2.6). Значит, осталось лишь доказать справедливость для рассматриваемого решения второго из представлений (2.7). С этой целью прежде всего установим, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)q'(t)}{q(t)} = 0. \tag{2.16}$$

Действительно, если бы это было не так, то, полагая $c(t) = \dfrac{\pi_\omega(t)q'(t)}{q(t)}$ и учитывая, что предел этой функции при $t\uparrow\omega$ существует, получили бы соотношение

$$q'(t) = \frac{q(t)c(t)}{\pi_\omega(t)}, \quad \text{где} \quad \lim_{t\uparrow\omega} c(t) = \begin{cases} \text{или} & \text{const} \neq 0, \\ \text{или} & \pm\infty. \end{cases}$$

Отсюда с учетом второго из условий (2.5) имеем

$$q(t) - q(a) = \int\limits_a^t \frac{q(\tau)c(\tau)}{\pi_\omega(\tau)}\,d\tau \longrightarrow \infty \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Однако это невозможно, поскольку в силу первого из условий (2.5) левая часть данного соотношения имеет конечный предел при $t\uparrow\omega$.

Из (1.1) в силу второго из представлений (2.6) и условия S_2 следует, что для решения y имеет место асимптотическое соотношение

$$y''(t) = \alpha_0 p(t)y(t)|L(\mu_0|\pi_\omega(t)|)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Отсюда следует справедливость на некотором промежутке $[t_1,\omega[\subset [t_0,\omega[$ равенства

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)' + \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2 = \alpha_0 p(t)|L(\mu_0|\pi_\omega(t)|)[1+\varepsilon(t)], \tag{2.17}$$

где $\varepsilon : [t_1,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{t\uparrow\omega}\varepsilon(t) = 0. \tag{2.18}$$

Введем теперь функцию $z : [t_1,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}$, положив

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[1+\alpha_0 q(t)z(t)\right]. \tag{2.19}$$

В силу (2.17) эта функция на промежутке $[t_1,\omega[$ является решением дифференциального уравнения

$$z' = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[-\frac{\pi_\omega(t)q'(t)}{q(t)}z - z - \alpha_0 q(t)z^2 + 1 + \varepsilon(t)\right]. \tag{2.20}$$

Учитывая первое из условий (2.5) и условия (2.16), (2.18), замечаем, что соответствующая этому уравнению функция

$$B_c(t) = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[-\frac{\pi_\omega(t) q'(t)}{q(t)} c - c - \alpha_0 q(t) c^2 + 1 + \varepsilon(t) \right]$$

при любом значении $c \neq 1$ сохраняет знак в некоторой левой окрестности ω. Поэтому согласно лемме 2.1 из работы [9] для каждого решения дифференциального уравнения (2.20), определенного в левой окрестности ω, а значит, и для рассматриваемой функции $z(t)$ существует конечный или равный $\pm\infty$ предел при $t \uparrow \omega$. Теперь с учетом этого факта и второго из условий (2.5) замечаем, что соотношение

$$\ln|y(t)| = \ln|\pi_\omega(t)| + \alpha_0 \int\limits_{t_1}^{t} \frac{q(\tau) z(\tau)}{\pi_\omega(\tau)}\, d\tau + C$$

(C — некоторая постоянная), которое следует из (2.19), не противоречит первому из асимптотических представлений (2.6) лишь в случае, когда $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z(t) = 1$. Поэтому согласно (2.19) имеет место второе из асимптотических представлений (2.6).

Достаточность. Пусть выполняются условия (2.4), (2.5). Тогда, как было установлено выше, выполняется условие (2.16). Кроме того, используя правило Лопиталя, с учетом первого из условий (2.5) получаем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{Q(t)}{\ln|\pi_\omega(t)|} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{Q'(t)}{\frac{1}{\pi_\omega(t)}} = \lim_{t\uparrow\omega} q(t) = 0. \tag{2.21}$$

Теперь покажем, что в данном случае уравнение (1.1) имеет решения, допускающие при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.7), и выясним вопрос о количестве таких решений. Для этого, применяя к уравнению (1.1) преобразование

$$\ln|y(t)| = \ln|\pi_\omega(t)| + \alpha_0 Q(t)[1 + v_1(\tau)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[1 + \alpha_0 q(t)(1 + v_2(\tau))\right], \tag{2.22}$$

где

$$\tau(t) = \ln|Q(t)|,$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} v_1' &= v_2 - v_1, \\ v_2' &= h(\tau)[f(\tau, v_1, v_2) - v_2], \end{aligned} \tag{2.23}$$

в которой

$$f(\tau, v_1, v_2) = f(\tau(t), v_1, v_2) = \frac{L(Y(t, v_1))}{L(\mu_0 |\pi_\omega(t)|)} - 1 - \alpha_0 q(t)(1 + v_2)^2 - \frac{\pi_\omega(t) q'(t)}{q(t)}(1 + v_2),$$

$$h(\tau) = h(\tau(t)) = \frac{Q(t)}{q(t)}, \quad Y(t, v_1) = \mu_0 \exp\left(\ln|\pi_\omega(t)| + \alpha_0 Q(t)[1 + v_1]\right).$$

В силу вида функций q, Q и условий (2.4), (2.5)

$$\operatorname{sign} h(\tau) = \operatorname{sign} q(t)\, Q(t) = \operatorname{sign} \pi_\omega(t) \quad \text{при} \quad t \in]a_1, \omega[, \qquad \lim_{\tau \to +\infty} h(\tau) = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{Q(t)}{q(t)} = \pm\infty.$$

Кроме того, в силу условия (2.21) и условия S_2, которому удовлетворяет функция L,

$$L(Y(t, v_1)) = L(\mu_0 |\pi_\omega(t)|)[1 + r(t, v_1)],$$

где $r(t, v_1) \longrightarrow 0$ при $t \uparrow \omega$ равномерно по $|v_1| \le \frac{1}{2}$. Поэтому с учетом (2.16) и первого из условий (2.5) имеем

$$\lim_{\tau \to +\infty} f(\tau, v_1) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad |v_1| \le \frac{1}{2}.$$

Тем самым показано, что для системы (2.23) выполняются условия теоремы 2.5 из работы 8. Согласно этой теореме данная система при $\omega = +\infty$ имеет двупараметрическое семейство решений $(v_1, v_2) : [\tau_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(\tau_1 \ge \tau_0 = \ln|Q(t_0)| = 0)$, стремящихся к нулю при $\tau \to +\infty$, а в случае $\omega < +\infty$ существует однопараметрическое семейство таких решений. Каждому из них в силу замены (2.22) соответствует решение $y : [t_1, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(\tau_1 = \ln|Q(t_1)|)$ уравнения (1.1), которое допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.7). Используя эти представления, а также условия S_2, (2.4), (2.5), нетрудно заметить, что все эти решения являются $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-решениями уравнения (1.1).

Замечание 2.1. Прежде чем приступить к доказательству теоремы 2.3, заметим, что из первых двух условий (2.8) следует первое из условий (2.5). Учитывая (2.4), (2.5), первое из условий (2.8) и условие (2.9), нетрудно показать, повторяя рассуждения доказательства достаточности теоремы 2.2, что дифференциальное уравнение (1.1) имеет в случае $\omega < +\infty$ однопараметрическое семейство $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$- решений, допускающих при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.7), а в случае $\omega = +\infty$ двупараметрическое семейство таких решений. Более того, можно показать, что для каждого $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$- решения уравнения (2.3) имеют место при $t \uparrow \omega$ представления (2.7). Утверждение же теоремы 2.3 выделяет из множества всех таких $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-решений те, которые имеют точные асимптотические формулы, содержащие в себе одну из произвольных постоянных.

Доказательство теоремы 2.3. Выбрав произвольным образом постоянную c, удовлетворяющую неравенству $\mu_1 c > 0$, уравнение (1.1) с помощью преобразования

$$\begin{gathered} \tau(t) = \beta \ln|\pi_\omega(t)|, \quad y(t) = \pi_\omega(t) \exp\left[\alpha_0 Q(t)\right]\left[c + v_1(\tau)\right], \\ y'(t) = \exp\left[\alpha_0 Q(t)\right]\left[c + v_2(\tau) - \alpha_0 q(t) v_1(\tau)\right], \end{gathered} \tag{2.24}$$

где

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ -1, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

сведем к системе дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
v_1' &= \beta\left[v_2 - v_1 - \alpha_0 q(t)(c+2v_1)\right], \\
v_2' &= \alpha\beta q(t)\left[(c+v_1)\left(\frac{L\left(\pi_\omega(t)e^{\alpha_0 Q(t)}(c+v_1)\right)}{L(\mu_0|\pi_\omega(t)|)} - 1 - \alpha_0 q(t)\right) + \frac{\pi_\omega(t)q'(t)}{q(t)}v_1\right],
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

в которой $t = \tau(t)$ — функция, обратная к $\tau = \beta \ln|\pi_\omega(t)|$.

В силу первых двух условий из (2.8) выполняется первое из условий (2.5), а поэтому справедливо и (2.21). Учитывая эти условия, а также асимптотическое соотношение (2.9), имеем

$$
L\left(\pi_\omega(t)e^{\alpha_0 Q(t)}(c+v_1)\right) = L\left(\mu_0 e^{\ln|\pi_\omega(t)|\left[1+\frac{\alpha_0 Q(t)}{\ln|\pi_\omega(t)|}\left(1+\frac{\ln|c+v_1|}{\alpha_0 Q(t)}\right)\right]}\right) =
$$

$$
= L(\mu_0|\pi_\omega(t)|)\left[1 + \frac{\alpha_0 Q(t)}{\ln|\pi_\omega(t)|}(\gamma + R(t,v_1))\right], \quad \lim_{t\uparrow\omega} R(t,v_1) = 0,
$$

равномерно по $|v| \le \dfrac{|c|}{2}$.

Используя теперь это представление, записываем систему (2.25) в виде

$$
\begin{aligned}
v_1' &= \beta[v_2 - v_1 - \alpha_0 h_1(\tau)(c+2v_1)], \\
v_2' &= \beta h_1(\tau)[c(\gamma h_2(\tau) - h_1(\tau)) + (\gamma h_2(\tau) - h_1(\tau) + \alpha_0 h_3(\tau))v_1 + h_2(\tau) f(\tau, v_1)],
\end{aligned}
$$

где

$$
h_1(\tau(t)) = q(t), \quad h_2(\tau(t)) = \frac{Q(t)}{\ln|\pi_\omega(t)|},
$$

$$
h_3(\tau(t)) = \frac{\pi_\omega(t)q'(t)}{q(t)}, \quad f(\tau(t), v_1) = (c+v_1)R(t,v_1).
$$

В силу условий (2.4), (2.5) и (2.21) правые части этой системы непрерывны на множестве $[\tau_0,+\infty[\times D$, где τ_0 — некоторое достаточно большое число и $D = \left\{v_1 \in \mathbb{R} : |v_1| \le \dfrac{|c|}{2}\right\}$. Кроме того, здесь $f(\tau, v_1) \longrightarrow 0$ при $\tau \to +\infty$ равномерно по $v_1 \in D$ и в силу условий (2.8)

$$
\lim_{\tau\to+\infty} h_1(\tau) = 0, \quad \int\limits_{\tau_0}^{+\infty} h_1^2(\tau)\, d\tau < +\infty,
$$

$$
\int\limits_{\tau_0}^{+\infty} h_1(\tau)|h_2(\tau)|\, d\tau < +\infty, \quad \int\limits_{\tau_0}^{+\infty} h_1(\tau)|h_3(\tau)|\, d\tau < +\infty.
$$

Поэтому данная система уравнений имеет на основании теоремы 1.2 из работы [8] хотя бы одно решение $(v_1, v_2) : [\tau_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $\tau_1 \ge \tau_0$, стремящееся к нулю при $\tau \to +\infty$, причем в случае $\beta = 1$ (т. е. когда $\omega = +\infty$) существует однопараметрическое семейство таких решений. Каждому такому решению в силу замен (2.24) соответствует решение $y : [t_1, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$ $(\tau_1 = \beta \ln |\pi_\omega(t_1)|)$ дифференциального уравнения (1.1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.10). Используя эти представления и условия (2.4), (2.5), (2.21) и (2.9), нетрудно проверить, что такие решения уравнения (1.1) являются $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-решениями.

Теорема доказана.

Замечание 2.2. Из теорем 2.1 – 2.3 при $L(y) = |\ln|y||^\sigma$ и $L(y) \equiv 1$ следуют все результаты работы [4].

1. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 144 с.
2. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1990. — 430 с.
3. *Муса Джабер Абу Эль-Шаур.* Асимптотика решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, близких к линейным // Нелинейные колебания. — 2008. — **11**, № 2. — С. 230 – 241.
4. *Evtukhov V. M., Mousa Jaber Abu Elshour.* Asymptotic behaviour of solutions of second order nonlinear differential equations clouse to linear equations // Mem. Different. Equat. Math. Phys. — 2008. — **43**. — P. 97 – 106.
5. *Mousa Jaber Abu Elshour.* Asymptotic representations of the solutions of a class of the second order nonautonomous differential equations// Mem. Different. Equat. Math. Phys. — 2008. — **44**. — P. 59 – 68.
6. *Mousa Jaber Abu Elshour, Evtukhov V. M.* Asymptotic representations for solutions of a class of second order nonlinear differential equations // Miscolc Math. Notes. — 2009. — **2**. — P. 119 – 127.
7. *Mousa Jaber Abu Elshour.* Asymptotic representations of solutions of second order nonlinear differential equations // Int. Math. Forum. — 2009. — **4**, № 17. — P. 835 – 844.
8. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 1. — С. 52 – 80.
9. *Евтухов В. М., Шинкаренко В. Н.* Асимптотические представления решений двучленных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью // Дифференц. уравнения. — 2008. — **44**, № 3. — С. 308 – 322.

Получено 13.10.10