НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 2 • № 2 • 1999

УДК 517.929

ОБГРУНТУВАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ РЕЗОНАНСНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Я.Й. Бігун

Ін-т математики НАН України,
Україна, 252601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3
e-mail: bigun@math.chdu.cv.ua

In this paper we satisfy the averaging method for multifrequency systems with delay on asimptoticly big and infinit intervals. The vector of frequencies is depend on slow variables. Also study the estimate of error of averaging method on small parameter.

На асимптотично великому і нескінченному часових інтервалах обгрунтовано метод усереднення для багаточастотних систем із запізненням. Одержано явно залежну від малого параметра оцінку похибки методу усереднення у випадку, коли вектор частот залежить від повільних змінних.

Ефективним методом дослідження багаточастотних систем є метод усереднення [1]. Але резонансні явища, характерні для таких систем, значно ускладнюють його обгрунтування. Тому необхідно накладати деякі додаткові умови, які б забезпечували незастрягання траєкторії повільних змінних в малому околі резонансів [2 – 4]. Дослідженню асимптотичним методом Крилова – Боголюбова – Митропольського багаточастотних коливань в системах із запізненням присвячені монографії [5, 6]. В роботах [7, 8] побудовані явно залежні від малого параметра оцінки похибки методу усереднення, як наслідок оцінок відповідних осциляційних інтегралів. Для резонансних систем з запізненням і вектором повільно змінних частот аналогічний результат одержано в [9]. В даній роботі метод усереднення обгрунтовано на скінченному відрізку і півосі для систем із постійним запізненням і вектором частот, залежним від повільних змінних розв'язку системи і „повільного часу".

Розглядається система диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= a(\tau, x, x_h, \varphi, \varphi_\Delta) + \varepsilon A(\tau, x, x_h, \varphi, \varphi_\Delta, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{1}{\varepsilon}\omega(\tau, x, \varepsilon) + b(\tau, x, x_h, \varphi, \varphi_\Delta, \varepsilon), \end{aligned} \tag{1}$$

де $\tau \in [0, L] = I$, $L = \mathrm{const} > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 << 1$, x, $x_h \in D$, D — область в $\mathbb{R}^n$, $\varphi, \varphi_\Delta \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$; $x_h(\tau) = x(\tau - \varepsilon h)$, $\varphi_\Delta(\tau) = \varphi(\tau - \varepsilon\Delta)$, h і Δ — додатні сталі, які характеризують запізнення. Вектор-функції a, A, b 2π-періодичні по кожній із компонент $\varphi_\nu, \varphi_{\Delta\nu}$, $\nu = \overline{1, m}$. Внаслідок залежності вектора частот $\omega(\tau, x, \varepsilon)$ від параметра ε система (1) може включати системи з ієрархією частот [10].

Замінимо систему (1) значно простішою усередненою системою першого наближення для повільних змінних

$$\frac{d\xi}{d\tau} = a_0(\tau, \xi), \tag{2}$$

де

$$a_0(\tau, \xi) = (2\pi)^{-m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} a(\tau, \xi, \xi, \varphi, \varphi - \theta) d\varphi_1 \ldots d\varphi_m =$$

$$= \sum_{k+l=0} a_{kl}(\tau, \xi, \xi) \exp[i(k, \theta)], \quad \theta = \omega(\tau, \xi(\tau), 0)\Delta.$$

Права частина усередненої системи (2) містить доданки, які відповідають цілочисловим резонансним векторам k, l таким, що $k + l = 0$, $\|k\| + \|l\| \neq 0$, $|k| = |k_1| + \ldots + |k_m|$. Нагадаємо, що умовою резонансу для системи (1) в точці $\tau \in I$ є виконання співвідношення $(k + l, \omega(\tau, x(\tau, \varepsilon), \varepsilon)) = 0$ (≈ 0), якщо $\|k\| + \|l\| \neq 0$.

В даній роботі наведено умови, які забезпечують близькість на відрізку I та $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ повільних змінних $x(\tau, \varepsilon)$ розв'язку системи (1), побудованого за початковими функціями $x^{(0)} \in C[-\varepsilon h, 0]$, $\varphi^{(0)} \in \mathbb{C}[-\varepsilon\Delta, 0]$, $x^{(0)}(0) = \xi(0)$, і розв'язком $\xi(\tau, \varepsilon)$ усередненої системи (3). Одержано оцінку відхилення цих розв'язків, яка має порядок ε^d, $d \in (0, 1/2]$.

Як відомо, оцінка похибки методу усереднення є наслідком оцінки відповідних осциляційних інтегралів [7]. Системі (1) відповідає осциляційний інтеграл вигляду

$$I_{kl}(\tau, \overline{\tau}, \overline{s}, \varepsilon) = \int_{\tau}^{\tau+\overline{s}} f(\tau, \varepsilon) \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon} \int_{\overline{\tau}}^{s} \gamma_{kl}(z, x(z, \varepsilon), \varepsilon) dz\right\} ds, \tag{3}$$

де $\tau \in \mathbb{R}^+$, $\overline{s} \in I$, $\overline{\tau} \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\gamma_{kl}(\tau, x(\tau, \varepsilon), \varepsilon) = (k + l, \omega(\tau, x(\tau, \varepsilon), \varepsilon))$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток.

Зробимо деякі припущення відносно систем (1) і (2).

1. Нехай в області $G = I \times D \times D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times (0, \varepsilon_0]$ функції $a(\tau, x, z, u, v)$, $A(\tau, x, z, u, v, \varepsilon)$, $b(\tau, x, z, u, v, \varepsilon)$, $\omega(\tau, x, \varepsilon)$ для кожного фіксованого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ неперервно диференційовні по τ, x, z, u, v і обмежені разом з похідними сталою a_1.

2. Існує розв'язок усередненої системи (1) для всіх $\tau \in I$, який лежить в D разом з деяким ρ-околом $D_\rho(\xi) = \{x : x \in D, \|\xi(\tau) - x\| < \rho\}$.

Позначимо через P множину векторів $p = [k, l]$, для яких коефіцієнти Фур'є функції $a(\tau, x, x, \varphi, \varphi_\Delta)$ тотожно не рівні нулю в ρ_1-околі усередненого розв'язку $\xi(\tau)$, $\tau \in I$, $\rho_1 \in (0, \rho]$. Введемо такі функції:

$$\Omega(\tau, z, x, \varphi, \varphi_\Delta, \varepsilon) = \frac{\partial\omega(\tau, x, \varepsilon)}{\partial\tau} + \frac{\partial\omega(\tau, x, \varepsilon)}{\partial x} \delta(\tau, x, \varphi, \varphi_\Delta, \varepsilon),$$

$$\delta(\tau, x, \varphi, \varphi_\Delta, \varepsilon) = \sum_{p \in P} a_{kl}(\tau, x, x) h_q(\gamma_{kl}(\tau, x, \varepsilon)) e^{i(p, \psi)}, \quad \psi \in [\varphi, \varphi_\Delta],$$

функція $h_q \in C^1(\mathbb{R})$, рівна 1 при $|t| \leq q$, 0 при $|t| \geq 2q$ і $\cos \dfrac{\pi}{2q}(t - q)$ при $q < |t| < 2q$.

3. Для всіх $p \in P$, $\tau \in I$, $x \in D_\rho(\xi(\tau,\varepsilon))$, $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ справджується нерівність

$$|\gamma_{kl}(\tau,x,\varepsilon)| + |(k+l,\Omega(\tau,x,\varphi,\varphi_\Delta,\varepsilon))| \geq a_2\|p\|^{-\chi}\varepsilon^\beta, \tag{4}$$

де $\|p\| = \|k\| + \|l\|$, $q = \varepsilon^\alpha$, $a_2 = \mathrm{const} > 0$, $\chi \in \mathbb{Z}$, $\chi \geq -1$. Числа α і β задовольняють умови: $\alpha \in [0,1/2)$, $\beta \in [0,1/3)$, $2\alpha+\beta < 1$.

4. Для $l_1 \geq 2m+2+\max\left\{0,\chi,\dfrac{(1-3\beta)(\chi+1)}{1-2\alpha-\beta}-2\right\}$, $l_2 \geq 2m+\max\{0,\chi\}$ функція $a(\tau,x,x,u,v)$ та її похідні задовольняють умови $a \in C_\psi^{l_1}(G)$, $\dfrac{\partial a}{\partial\tau} \in C_\psi^{l_2}(G)$, $\dfrac{\partial a}{\partial x} \in C_\psi^{l_2}(G)$, $\dfrac{\partial a}{\partial x_h} \in C_\psi^{l_2}(G)$ і обмежені сталою a_1.

Теорема 1. *Нехай для кожного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $f \in C_\tau^1(\mathbb{R}^+)$,*

$$\sup_{G_\tau}\|f\| + \sup_{G_\tau}\left\|\frac{df}{d\tau}\right\| < \infty, \quad G_\tau = [\tau,\tau+L]\times(0,\varepsilon_0],$$

виконуються умови 1 – 4, існує розв'язок $\{x(\tau,\varepsilon),\varphi(\tau,\varepsilon)\}$ системи (1) і $x(\tau,\varepsilon) \in D_{0,5\rho_1}(\xi(\tau,\varepsilon))$ для кожного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Тоді для всіх $p \in P$, якщо $\chi = -1$, і $p \in P_N = \{p : p \in P, \|p\| \leq N\}$ (N — досить велике число), якщо $\chi > -1$, для всіх $\tau \in \mathbb{R}^+$, $\overline{\tau} \in \mathbb{R}^+$, $\overline{s} \in I$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ для інтеграла (3) виконується оцінка

$$\|I_{kl}\| \leq c_{10}\varepsilon^{\frac{1-3\beta}{2}}\left[(\|p\|^\chi+1)\|p\|^{\chi+1}\sup_{G_\tau}\|f(\tau,\varepsilon)\| + \|p\|^\chi\sup_{G_\tau}\left\|\frac{df(\tau,\varepsilon)}{ds}\right\|\right], \tag{5}$$

де сталі c_{10} і $\varepsilon_4 \in (0,\varepsilon_0]$ не залежать від τ, $\overline{\tau}$, $\overline{s}$, ε k і l.

Доведення. Використаємо схему доведення, запропоновану в [11]. Для $\tau \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ і компоненти $x(\tau,\varepsilon)$ розв'язку (1) введемо функцію

$$y(\tau,\varepsilon) = x(\tau,\varepsilon) + \varepsilon i\sum_{p\in P}\frac{a_{kl}(\tau,x(\tau,\varepsilon),x(\tau,\varepsilon))}{\gamma_{kl}(\tau,x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}\times$$

$$\times[1-h_{\varepsilon^\alpha}(\gamma_{kl}(\tau,x(\tau,\varepsilon),\varepsilon))]\exp[i(p,\psi)] \equiv x(\tau,\varepsilon)+\varepsilon U(\tau,\varepsilon). \tag{6}$$

Із умови 4 і оцінки коефіцієнтів Фур'є [9, с. 88, 89] одержимо

$$\varepsilon\|U(\tau,\varepsilon)\| \leq \varepsilon^{1-\alpha}\sum_{p\in P}\sup_{G_1}\|a_{kl}(\tau,x,x)\| \leq c_1^{(0)}\varepsilon^{1-\alpha}.$$

Зауважимо, що $y(\tau,\varepsilon) \in D_\rho(\xi(\tau))$ для $\tau \in I$, як тільки $\varepsilon \leq \min\left(\varepsilon_0,\left(\rho_1/2c_1^{(0)}\right)^{1/(1-2\alpha)}\right) = \varepsilon_1$. Продиференціюємо рівність (6):

$$\frac{dy(\tau,\varepsilon)}{d\tau} = \delta(\tau,x,\varphi,\varphi_\Delta,\varepsilon) + \varepsilon A(\tau,x,\varphi,\varphi_\Delta,\varepsilon) + (a(\tau,x,x_h,\varphi,\varphi_\Delta) -$$

$$-a(\tau,x,x,\varphi,\varphi_\Delta)) + \varepsilon i\sum_{p\in P}\frac{da_{kl}(\tau,x,x)}{d\tau}\frac{1-h_{\varepsilon^\alpha}(\gamma_{kl}(\tau,x,\varepsilon))}{\gamma_{kl}(\tau,x,\varepsilon)}e^{i(p,\psi)} -$$

$$-\varepsilon\sum_{p\in P} a_{kl}(\tau,x,x)\left\{\frac{dh_{\varepsilon^\alpha}}{d\tau}\frac{1}{\gamma_{kl}(\tau,x,\varepsilon)}+\frac{1-h_\varepsilon(\gamma_{kl}(\tau,x,\varepsilon))}{\gamma_{kl}^2(\tau,x,\varepsilon)}\left[\frac{d}{d\tau}\gamma_{kl}(\tau,x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-i\gamma_{kl}(\tau,x,\varepsilon)\left(\frac{1}{\varepsilon}(l,\omega(\tau_\Delta,x_\Delta,\varepsilon)-\omega(\tau,x,\varepsilon))+(k,b)+(l,b_\Delta)\right)\right]e^{i(p,\psi)}\right\}\equiv$$

$$\equiv\delta(\tau,x,\varphi,\varphi_\Delta,\varepsilon)+B(\tau,x,x_h,\varphi,\varphi_\Delta,\varphi_{\Delta\Delta},\varepsilon).$$

Враховуючи, що $\|x-x_h\|\leq 2a_1h\varepsilon=c_2\varepsilon$ для $\tau\geq\tau^*=\varepsilon\max(h,\Delta)$ і $\sum_{p\in P}\left(\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial a_{kl}(\tau,x,x)}{\partial\tau}\right\|+\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial a_{kl}(\tau,x,x)}{\partial x}\right\|\right)\|p\|^\chi\leq c_3^{(\chi)}(m,l_2,a_1)$, знаходимо

$$\|B\|\leq c_4\varepsilon^{1-2\alpha}, \tag{7}$$

де $c_4=a_1(1+c_2+c_3^{(0)}+c_1^{(0)}+c_1^{(1)}(1+a_1+\Delta))+\frac{\pi}{2}c_1^{(0)}+c_3^{(0)}$.

Оцінимо вираз

$$|\gamma_{kl}(\tau,y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)|+\left|\frac{d}{d\tau}\gamma_{kl}(\tau,y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\right|\geq|\gamma_{kl}(\tau,y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)|+$$

$$+|k+l,\Omega(\tau,y(\tau,\varepsilon),\varphi(\tau,\varepsilon),\varphi_\Delta(\tau,\varepsilon),\varepsilon)|-$$

$$-|(k+l,B(\tau,x,x_h,\varphi,\varphi_\Delta,\varphi_{\Delta\Delta},\varepsilon))|-$$

$$-\left|\left(k+l,\frac{\partial\omega(\tau,y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial y}(\delta(\tau,x,\varphi,\varphi_\Delta,\varepsilon)-\delta(\tau,y,\varphi,\varphi_\Delta,\varepsilon)\right)\right|.$$

Звідси

$$|\gamma_{kl}(\tau,y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)|+\left|\frac{d}{d\tau}\gamma_{kl}(\tau,y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\right|\geq\frac{1}{2}a_2\|p\|^{-\chi}\varepsilon^\beta. \tag{8}$$

Для $\chi=-1$ нерівність (8) справедлива для всіх $p\in P$, як тільки $\varepsilon\leq\min(\varepsilon_1,c_5^{1/(\beta+2\alpha-1)}=$ $=\varepsilon_2, c_5^{-1}=2a_1(c_4+c_1^{(0)}c_3^{(0)})/a_2$.

Якщо $\chi>-1$, то оцінка (8) виконується при $\|p\|\leq N\leq E\left(c_5^{\frac{1}{\chi+1}}\varepsilon^{\frac{2\alpha+\beta-1}{\chi+1}}\right)$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2]$. Тут $E(s)$ — ціла частина числа s.

Із (8) випливає, що для $p\in P_{N_1}$ у випадку $\chi>-1$ і довільного $p\in P$ для $\chi=-1$ $\tau_0\in[\tau,\tau+\overline{s}]$, $y_0=y(\tau_0,\varepsilon)$ виконується одна із двох нерівностей

$$|\gamma_{kl}(\tau_0,y_0,\varepsilon)|\geq\frac{1}{4}a_2\|p\|^{-\chi}\varepsilon^\beta, \tag{9_1}$$

$$\left|\frac{d}{d\tau}\gamma_{kl}(\tau_0,y_0,\varepsilon)\right|\geq\frac{1}{4}a_2\|p\|^{-\chi}\varepsilon^\beta. \tag{9_2}$$

Нехай виконується нерівність (9_1). Тоді нескладно одержати

$$|\gamma_{kl}(\tau,y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)|\geq\frac{1}{8}\|p\|^{-\chi}\varepsilon^\beta \tag{10}$$

на відрізку $[\tau_0, \tau_0+\delta_{kl}]$, $\delta_{kl}(\varepsilon) = c_6\varepsilon^{\beta}\|p\|^{-\chi-1}$, $c_6 = a_2/(8a_1(1+c_1^{(0)}+c_4))$.

З цієї нерівності, використавши (6) і оцінку (7), для $\tau \in [\tau_0, \tau_0+\delta_{kl}]$ знаходимо

$$|\gamma_{kl}(\tau, x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)| \geq \frac{a_2}{16}\|p\|^{-\chi}\varepsilon^{\beta},$$

якщо $\chi > -1$ і $p \in P_{N_2}$, $N_2 = \min\left(N_1, E\left(c_7^{\frac{1}{\chi+1}}\varepsilon^{\frac{\alpha+\beta-1}{\chi+1}}\right)\right)$, $c_7 = 16a_1c_1^{(0)}/a_2$. У випадку $\chi = -1$ і $\varepsilon \leq \varepsilon_3 = \min\left(\varepsilon_2, c_7^{1/(1-\alpha-\beta}\right)$ нерівність (10) виконується для всіх $p \in P$.

Якщо ж нерівність (9_1) порушується, то

$$\left|\frac{d}{d\tau}\gamma_{kl}(\tau, y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\right| \geq \frac{1}{8}a_2\|p\|^{-\chi}\varepsilon^{\beta} \tag{11}$$

на деякому відрізку $[\tau, \lambda_{kl}]$ найбільшої довжини, $\lambda_{kl} - \tau_0 \leq \delta_{kl}$. Нехай $\overline{\tau_{kl}}$ — точка мінімуму функції $|\gamma_{kl}(\tau, y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)|$ на $[\tau_0, \lambda_{kl}]$. Тоді із (9_2) для $\tau \in [\tau_0, \lambda_{kl}]$ отримуємо оцінку

$$|\gamma_{kl}(\tau, y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)| \geq \frac{1}{8}a_2\|p\|^{-\chi}\varepsilon^{\beta}|\tau - \overline{\tau}_{kl}|.$$

Звідси для $\chi > -1$, $\tau \in [\tau_0, \overline{\tau}_{kl} - \varepsilon^{d}] \cup [\overline{\tau}_{kl} + \varepsilon^{d}, \lambda_{kl}]$, $d = \dfrac{1-\beta}{2}$ одержуємо

$$|\gamma_{kl}(\tau, x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)| \geq \frac{a_2}{16}\varepsilon^{\frac{\beta+1}{2}}\|p\|^{-\chi}, \tag{12}$$

якщо $N_3 = \min\left(N_2, E\left(c_7^{\frac{1}{\chi+1}}\varepsilon^{\frac{2\alpha+\beta-1}{\chi+1}}\right)\right)$. Якщо ж $\chi = -1$, то нерівність (12) справджується для $\varepsilon \leq \min\left(\varepsilon_3, c_7^{2/(1-2\alpha-\beta)}\right) = \varepsilon_4$ і всіх $p \in P$.

Подамо відрізок $[\tau, \tau+\overline{s}]$ у вигляді $\left(\bigcup\limits_{\nu=0}^{r_{kl}-1}[\tau+\nu\delta_{kl}, \tau+(\nu+1)\delta_{kl}]\right) \cup [r_{kl}\delta_{kl}+\tau, \overline{s}]$, де $r_{kl} \leq \dfrac{L}{\delta_{kl}} = Lc_6^{-1}\|p\|^{\chi+1}\varepsilon^{-\beta} = c_8\|p\|^{\chi+1}\varepsilon^{-\beta}$.

Якщо в точці $\tau_0 = \tau + \nu\delta_{kl}$ виконується нерівність (9_1), то, інтегруючи частинами, одержуємо

$$\begin{aligned}\left\|\int\limits_{\tau+\nu\delta_{kl}} F(s,\varepsilon)ds\right\| \leq \frac{16}{a_2}\varepsilon^{1-2\beta}\Bigg[\delta_{kl}\sup_{G_\tau}\left\|\frac{df(s,\varepsilon)}{d\tau}\right\| &+ \\ + \left(3 + \delta_{kl}\frac{16a_1}{a_2}(1+2a_1)\|p\|^{\chi+1}\right)\sup_{G_\tau}\|f(s,\varepsilon)\|\Bigg]\|p\|^{\chi},&\end{aligned} \tag{13}$$

де

$$F(s,\varepsilon) = f(s,\varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{\overline{\tau}}^{s}\gamma_{kl}(z, y(z,\varepsilon),\varepsilon)dz\right\}ds.$$

Якщо ж нерівність (9_1) порушується, то на відрізку $[\tau+\nu\delta_{kl},\ \overline{\tau}_{kl} - \varepsilon^{\frac{1-\beta}{2}}] \cup$ $\cup \left[\overline{\tau}_{kl} + \varepsilon^{\frac{1-\beta}{2}}, \alpha_{kl}\right]$ вірна оцінка (12). На відрізку $[\overline{\tau}_{kl} - \varepsilon^{(1-\beta)/2}, \overline{\tau}_{kl} + \varepsilon^{(1-\beta)/2}]$ інтеграл оцінюється величиною $2\varepsilon^{(1-\beta)/2}\sup\limits_{G_\tau}\|f(\tau,\varepsilon)\|$.

Остаточно отримуємо

$$\left\|\int\limits_{\tau+\nu\delta_{kl}}^{\alpha_{kl}} F(s,\varepsilon)ds\right\| \le 2\varepsilon^{\frac{1-\beta}{2}}\left\{(2(1+\delta_{kl})\|p\|^{\chi}+1)\sup_{G_\tau}\|f(s,\varepsilon)\|+\right.$$

$$\left.+\delta_{kl}\|p\|^{\chi}\sup_{G_\tau}\left\|\frac{df(s,\varepsilon)}{ds}\right\|\right\}. \quad (14)$$

У випадку $\alpha_{kl}<\tau+(\nu+1)\delta_{kl}$ для $h(\tau,\varepsilon)$ вірна нерівність (9_1), тому інтеграл оцінюється згідно з (12). Об'єднуючи (13) і (14) для $N\le N_3$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_4]$, одержуємо оцінку (5), в якій $c_{10}=\max\left(\frac{64}{a_2}c_8, 2c_8+2a_1L\left(\frac{16}{a_2}\right), \frac{32}{a_2}L\right)$.

Зауваження 1. Якщо в умові (4) $\beta=0$, то $d=1/2$ і оцінка $O(\sqrt{\varepsilon})$ має вигляд, як і в роботі [11].

Похибка методу усереднення.

Теорема 2. *Нехай існує розв'язок усередненої задачі (2) при $\tau\in[0,L]$, виконуються умови 1 – 4 і* $\sup\limits_{(\tau,x)\in I\times D}\|\omega(\tau,x,\varepsilon)-\omega(\tau,x,0)\|\le a_3\sqrt{\varepsilon}$.

Тоді існують $\varepsilon^*\in(0,\varepsilon_0]$ і $c_{15}>0$, незалежна від ε, такі, що для всіх $\tau\in[0,L]$, $\chi^{(0)}\in\in C[-h\varepsilon,0]$, $\chi^{(0)}=\xi(0)$, $\varphi^{(0)}\in C[-\varepsilon\delta,0]$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon^*]$ виконується оцінка

$$\|x(\tau,\xi,\varepsilon)-\xi(\tau)\|\le c_{15}\varepsilon^{\frac{1-3\beta}{2}}. \quad (15)$$

Доведення. Із диференційовності правих частин (1) і малості ε випливає, що $x(\tau,\varepsilon)\in\in D_{0,5\rho_1}(\xi(\tau))$ для $\tau\in[0,L_1]$, де ρ_1 визначене в умові 3, $L_1\le L$. Із першого з рівнянь (1) і системи (2) для $\tau\ge\tau^*$ одержимо

$$\|x(\tau,\varepsilon)-\xi(\tau)\|\le\left[\varepsilon c_{11}+L\sup_G\|R_N(\tau,\xi,\xi,\varphi,\varphi_\Delta)\|+\right.$$

$$\left.+\sum_{p\in P}\sup_{\tau\in[0,L_1]}\left\|\int\limits_0^\tau g_{kl}(s,\varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{\tau^*}^s\gamma_{kl}(z,x(z,\varepsilon),\varepsilon)dz\right\}ds\right\|\right]e^{c_3^{(0)}L}, \quad (16)$$

де

$$c_{11}=a_1L(1+c_2+0,5c_1^{(1)}\Delta(2+a_3+\Delta(1+2a_1))),$$

$$g_{kl}(s,\varepsilon)=a_{kl}(s,\xi(s),\xi(s))\exp\left\{i\int\limits_{\tau^*}^s[(k,b)+(l,b_\Delta)]dz\right\}ds,$$

$$R_Na(\tau,\xi,\xi,\varphi,\varphi_\Delta)=\sum_{\|p\|>N}a_{kl}(\tau,\xi,\xi)\exp[i(k,\varphi)+i(l,\varphi_\Delta)]$$

для $s>-1$ і

$$R_Na(\tau,\xi,\xi,\varphi,\varphi_\Delta)\equiv 0$$

для $s=-1$.

Із умови 4 і оцінки залишкового члена ряду Фур'є [9] для $\chi > -1$ і N, визначеного в теоремі 1, випливає

$$\|R_N a(\tau, \xi, \xi, \varphi, \varphi_\Delta)\| \le c_{12} N^{2m-l_1} \le c_{13}\varepsilon^{\frac{(2\alpha+\beta-1)(2m-l_1)}{2(\chi+1)}} \le c_{13}\varepsilon^{\frac{1-3\beta}{2}}$$

якщо $\varepsilon \le \min\left(\varepsilon_4, \overline{c}_{12}^{\frac{2(\chi+1)}{1-2\alpha-\beta}}\right) = \varepsilon_5$. Тут $c_{12} = c_{12}(m, a_1, l_1)$, $c_{13} = c_{12}\overline{c}_{12}^{-2m-l_1}$, $\overline{c}_{12} = \min\left(c_5^{\frac{1}{\chi+1}}, c_7^{\frac{1}{\chi+1}}\right)$.

Застосуємо теорему 1 для оцінки інтегралів в (16), де $f(\tau, \varepsilon) = g_{kl}(\tau, \varepsilon)$. Одержимо

$$\sum_{p \in P} \sup_{\tau \in [0, L_1]} \left\| \int_0^\tau g_{kl}(s, \varepsilon) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{\tau^*}^s \gamma_{kl}(z, x(z, \xi_0, \varepsilon), \varepsilon) dz \right\} ds \right\| \le c_{14}\varepsilon^{\frac{1-3\beta}{2}},$$

де $c_{14} = c_{10}(a_1 + 2)(c_3^{(\chi)} + c_3^{(\chi+1)} + c_3^{(2\chi+1)})$. Тоді в оцінці (15) $c_{15} = (c_{11} + Lc_{13} + c_{14}) \times \exp(c_3^{(0)} L)$. Якщо $\varepsilon \le \min\left(\varepsilon_5, (\rho_1/4c_{15})^{2/(1-3\beta)}\right) = \varepsilon^*$, то розв'язок може бути продовженим на відрізок $[0, L]$ і твердження теореми залишається справедливим. Теорему доведено.

Обгрунтування методу усереднення на $\mathbb{R}^+$. Позначимо через $\xi(\tau, \tau_0, \xi_0)$ розв'язок усередненої системи (2) такий, що $\xi(\tau_0, \tau_0, \xi_0) = \xi_0 \in D_0$, $\tau_0 \ge 0$.

Теорема 3. *Нехай: 1) розв'язок $\xi(\tau) = \xi(\tau, 0, \xi_0)$, $\xi(0, 0, \xi_0) = \xi_0$, системи (2) визначений для всіх $\tau \ge 0$, належить області D разом з ρ-околом і рівномірно асимптотично стійкий; 2) виконуються умови 1, 3, 4 п. 1 для $\tau \in \mathbb{R}^+$.*

Тоді для довільного σ, $0 < \sigma < \rho$, знайдеться $\overline{\varepsilon} \in (0, \varepsilon^*]$ таке, що для $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}]$, неперервних початкових функцій $x^{(0)}(s)$ і $\varphi^{(0)}(s)$, $x^{(0)}(0) = \xi_0$, і всіх $\tau \ge 0$ розв'язок $(x(\tau, 0, \xi_0, \varepsilon)$, $\varphi(\tau, 0, \xi_0, \varepsilon))$ може бути продовжений і при цьому виконується нерівність

$$\|x(\tau, 0, \xi_0, \varepsilon) - \xi(\tau, 0, \xi_0)\| \le \sigma. \tag{17}$$

Доведення. Із рівномірної стійкості розв'язку $\xi(\tau, \tau_0, z)$ для кожного $\tau \ge 0$ знайдеться $\mu(\sigma) \in (0, 0,5\sigma]$ таке, що для довільних z_1, $z_2 \in D_{0,5\rho}(\xi(\tau))$ із нерівності $\|z_1 - z_2\| < \mu$ випливає $\|\xi(\tau, \tau_0, z_1) - \xi(\tau, \tau_0, z_2)\| < \sigma/2$. Зафіксуємо μ і знайдемо $L(\mu) > 0$ таке, що для всіх $\tau \ge \tau_0 + L$ справедлива оцінка $\|\xi(\tau, \tau_0, z_1) - \xi(\tau, \tau_0, z_2)\| < 0,5\mu$. На підставі оцінки (15) для кожного фіксованого $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}]$, $\overline{\varepsilon} = \min\left(\varepsilon^*, (\sigma/2c_{15})^{\frac{2}{1-3\beta}}\right)$ і $\tau \in [\tau_0, \tau_0 + L]$ одержимо $\|x(\tau, \tau_0, \xi(\tau_0), \varepsilon) - \xi(\tau, \tau_0, \xi(\tau_0))\| < \mu$. Із одержаних оцінок на відрізку $[L, 2L]$ випливає

$$\|x(\tau, 0, \xi_0, \varepsilon) - \xi(\tau, 0, \xi_0)\| \le \|x(\tau, 0, \xi_0, \varepsilon) - \xi(\tau, L, x(L, 0, \xi_0, \varepsilon))\| +$$

$$+ \|\xi(\tau, L, x(L, 0, \xi_0, \varepsilon)) - \xi(\tau, 0, \xi_0)\| < \mu + \sigma/2 \le \sigma.$$

Методом математичної індукції оцінка (17) встановлюється на довільному відрізку $[\nu L, (\nu + 1)L]$, $\nu \ge 2$, що підтверджує справедливість теореми 3.

Зауваження 2. Якщо відома швидкість притягання до асимптотично стійкого розв'язку усередненої системи, то в оцінці (17) можна одержати явну залежність від параметра ε. Припустимо, що для $\alpha > 0$ і $M \ge 1$, всіх z_1, $z_2 \in D_{0,5\rho}(\xi(\tau))$ і всіх $\tau \ge \tau_0 \ge 0$ виконується нерівність $\|\xi(\tau, \tau_0, z_1) - \xi(\tau, \tau_0, z_2)\| \le Me^{-\alpha(\tau-\tau_1)}\|z_1 - z_2\|$. Тоді, якщо покласти

$L = \dfrac{1}{\alpha}\ln 2M$ і $\varepsilon \le \overline{\overline{\varepsilon}} = (\rho/4c_{15})^{\frac{2}{1-3\beta}}$, то на кожному відрізку $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, $\tau_k = kL$, $k = 0, 1, \ldots$, враховуючи нерівність (15), одержуємо

$$\|x(\tau,0,\xi_0,\varepsilon) - \xi(\tau,0,\xi_0)\| \le \|x(\tau,0,\xi_0,\varepsilon) - \xi(\tau,\tau_k,x(\tau_k,0,\xi_0,\varepsilon))\| +$$

$$+\|\xi(\tau,\tau_k,x(\tau_k,0,\xi_0,\varepsilon)) - \xi(\tau,0,\xi_0)\| \le c_{11}\varepsilon^{\frac{1-3\beta}{2}} + Me^{-\alpha}\|x(\tau_k,0,\xi_0,\varepsilon) -$$

$$-\xi(\tau_k,0,\xi_0)\| \le c_{11}\varepsilon^{\frac{1-3\beta}{2}} + Me^{-\alpha L}\max_{\tau\in[\tau_{k-1},\tau_k]}\|x(\tau,0,\xi_0,\varepsilon) - \xi(\tau,0,\xi_0)\| \le$$

$$\le c_{11}\varepsilon^{\frac{1-3\beta}{2}}/(1 - Me^{-\alpha L}) = 2c_{11}\varepsilon^{\frac{1-3\beta}{2}}.$$

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 504 с.
2. *Арнольд В.И.* Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонанс // Докл. АН СССР. — 1965. — **161**, № 1. — С. 9 – 12.
3. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Новые качественные методы в небесной механике. — М.: Наука, 1971. — 432 с.
4. *Хапаев М.М.* Усреднение в теории устойчивости. — М.: Наука, 1986. — 192 с.
5. *Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. — Киев: Выща шк., 1979. — 248 с.
6. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. — М.: Наука, 1984. — 288 с.
7. *Самойленко А.М.* К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем // Дифференц. уравнения. — 1987. — **23**, № 2. — С. 267 – 278.
8. *Самойленко А.М., Петришин Р.И.* Метод усреднения в многочастотных системах с медленно меняющимися параметрами // Укр. мат. журн. — 1988. — **40**, № 4. — С. 493 – 500.
9. *Бігун Я.Й.* Метод усереднення в багаточастотних системах з запізненням // Там же. — 1998. — **50**, № 2. — С. 299 – 303.
10. *Печенев А.В.* Об усреднении систем с иерархией скоростей вращения фаз // Прикл. математика и механика. — 1992. — **56**, вып. 1. — С. 24 – 28.
11. *Петришин Р.І.* Дослідження розв'язків багаточастотних систем за допомогою методу усереднення // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. — 1993. — Вип. 2. — С. 188 – 201.
12. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. — Киев: Наук. думка, 1969. — 248 с.

Одержано 13.09.98