УДК 517.9

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

Р. И. Гладилина

Донец. нац. техн. ун-т
Украина, 83001, Донецк, ул. Артема, 75
e-mail: Rgladilina@yandex.ru

We find sufficient conditions for uniform asymptotic stability of the trivial solution of a nonlinear impulsive system.

Встановлено необхідні умови рівномірної асимптотичної стійкості тривіального розв'язку нелінійної імпульсної системи.

Введение. Теория дифференциальных уравнений с импульсным воздействием является одним из новейших направлений современной теории дифференциальных уравнений. Основы этой теории изложены в монографии [1]. В последние годы значительно возросло количество работ, посвященных исследованию различных аспектов теории импульсных систем. Одной из наиболее актуальных задач как в теоретическом, так и в практическом отношении является анализ устойчивости импульсных систем.

Наиболее универсальным методом исследования устойчивости нелинейных импульсных систем является метод функций Ляпунова. Следует отметить, что в большинстве работ, в которых для исследования устойчивости применялся второй метод Ляпунова, были получены *достаточные* условия устойчивости решений импульсных систем [2–5]. Установление *необходимых* признаков устойчивости (доказательство теорем существования функций Ляпунова с определенными свойствами) является довольно сложной задачей. Вместе с тем проблема существования функций Ляпунова имеет принципиально важное значение для метода Ляпунова.

Небходимые условия устойчивости решений систем с импульсными воздействиями в *фиксированные* моменты времени были получены в [6–9]. В настоящей статье установлены необходимые условия устойчивости импульсных систем более общего вида: с импульсными воздействиями в *нефиксированные* моменты времени.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x), \quad t \neq \tau_i(x), \\ \Delta x &= I_i(x), \quad t = \tau_i(x), \quad i \in N, \end{aligned} \tag{1}$$

где $t \in R_+, x \in \Omega \subset R^n, f : R_+ \times \Omega \to R^n, f(t,0) \equiv 0; I_i : \Omega \to R^n, I_i(0) \equiv 0, \tau_i : \Omega \to R_+,$ $\tau_i(x)$ — поверхности разрыва, $0 < \tau_1(x) < \tau_2(x) < \ldots$ и $\tau_i(x) \to \infty$ при $i \to \infty$.

© Р. И. Гладилина, 2011

Предположим, что решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (1) существует, непрерывно слева и пересекает каждую гиперповерхность $t = \tau_i(x)$ только один раз. Достаточные условия отсутствия биений решений о поверхности разрыва можно найти, например, в [1, с. 23–25].

Задачу будем рассматривать в области

$$\Omega = B_H, \quad H > 0, \quad B_H = \{x \in R^n : \|x\| < H\},$$

где $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ — евклидова норма вектора.

Предположим, что выполняются следующие условия относительно системы (1).

H$_1$. Функция $f(t, x)$ непрерывна и ограничена вместе со своими частными производными в области $R_+ \times \Omega$:

$$\|f(t, x)\| \leq K, \tag{2}$$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| \leq C_1. \tag{3}$$

H$_2$. Функции $I_i(x)$ непрерывны и имеют ограниченные частные производные в области Ω :

$$\left\| \frac{\partial I_i(x)}{\partial x} \right\| \leq C_2, \quad i \in N. \tag{4}$$

H$_3$. Существует константа $h \in (0, H)$ такая, что если $x \in B_h$, то $x + I_i(x) \in B_H, i \in N$.

H$_4$. Функции $\tau_i(x)$ непрерывно дифференцируемы и имеют ограниченные частные производные в области Ω :

$$\max_{x \in \Omega} \left\| \frac{\partial \tau_i(x)}{\partial x} \right\| \leq C_3, \quad i \in N. \tag{5}$$

H$_5$. Функции $\tau_i(x)$ удовлетворяют условию

$$\tau_i(x) \geq \tau_i(x + I_i(x)), \quad x \in \Omega. \tag{6}$$

H$_6$. Предположим, кроме того, что выполняется неравенство

$$\left\langle \frac{\partial \tau_i(x)}{\partial x}, f(t, x) \right\rangle \leq \alpha, \quad \alpha < 1, \quad x \in \Omega. \tag{7}$$

H$_7$. Относительно моментов импульсного воздействия будем предполагать, что имеет место неравенство

$$\inf_i \left(\min_{\|x\| \leq h} \tau_i(x) - \max_{\|x\| \leq h} \tau_{i-1}(x) \right) = \theta > 0, \quad 0 < h < H, \quad i \in N. \tag{8}$$

H$_8$. Существует константа $\mu > 0$ такая, что

$$\|x + I_i(x)\| \geq \mu \|x\|, \quad x \in \Omega, \quad i \in N. \tag{9}$$

Введем следующие определения [10].

Определение 1. *Нулевое решение системы (1) называется равномерно устойчивым, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что для любых* $t_0 \in R_+$, $x_0 \in B_\delta$, $t \geq t_0$ *выполняется* $x(t, t_0, x_0) \in B_\varepsilon$.

Определение 2. *Нулевое решение системы (1) называется равномерно притягивающим, если существует такое* $\lambda > 0$, *что для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ *такое, что для любых* $t_0 \in R_+$, $x_0 \in B_\lambda$, $t \geq t_0 + \sigma$ *справедливо* $x(t, t_0, x_0) \in B_\varepsilon$.

Определение 3. *Нулевое решение системы (1) назовем равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и равномерно притягивающее.*

Будем исследовать устойчивость нулевого решения системы (1) с помощью второго метода Ляпунова. Для этого введем вспомогательные кусочно-непрерывные и кусочно-дифференцируемые функции $V : R_+ \times B_H \to R$ [6, с. 186].

Определение 4. *Функция* $V(t, x)$ *принадлежит классу* $\mathbb{V}$, *если функция* V *непрерывна и дифференцируема при* $t \neq \tau_i(x)$ *и* $V(t, 0) \equiv 0$ *при любом* $t \in R_+$; *функция* $V(t, x)$ *непрерывна слева при* $t = \tau_i(x)$.

При $t \neq \tau_i(x)$ определим производную от функции $V(t, x)$ в силу системы (1)

$$\dot{V}_{(1)}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(t, x), f(t, x) \right\rangle.$$

Функцию Ляпунова вдоль решения $x(t, t_0, x_0)$ будем обозначать через

$$v(t) = V(t, x(t, t_0, x_0)).$$

Определение 5. *Функция* $a : R_+ \to R_+$ *принадлежит классу Хана* ($a \in \mathcal{K}$), *если она непрерывна, строго возрастает и* $a(0) = 0$.

Определение 6. *Система (1) называется периодической с периодом* ω ($\omega > 0$), *если*

$$f(t + \omega, x) \equiv f(t, x), \quad t \neq \tau_i(x),$$

$$\exists\, p \in N : I_{i+p}(x) \equiv I_i(x),$$

$$\tau_{i+p}(x) = \tau_i(x) + \omega, \quad i \in N.$$

Из определения 6 следует, что решения периодической системы имеют свойство

$$x(t + \omega, t_0 + \omega, x_0) \equiv x(t, t_0, x_0). \tag{10}$$

2. Необходимые условия асимптотической устойчивости. В [6, с. 188; 11] приведена следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для системы (1) существует функция* $V \in \mathbb{V}$, *удовлетворяющая условиям*

$$a(\|x\|) \leq V(t, x) \quad \text{\textit{для}} \quad (t, x) \in R_+ \times \Omega, \quad a \in \mathcal{K}, \tag{11}$$

$$V(t,x) \le b(\|x\|) \quad \textit{для} \quad (t,x) \in R_+ \times \Omega, \quad b \in \mathcal{K}, \tag{12}$$

$$\dot V_{(1)}(t,x) \le -c(\|x\|) \quad \textit{для} \quad t \ne \tau_i(x), \quad c \in \mathcal{K}, \tag{13}$$

$$V(\tau_i + 0, x + I_i(x)) - V(\tau_i, x) \le 0, \quad i \in N. \tag{14}$$

Тогда решение $x = 0$ системы (1) равномерно асимптотически устойчиво и существует $\rho > 0$ $(\rho < H)$ такое, что B_ρ содержится в области его притяжения.

Докажем, что существует кусочно-непрерывная функция $V(t,x)$, удовлетворяющая условиям теоремы 1.

Напомним, что норма матрицы $A = \{a_{kj}\}_{k,j=1}^n$ равна [12, с. 153]

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{kj}^2}. \tag{15}$$

Тогда из неравенства Коши – Буняковского следует оценка [12, с. 153]

$$\|Ax\| \le \|A\| \|x\|. \tag{16}$$

Вначале докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия $H_1 – H_7$. Тогда при $\tau > 0$ справедливы оценки*

$$\left\| \frac{\partial x(t_0+\tau, t_0, x_0)}{\partial x_k^0} \right\| < M(\tau), \quad k = \overline{1,n}, \tag{17}$$

где $M(\tau)$ — положительная монотонно возрастающая непрерывная функция.

Доказательство. Согласно [1, с. 30], производные $u(t) = \dfrac{\partial x(t,t_0,x_0)}{\partial x_k^0}$, $1 \le k \le n$, удовлетворяют системе уравнений в вариациях относительно начальных данных

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= A(t)u, \;\; t \ne \tau_i, \\ \Delta u &= B_i u, \;\; t = \tau_i, \;\; i \in N, \end{aligned} \tag{18}$$

где τ_i — моменты встречи решения $x(t,t_0,x_0)$ с поверхностями $t = \tau_i(x)$. Матрицы $A(t)$, B_i имеют вид

$$A(t) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=x(t,t_0,x_0)}, \quad B_i = \frac{\partial I_i(x)}{\partial x}\Big|_{x=x(\tau_i,t_0,x_0)} (E + P_i).$$

Матрицы P_i определяются следующим образом:

$$P_i = \frac{1}{1 - \left\langle \dfrac{\partial \tau_i(x)}{\partial x}\Big|_{x=x(\tau_i,t_0,x_0)}, f(\tau_i, x(\tau_i,t_0,x_0)) \right\rangle} \left\{ \frac{\partial \tau_i(x)}{\partial x_j}\Big|_{x=x(\tau_i,t_0,x_0)} f_l(\tau_i, x(\tau_i,t_0,x_0)) \right\}_{j,l=1}^n.$$

Функции $u(t) = \dfrac{\partial x(t,t_0,x_0)}{\partial x_k^0}$, $1 \le k \le n$, удовлетворяют начальным условиям

$$u(t_0) = e_k, \tag{19}$$

где e_k — k-й орт пространства R^n, т. е. вектор, у которого k-я компонента равна единице, а остальные — нули.

Решение $u(t) = u(t,t_0,x_0)$ системы (18) можно представить в виде

$$u(t) = u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)u(\tau)\,d\tau + \sum_{t_0 \le \tau_i < t} B_i u(\tau_i).$$

Имеем

$$\|u(t)\| \le \|u_0\| + \int\limits_{t_0}^{t} \|A(\tau)u(\tau)\| d\tau + \sum_{t_0 \le \tau_i < t} \|B_i u(\tau_i)\|.$$

Используя неравенство Коши – Буняковского (16), получаем

$$\|u(t)\| \le \|u_0\| + \int\limits_{t_0}^{t} \|A(\tau)\|\|u(\tau)\| d\tau + \sum_{t_0 \le \tau_i < t} \|B_i\|\,\|u(\tau_i)\|. \tag{20}$$

Найдем оценку матриц P_i. В силу условия (7) получим

$$\|P_i\| \le \frac{1}{1-\alpha}\left\| \left\{ \frac{\partial \tau_i(x)}{\partial x_j}\Big|_{x=x(\tau_i,t_0,x_0)} f_l(\tau_i, x(\tau_i,t_0,x_0)) \right\}_{j,l=1}^{n} \right\|.$$

Далее, из определения нормы матрицы (15), учитывая ограниченность элементов матрицы (2), (5), имеем

$$\|P_i\| \le \frac{1}{1-\alpha}\sqrt{\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial \tau_i(x)}{\partial x_j}\Big|_{x=x(\tau_i,t_0,x_0)} f_l(\tau_i, x(\tau_i,t_0,x_0))\Big)^2} =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial \tau_i(x)}{\partial x_j}\Big|_{x=x(\tau_i,t_0,x_0)}\Big)^2 \sum_{l=1}^{n}(f_l(\tau_i, x(\tau_i,t_0,x_0)))^2} =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left\|\frac{\partial \tau_i(x)}{\partial x}\Big|_{x=x(\tau_i,t_0,x_0)}\right\| \cdot \|f(\tau_i, x(\tau_i,t_0,x_0)\| \le \frac{1}{1-\alpha} K C_3.$$

Тогда

$$\|E + P_i\| \le \|E\| + \|P_i\| \le n + \frac{1}{1-\alpha} K C_3.$$

Следовательно, учитывая ограниченность элементов матриц (3), (4), получаем

$$\|B_i\| \leq \left\|\frac{\partial I_i(x(\tau_i))}{\partial x}\right\| \|E + P_i\| \leq C_2(n + \frac{1}{1-\alpha} K C_3) = L_1,$$

$$\|A(t)\| = \left\|\frac{\partial f(t, x(t))}{\partial x}\right\| \leq C_1.$$

Подставляя полученные оценки в (20), находим

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| + C_1 \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\| \, d\tau + L_1 \sum_{t_0 \leq \tau_i < t} \|u(\tau_i)\|.$$

Теперь, применяя лемму 2.2 [1] при $C = \|u_0\|$, $\beta = L_1$, $\gamma = C_1$, получаем оценку

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\|(1 + L_1)^p e^{C_1(t-t_0)}. \tag{21}$$

Здесь p — количество точек τ_i на промежутке $[t_0, t_0 + \tau)$. Заметим, что $\|u_0\| = 1$ в силу (19). Поскольку выражение $(1+L_1)^p$ монотонно возрастает при возрастании τ $(\tau = t - t_0)$, неравенство (21) означает выполнение оценки (17).

Система (18) одна и та же для всех групп производных $\dfrac{\partial x(t, t_0, x)}{\partial x_k^0}$, $k = \overline{1, n}$, поэтому полученная оценка справедлива для любого $u = \dfrac{\partial x(t, t_0, x_0)}{\partial x_k^0}$, $k = \overline{1, n}$.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия $H_1 - H_8$, решение $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво и область B_ρ, $0 < \rho < H$, содержится в области его притяжения. Тогда существуют константа $P > 0$, функции $a, b, c \in \mathcal{K}$ и функция $V : R_+ \times B_\rho \to R_+$, удовлетворяющие условиям*

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial x}(t, x)\right\| \leq P \quad \textit{для} \quad (t, x) \in R_+ \times B_\rho, \quad t \neq \tau_i(x), \tag{22}$$

$$a(\|x\|) \leq V(t, x) \quad \textit{для} \quad (t, x) \in R_+ \times B_\rho, \quad a \in \mathcal{K}, \tag{23}$$

$$V(t, x) \leq b(\|x\|) \quad \textit{для} \quad (t, x) \in R_+ \times B_\rho, \quad b \in \mathcal{K}, \tag{24}$$

$$\dot{V}_{(1)}(t, x) \leq -c(\|x\|) \quad \textit{для} \quad (t, x) \in R_+ \times B_\rho, \quad t \neq \tau_i(x), \quad c \in \mathcal{K}, \tag{25}$$

$$V(\tau_i + 0, x + I_i(x)) - V(\tau_i, x) \leq 0, \quad x \in B_\rho, \quad i \in N. \tag{26}$$

Если система (1) периодична с периодом ω, то функция V также может быть выбрана периодической с периодом ω.

Доказательство. Поскольку нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво, то $\|x(t, t_0, x_0)\| \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по $t_0 \geq 0$, $x_0 \in B_\rho$, поэтому в этой области выполняется неравенство

$$\|x(t_0 + s, t_0, x_0)\|^2 < \phi(s), \tag{27}$$

где $\phi(s)$ — скалярная монотонно убывающая непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\lim_{s\to\infty}\phi(s) = 0$. Действительно, если мы возьмем убывающую и сходящуюся к нулю бесконечную последовательность $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\epsilon_i > 0$, то для любого ϵ_i из этой последовательности найдется число $\sigma_i(\epsilon_i)$ такое, что при всех $t > t_0 + \sigma_i(\epsilon_i)$ будет выполняться неравенство $\|x(t,t_0,x_0)\| < \epsilon_i$. Последовательность σ_i будет расходящейся, т. е. $\sigma_{i+1} > \sigma_i$. Рассмотрим положительную монотонно убывающую функцию $\phi(s)$, для которой $\phi(\sigma_{i+1}) = \epsilon_i^2$, $i \in N$. Построенная таким образом функция будет удовлетворять всем требуемым условиям.

Пусть $M : R_+ \to R_+$ — монотонно возрастающая непрерывная функция такая, что $\lim_{t\to\infty} M(t) = +\infty$. В монографии [13, с. 310–315] показано существование непрерывно дифференцируемой функции $g = g(\phi)$ такой, что

$$g \in \mathcal{K}, \quad g' \in \mathcal{K}, \tag{28}$$

$$\int\limits_0^\infty g(\phi(s))\,ds < N_1 < +\infty, \quad N_1 > 0, \tag{29}$$

$$\int\limits_0^\infty g'(\phi(s))M(s)\,ds < N_2 < +\infty, \quad N_2 > 0, \tag{30}$$

$$g'(\phi(s))M(s) < N_3 < +\infty \quad \text{при всех} \quad s \ge 0, \quad N_3 > 0. \tag{31}$$

Определим функцию V следующим образом:

$$\begin{aligned} V(t,x) &= \int\limits_t^\infty g(\|x(s,t,x)\|^2)\,ds \equiv \\ &\equiv \int\limits_0^\infty g(\|x(t+s,t,x)\|^2)\,ds \quad \text{для} \quad (t,x) \in R_+ \times B_\rho, \quad t \ne \tau_i(x), \end{aligned} \tag{32}$$

$$V(\tau_i,x) = V(\tau_i - 0, x) \quad \text{при} \quad x \in B_\rho, \quad i \in N, \tag{33}$$

и покажем, что она удовлетворяет всем условиям теоремы.

На основании оценок (27), (29) получаем

$$\begin{aligned} V(t,x) &= \int\limits_0^\infty g(\|x(t+s,t,x)\|^2)\,ds \le \\ &\le \int\limits_0^\infty g(\phi(s))\,ds < N_1 \quad \text{для} \quad (t,x) \in R_+ \times B_\rho, \quad t \ne \tau_i(x). \end{aligned}$$

Следовательно, интеграл (32) сходится. Далее, существует

$$\lim_{t\to\tau_i-0}\int\limits_t^\infty g(\|x(s,t,x)\|^2)\,ds = V(\tau_i-0,x) = V(\tau_i,x).$$

Следовательно, функция $V(t,x)$ определена и равномерно ограничена в области $R_+\times B_\rho$, непрерывна в этой области при $t\neq\tau_i(x)$ и непрерывна слева при $t=\tau_i(x)$.

Докажем свойство (22). Найдем производные $\dfrac{\partial V}{\partial x}$ при $t\neq\tau_i(x)$:

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} = \int\limits_0^\infty g'(\|x(t+s,t,x)\|^2)\frac{\partial(\|x(t+s,t,x)\|^2)}{\partial x_k}\,ds, \quad k=\overline{1,n}.$$

Найдем оценки для $\dfrac{\partial(\|x(t+s,t,x)\|^2)}{\partial x_k}$:

$$\left|\frac{\partial(\|x(t+s,t,x)\|^2)}{\partial x_k}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial x_k}(x_1^2+\ldots+x_n^2)\right| = 2\left|\left(x_1\frac{\partial x_1}{\partial x_k}+\ldots+x_n\frac{\partial x_n}{\partial x_k}\right)\right| \le 2\|x\|\left\|\frac{\partial x}{\partial x_k}\right\|.$$

Поскольку$\|x\|<\rho$, согласно лемме 1 окончательно получаем

$$\left|\frac{\partial(\|x(t+s,t,x)\|^2)}{\partial x_k}\right| \le 2\|x\|\left\|\frac{\partial x}{\partial x_k}\right\| < 2\rho M(s)\equiv\overline{M}(s), \quad k=\overline{1,n}.$$

Учитывая полученную оценку, а также условие (30), имеем

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_k}\right| \le \left|\int\limits_0^\infty g'(\|x(t+s,t,x)\|^2)\frac{\partial(\|x(t+s,t,x)\|^2)}{\partial x_k}ds\right| <$$

$$< \int\limits_0^\infty g'(\phi(s))\overline{M}(s)ds < N_2, \quad k=\overline{1,n}.$$

Так как интеграл, входящий в (34), сходится абсолютно и равномерно в области $R_+\times$ $\times B_\rho$, выражение $\dfrac{\partial V}{\partial x_k}$ в этой области представляет собой непрерывные и ограниченные функции, которые действительно являются частными производными функции V.

Из оценки (34) следует

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x_k}\right)^2} \le N_2\sqrt{n} = P.$$

Свойство (22) доказано.

Доказанное свойство является более сильным, чем существование бесконечно малого высшего предела (свойство (24)). Действительно, в качестве функции $b(\|x\|)$ можно взять функцию

$$b(\|x\|) = P\|x\|.$$

Докажем свойство (23). Пусть $t_0 \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$. Решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (1) при $t \in [t_0, \tau_i]$ совпадает с одним из решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

поэтому для $\tau_{i-1} < t_0 < t \leq \tau_i$ справедлива оценка [14, с. 26]

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \geq \|x_0\| e^{-C_1(t-t_0)}.$$

Далее, из условия (9) получаем

$$\|x(\tau_i, t_0, x_0) + I_i(x(\tau_i, t_0, x_0))\| \geq \mu \|x(\tau_i, t_0, x_0)\| \geq \mu \|x_0\| e^{-C_1(\tau_i - t_0)}.$$

Отрезок $[t_0, t_0 + \theta]$ содержит не более одной точки τ_i в силу условия (8), следовательно,

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \geq \min(1, \mu)\|x_0\| e^{-C_1(t-t_0)} \quad \text{при} \quad t \in [t_0, t_0 + \theta].$$

Обозначим $\gamma = \min(1, \mu)$, тогда

$$V(t, x) \geq \int\limits_0^\theta g(\|x(t+s, t, x)\|^2)\, ds \geq$$

$$\geq \int\limits_0^\theta g(\|x\|^2 \gamma^2 e^{-2C_1 s})\, ds \geq g(\|x\|^2 \gamma^2 e^{-2C_1 \theta})\theta \equiv a(\|x\|).$$

Условие (23) выполнено.

Докажем свойство (25).

Составим выражение для полной производной $\dot{V}_{(1)}(t, x)$ в силу системы (1). Очевидно, будем иметь

$$\dot{V}_{(1)}(t, x) = \left[\frac{dV}{d\tau}(\tau, x(\tau, t, x))\right]_{\tau = t}.$$

В силу единственности решения $x(s\tau, x(\tau,t,x)) = x(s,t,x)$, поэтому

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) = \left[\frac{d}{d\tau}\left(\int\limits_{\tau}^{\infty} g(\|x(s,\tau,x(\tau,t,x))\|^2)\,ds\right)\right]_{\tau=t} =$$

$$= \left[\frac{d}{d\tau}\left(\int\limits_{\tau}^{\infty} g(\|x(s,t,x)\|^2)ds\right)\right]_{\tau=t} = -g(\|x(t,t,x)\|^2 \equiv$$

$$\equiv -c(\|x\|) \quad \text{для} \quad (t,x) \in R_+ \times B_\rho, \quad t \neq \tau_i(x),$$

т. е. условие (25) выполнено.

Из соотношения $x(\tau_i + s, \tau_i - 0, x) = x(\tau_i + s, \tau_i + 0, x + I_i(x))$ и из (32), (33) следует свойство (26).

Предположим теперь, что система (1) периодична с периодом ω. Покажем, что в этом случае функция $V(t,x)$, определяемая соотношениями (32), (33), периодична с периодом ω, т. е.

$$V(t+\omega, x) \equiv V(t,x).$$

Действительно,

$$V(t+\omega,x) = \int\limits_{t+\omega}^{\infty} g\big(\|x(\tau, t+\omega, x)\|\big)\,d\tau.$$

Вводя новую переменную s по формуле $\tau = s + \omega$, получаем

$$V(t+\omega,x) = \int\limits_{t}^{\infty} g\big(\|x(s+\omega, t+\omega, x)\|\big)\,ds.$$

Из последнего равенства, используя очевидное свойство (10) решений периодических систем, получаем $V(t+\omega,x) \equiv V(t,x)$, что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

4. Выводы. Из проведенных исследований можно сделать вывод, что характер поведения траекторий, определенных функцией Ляпунова, является не только необходимым, но и достаточным условием существования такой функции. Полученные в работе результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение, например, в задачах исследования робастности динамических систем.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 288 с.

2. *Kaul S., Lakshmikantham V., Leela S.* Extremal solutions, comparison principle and stability criteria for impulsive differential equations with variable times // Nonlinear Anal., Theory, Methods and Appl. — 1994. — **22**, № 10. — P. 1263–1270.

3. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. — Singapure: World Sci., 1995. — 462 p.

4. *Власенко Л. А., Самойленко А. М.* Оптимальное управление с импульсной составляющей системами, описываемыми неявными параболическими дифференциально-операторными уравнениями // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 8. — С. 1053 – 1065.

5. *Мартынюк А. А., Слынько В. И.* Об устойчивости движения нелинейной импульсной системы // Прикл. механика. — 2004. — **40**, № 2. — С. 134 – 144.

6. *Bainov D. D., Simeonov P. S.* Systems with impulse effect: stability, theory and applications. — Chichester: Ellis Horwood, 1989. — 256 p.

7. *Гладилина Р. И., Игнатьев А. О.* О необходимых и достаточных условиях асимптотической устойчивости импульсных систем // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 8. — С. 1035 – 1043.

8. *Игнатьев А. О.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Мат. сб. — 2003. — **194**, № 10. — С. 117 – 132.

9. *Гладилина Р. И., Игнатьев А. О.* О необходимых и достаточных условиях устойчивости инвариантных множеств нелинейных импульсных систем // Прикл. механика. — 2008. — **44**, № 2. — С. 132 – 142.

10. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. — М.: Мир, 1980. — 300 с.

11. *Гургула С. И., Перестюк Н. А.* Об устойчивости положения равновесия импульсных систем // Мат. физика. — 1982. — № 31. — С. 9 – 14.

12. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння. — Київ: Либідь, 2003. — 600 с.

13. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966. — 530 с.

14. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959. — 211 с.

Получено 21.12.09