УДК 517.938.5

ДИНАМИКА ВНУТРЕННИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

И. Ю. Власенко

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3

We have studied properties of invariant sets of dynamical systems generated by inner maps. We prove that if x is a nonwandering point of a finitely multiple inner map, then not only its positive trajectory $O^+(x)$ consists of nonwandering points, but also the negative trajectory $O^-(x)$ contains at least one partial half-trajectory consisting of nonwandering points.

Досліджено властивості інваріантних множин динамічних систем, що породжені внутрішніми відображеннями. Доведено, що якщо x — неблукаюча точка скінченнократного внутрішнього відображення, то не лише її додатна траєкторія $O^+(x)$ складається з неблукаючих точок, але й від'ємна траєкторія $O^-(x)$ містить як мінімум одну часткову півтраєкторію, що складається з неблукаючих точок.

1. Введение. Динамика необратимых отображений в настоящее время достаточно полно изучена для одномерных систем и в какой-то мере для компактных пространств. В общем же случае необратимые отображения являются в значительной мере не разработанным объектом исследований. Одно из перспективных направлений — выделение подклассов необратимых отображений, у которых динамика более регулярна, чем у общих необратимых отображений. Например, в работах [1, 2] рассматриваются нульмерные почти взаимно однозначные отображения.

В данной работе исследованы динамические свойства сюръективных внутренних отображений на произвольных метризуемых пространствах. Показано, что с точки зрения динамических систем сюръективные внутренние отображения отличаются наличием инвариантных множеств рекуррентных и неблуждающих точек, возможностью рассматривать частные траектории точек назад во времени и являются достаточно хорошим аналогом гомеоморфизмов среди необратимых систем. В частности, получен следующий результат.

Теорема. *Если x — неблуждающая точка конечнократного сюръективного внутреннего отображения, то не только ее положительная траектория $O^+(x)$ состоит из неблуждающих точек, но и отрицательная траектория $O^-(x)$ содержит как минимум одну частную полутраекторию, состоящую из неблуждающих точек.*

2. Предварительные сведения. ***2.1. Множества траекторий.*** Пусть M — топологическое пространство и $f : M \to M$ — непрерывное сюръективное отображение.

Определение 1. *Отображение f называется открытым, если образ любого открытого множества открыт.*

Определение 2. *Отображение f называется нульмерным, если прообраз любого нульмерного множества нульмерен.*

Обозначим через $O_f^+(x)$ положительную полутраекторию точки x, т. е. множество $\{f^n(x)|\ n \geq 0\}$, через $O_f^-(x)$ отрицательную полутраекторию точки x, т. е. множество $\{f^n(x)|\ n < 0\}$. Определение $O_f^-(x)$ корректно, так как мы предполагаем, что f — сюръективное отображение.

Отметим, что по определению $O_f^+(x)$ состоит из точек, в то время как в общем случае $\{f^{-1}(x)\}$ представляет собой более чем замкнутое множество. Однако если f — нульмерное отображение, то в таком случае естественно воспринимать отрицательную полутраекторию точки x как набор различных точек.

Определение 3. *Полной траекторией $O_f(x)$ точки x назовем множество* $\bigcup\limits_{y \in O_f^+(x)} O_f^-(y)$.

Определение 4. *Частной траекторией $o_f(x)$ точки x назовем произвольное множество вида $\{x_i|f(x_i) = x_{i+1}, i \in \mathbb{Z}, x_0 = x\}$.*

Если $i \leq 0$, будем говорить о частной отрицательной траектории. Заметим, что частная положительная траектория всегда совпадает с обычной положительной траекторией.

2.1.1. Изолированные отображения.

Определение 5. *Отображение f называется изолированным, если прообраз точки состоит из изолированных точек.*

Замечание 1. Изолированное отображение нульмерно.

Определение 6. *Отображение f называется внутренним, если оно открыто и изолированно.*

Заметим, что произвольное открытое нульмерное отображение может и не быть изолированным.

Для примера рассмотрим множество A, состоящее из стандартного канторова множества на отрезке $[0, 1]$ и изолированной точки $\{2\}$. Внутреннее отображение A на себя, заданное формулой $f(x) = \min\{3x, 2\}$, очевидно, не является изолированным в точке $\{2\}$.

Замечание 2. Если M — компакт, а f является изолированным в x, то f^{-1} имеет в x конечное число прообразов.

2.2. Рекуррентные точки. Определим для каждой точки x ω-предельное множество $\omega(x)$ и α-предельное множество $\alpha(x)$:

$$\omega(x) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{N}^{+\infty} f^n(x)}, \quad \alpha(x) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{N}^{+\infty} f^{-n}(x)}.$$

Заметим, что по определению эти множества замкнуты.

Определение 7. *Назовем точку x ω-(α-)рекуррентной, если $x \in \omega(x)$ (соответственно $x \in \alpha(x)$).*

Обозначим через $\mathrm{Rec}_+(f)$ множество ω-рекуррентных точек, через $\mathrm{Rec}_-(f)$ множество α-рекуррентных точек и через $\mathrm{Rec}(f) = \mathrm{Rec}_+(f) \cup \mathrm{Rec}_-(f)$ множество всех рекуррентных[1] точек.

[1] Такое определение рекуррентности называется еще рекуррентностью по Готтшалку и Хедлунду.

Обозначим через $\mathrm{Lim}(f) = \mathrm{Lim}_+(f) \cup \mathrm{Lim}_-(f)$ *предельное множество* f, объединение ω-предельных множеств и α-предельных множеств всех точек. Легко видеть, что $\mathrm{Rec}(f) \subset \mathrm{Lim}(f)$.

2.2.1. Инвариантность множества рекуррентных точек. У необратимых отображений различные точки траектории могут имеет различные свойства с точки зрения теории динамических систем. В то же время эти же свойства у гомеоморфизмов, как правило, справедливы для всей траектории, если они справедливы хотя бы для одной точки.

Как показывает следующий пример, траектория, содержащая рекуррентную точку, может содержать как рекуррентные, так и, например, блуждающие точки.

Пример конечнократного сюръективного внутреннего отображения, у которого траектории содержат как блуждающие, так и неблуждающие (рекуррентные) точки. Рассмотрим счетный набор единичных окружностей с координатами (n, α), где $n \in \mathbb{Z}^+$ — номер окружности, $\alpha \in [0, 2\pi)$ — угловая координата.

Пусть $\psi(\alpha) = \alpha + \xi \mod 2\pi$ — поворот на иррациональный угол. Легко видеть, что у отображения $(n, \alpha) \mapsto (\max(n-1, 0), \psi(\alpha))$ точки с $n = 0$ — неблуждающие, а с $n > 0$ — блуждающие.

Хотелось бы найти такой набор условий на непрерывные сюръективные отображения, чтобы для удовлетворяющих им отображений из существования некоторых свойств хотя бы для одной точки следовала справедливость этих свойств хотя бы для части точек траектории.

Лемма 1. *Пусть $f : M \to M$ — непрерывное сюръективное отображение. Тогда если x — ω-(α-)рекуррентная точка, то ее положительная полутраектория $O_f^+(x)$ состоит из ω-(α-)рекуррентных точек.*

Доказательство опирается на два простых утверждения:

1. Если $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ — последовательность вложенных множеств, то для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \cap_{m\geq k} A_m$.

2. Если имеются две последовательности вложенных множеств, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ и $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$, причем $B_k \supseteq A_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то $\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n \supseteq \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Обозначим $y = f^k(x)$. Рассмотрим $\omega(y)$ такое, что

$$\bigcap_{n=N}^{\infty} f^n(y) = \bigcap_{m=N+k}^{\infty} f^m(y),$$

поэтому, используя утверждение 1, имеем

$$\omega(y) = \bigcap_N \overline{\bigcap_{n=N}^{\infty} f^n(y)} = \bigcap_N \overline{\bigcap_{m=N+k}^{\infty} f^m(x)} = \bigcap_N \overline{\bigcap_{s=N}^{\infty} f^s(x)} = \omega(x).$$

Рассмотрим $\alpha(y)$. Обозначим

$$\hat{B}_N = \overline{\bigcup_{n=N}^{\infty} f^{-n}(y)}, \quad B_N = \overline{\bigcup_{n=N}^{\infty} f^{-n-k}(y)} = \hat{B}_{N+k}, \quad A_N = \overline{\bigcup_{n=N}^{\infty} f^{-n}(x)}.$$

Очевидно, что $f^{-n}(x) \subseteq f^{-n-k}(y)\ \forall n < N$. Поэтому $A_N \subseteq B_N\ \forall N \in \mathbb{N}$. Заметим, что $f^{-k}\left(\hat{B}_N\right) = f^{-k}\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} f^{-n}(y)\right) \supseteq \overline{f^{-k}\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} f^{-n}(y)\right)} = \overline{\bigcup_{n=N}^{\infty} f^{-n-k}(y)} = B_N$.

Поэтому $f^{-k}(\alpha(y)) = f^{-k}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \hat{B}_N\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-k}\left(\hat{B}_N\right) \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_N \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_N = = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n=N}^{\infty} f^{-n}(x)} = \alpha(x)$.

С другой стороны, $x \in f^{-k}(y)$. Следовательно, если x — α-рекуррентная точка, то $f^{-k}(\alpha(y)) \cap f^{-k}(y) \neq \varnothing$, так как $\alpha(x) \ni x$. Отсюда следует, что $f^k\left(f^{-k}(\alpha(y))\right) \cap \cap f^k\left(f^{-k}(y)\right) \supseteq f^k\left(f^{-k}(\alpha(y)) \cap f^{-k}(y)\right) \neq \varnothing$ и y — тоже α-рекуррентная точка.

Лемма 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть $f : M \to M$ — внутреннее сюръективное отображение. Тогда если x — рекуррентная точка, то ее положительная полутраектория $O_f^+(x)$ состоит из рекуррентных точек.*

Следствие 2. *Пусть $f : M \to M$ — внутреннее сюръективное отображение. Тогда множества ω-(α-)рекуррентных и рекуррентных точек f инвариантны.*

2.3. Неблуждающие точки. Далее всюду под окрестностью точки будем понимать открытое множество, содержащее эту точку.

Определение 8. *Точка $x \in M$ называется ω-блуждающей точкой f, если найдется такая ее окрестность U, что $f^m(U) \cap U = \varnothing$ для всех $m > 0$.*

Определение 9. *Точка $x \in M$ называется ω-неблуждающей точкой f, если для любой ее окрестности U найдется такое $m > 0$, что $f^m(U) \cap U \neq \varnothing$.*

Определение 10. *Точка $x \in M$ называется α-неблуждающей точкой f, если для любой ее окрестности U найдется число $l > 0$ такое, что $f^{-l}(U) \cap U \neq \varnothing$.*

Определение 11. *Точка $x \in M$ называется α-блуждающей точкой f, если найдется такая ее окрестность U, что $f^{-l}(U) \cap U = \varnothing$ для всех $l > 0$.*

Заметим, что эти определения являются взаимно дополняющими. Другими словами, если точка не является ω-(α-)блуждающей, то она ω-(α-)неблуждающая, и наоборот.

Определение 12. *Точка $x \in M$ называется блуждающей точкой f, если она одновременно ω- и α-блуждающая, в противном случае точка $x \in M$ называется неблуждающей точкой f.*

Множество блуждающих точек f обозначим через $W(f)$. $W(f)$ открыто в M, поскольку каждая блуждающая точка входит в блуждающее множество вместе со своей окрестностью. Точки, не являющиеся блуждающими в смысле определения 12, являются неблуждающими. Множество неблуждающих точек f обозначим через $\Omega(f)$. Оно замкнуто в M как дополнение к $W(f)$.

Поскольку периодическая точка является частным случаем неблуждающей точки, множество $\mathrm{Per}(f)$ периодических точек содержится в $\Omega(f)$.

2.4. Инвариантность множества неблуждающих точек. Рассмотрим, как свойство быть блуждающей или неблуждающей точкой распространяется по ее траектории.

Лемма 2. *Пусть $f : M \to M$ — произвольное непрерывное сюръективное отображение. Тогда если x является α-неблуждающей точкой, то ее положительная полутраектория $O_f^+(x)$ состоит из α-неблуждающих точек.*

Доказательство. Предположим от противного, что существует $n > 0$ такое, что $x_n = f^n(x)$ является α-блуждающей точкой. Тогда по определению найдется $U(x_n)$ — открытая окрестность точки x_n такая, что для любого $k < 0$ $f^k(U) \cap U = \varnothing$.

Множество $f^{-n}(U(x_n))$ открыто, так как f непрерывно. Поскольку x — α-неблуждающая точка, а $U'(x) = f^{-n}(U(x_n))$ — ее открытая окрестность, то по определению существует $m > 0$ такое, что $f^{-m}(U'(x)) \cap U'(x) \neq \varnothing$. Множество $U'' = f^{-m}(U'(x))$ открыто, так как f непрерывно.

Но тогда $f^n(U'') \cap f^n(U') \neq \varnothing$. Заметим, что $f^n(U'')$ может и не быть открытым множеством. Однако по построению $f^n(U') = U$. Имеем $f^n(U'') \cap U \neq \varnothing$. Далее,

$$f^n(U'') = f^n(f^{-m}((U'))) = f^{n-m}((U')) \subset f^{-m}(f^n(U')) = f^{-m}(U).$$

Здесь имеет место вложение, так как при взятии прообраза исходное множество может увеличиться. Имеем $f^n(U'') \subset f^{-m}(U)$. Следовательно, и $f^{-m}(U) \cap U \neq \varnothing$. Получили противоречие.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $f : M \to M$ — открытое непрерывное сюръективное отображение. Тогда если x — (ω)-неблуждающая точка, то ее положительная полутраектория $O_f^+(x)$ состоит из (ω)-неблуждающих точек.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда x — ω-неблуждающая точка. (Для случая, когда x является неблуждающей точкой, доказательство аналогично.)

Предположим от противного, что существует $n > 0$ такое, что $x_n = f^n(x)$ является ω-блуждающей точкой. Тогда по определению найдется $U(x_n)$ — открытая окрестность точки x_n такая, что для любого $k > 0$ ($k \neq 0$ в случае блуждающей точки) $f^k(U) \cap U = \varnothing$.

Множество $f^{-n}(U(x_n))$ открыто, так как f непрерывно. Поскольку x — ω-неблуждающая точка, а $U'(x) = f^{-n}(U(x_n))$ — ее открытая окрестность, то по определению существует $m > 0$ ($m \neq 0$ в случае неблуждающей точки) такое, что $f^m(U'(x)) \cap U'(x) \neq \varnothing$. Множество $U'' = f^m(U'(x))$ открыто, так как f — открытое отображение. Но тогда $f^n(U'') \cap f^n(U') \neq \varnothing$. Однако по построению $f^n(U') = U$.

Далее,

$$f^n(U'') = f^n(f^m((U'))) \subset f^m(f^n(U')) = f^{-m}(U).$$

Здесь имеет место вложение, так как при взятии прообраза исходное множество может увеличиться.

Имеем $f^n(U'') \subset f^m(U)$. Следовательно, и $f^m(U) \cap U \neq \varnothing$. Получили противоречие.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть $f : M \to M$ — открытое непрерывное сюръективное отображение. Тогда если x является ω-, α-блуждающей или блуждающей точкой, то ее отрицательная полутраектория $O_f^-(x)$ состоит соответственно из ω-, α-блуждающих или блуждающих точек.*

Доказательство. Предположим от противного, что $x_{-n} \in f^{-n}(x)$ является (ω-)(α-)неблуждающей точкой. Но тогда, согласно леммам 2 и 3, x — (ω-)(α-)неблуждающая точка. Получили противоречие.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть $f : M \to M$ — конечнократное сюръективное внутреннее отображение. Тогда если x — α-неблуждающая точка, то ее отрицательная полутраектория $O_f^-(x)$ содержит частную траекторию, состоящую из α-неблуждающих точек.*

Доказательство. Предположим от противного, что найдется такое n, что все $x_{-n,i} \in f^{-n}(x)$ являются α-блуждающими точками. Тогда по определению $\forall i \; \exists U(x_{-n,i}) \; \forall k < 0 : f^k(U(x_{-n,i})) \cap U(x_{-n,i}) = \varnothing$.

Возьмем $U'(x) = \cap_i f^n(U(x_{-n,i}))$. Поскольку f открыто и конечнократно, то $U'(x)$ — открытая окрестность точки x. Сузив при необходимости $U(x_{-n,i})$ и $U'(x)$, можно предположить, что $U(x_{-n,i})$ f не пересекаются между собой, при этом f является сюръекцией с $U(x_{-n,i})$ на $U'(x)$.

По условию x — α-неблуждающая точка. Поэтому существует $m > 0$ такое, что $f^{-m}(U'(x)) \cap U' \neq \varnothing$. Обозначим $U'' = f^{-m}(U'(x))$.

Поскольку f конечнократно и отделимо, можно предполагать, что $m > n$. Поскольку f — сюръекция с $U(x_{-n,i})$ на $U'(x)$, каждая из окрестностей $U(x_{-n,i})$ имеет непустое пересечение с множеством $f^{-n}(U'')$.

Заметим, что $U'(x)$ можно представить в виде $\cup_i f^n(U(x_{-n,k}))$. Поскольку $m > n, U'' = f^{-m}(U'(x))$ можно представить в виде

$$U'' = f^{-m}\left(\underset{i}{\cup} f^n\left(U(x_{-n,k})\right)\right) = \underset{i}{\cup} f^{-m+n}\left(U(x_{-n,k})\right).$$

Обозначим $U''_i = f^{-m+n}\left(U(x_{-n,k})\right)$. Тогда $U'' = \cup_i U''_i$. Поскольку $U'(x) \cap U'' \neq \varnothing$, найдется k такое, что $U'(x) \cap U''_k \neq \varnothing$.

Как следствие, повторяя изложенные выше рассуждения, получаем, что каждая из окрестностей $U(x_{-n,i})$ имеет непустое пересечение с множеством $f^{-n}(U''_k)$.

В частности, $U(x_{-n,k}) \cap f^{-n}(U''_k) \neq \varnothing$. Получили противоречие, так как по предположению $U(x_{-n,k})$ — блуждающая окрестность.

Лемма 5 доказана.

По аналогии с леммой 5 доказывается и следующее утверждение.

Лемма 6. *Пусть $f : M \to M$ — конечнократное сюръективное внутреннее отображение. Тогда если x — ω-неблуждающая точка (неблуждающая точка), то ее отрицательная полутраектория $O_f^-(x)$ содержит частную траекторию, состоящую из ω-неблуждающих точек (неблуждающих точек).*

Из лемм 5 и 6 следует, что в прообразе неблуждающей точки конечнократного сюръективного внутреннего отображения всегда найдется неблуждающая точка. Это и доказывает основную теорему.

1. *Blokh A., Oversteegen L., Tymchatyn E. D.* On almost one-to-one maps // Trans. Amer. Math. Soc. — 2006. — **358**, № 11.
2. *Kolyada S., Snoha L., Trofimchuk S.* Proper minimal sets on compact conneted 2-manifolds are nowhere dence // Ergod. Theory and Dynam. Syst. — 2008. — **28**.
3. *Стоилов С.* О топологических принципах теории аналитических функций. — М.: Мир, 1964.

Получено 16.04.09