УДК 517.929

# ПЕРІОДИЧНІ ТА АСИМПТОТИЧНО ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

**Р. І. Качурівський, Г. П. Пелюх**

*Ін-т математики НАН України*
*Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3*
*e-mail: kachurivsky@gmail.com*

*We find sufficient conditions for existence of a continuously differentiable $T$-periodic solution of a system of neutral type differential-difference equations and study some properties of this solution.*

*Получены достаточные условия существования непрерывно дифференцируемого $T$-периодического решения системы дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа и исследованы некоторые его свойства.*

Диференціально-різницеві рівняння нейтрального типу вигляду

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-1) + C\dot{x}(t-1) + F(t, x(t), x(t-1), \dot{x}(t-1)), \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $A, B, C$ — дійсні $(n \times n)$-матриці, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, вивчалися багатьма математиками (див. [1 – 10] та наведену в них бібліографію), і на сьогодні багато питань їх теорії досить повно досліджено. Це, зокрема, стосується питань існування глобальних періодичних розв'язків широких класів таких систем і вивчення їх властивостей [1, 5, 7 – 9]. При цьому, як правило, суттєво використовувалась „подібність" таких систем до систем звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \Phi(t), \tag{2}$$

де $\Phi(t) = Bx(t-1) + C\dot{x}(t-1) + F(t, x(t), x(t-1), \dot{x}(t-1))$. Більш того, використовуючи викладене і відомі методи теорії звичайних диференціальних рівнянь, вдалося (при деяких умовах відносно матриці $A$ і вектор-функції $F$) отримати ряд цікавих результатів про існування й єдиність періодичних розв'язків систем рівнянь (2) і, отже, систем рівнянь (1) (див. [9]). Разом із цим рівняння нейтрального типу мають специфічні властивості, не властиві звичайним диференціальним рівнянням. Враховуючи це, в даній статті вдалося отримати нові достатні умови існування періодичних розв'язків систем рівнянь вигляду (1) і дослідити їх властивості. Крім цього, для доведення основних результатів розроблено метод, який дозволяє ефективно будувати періодичні розв'язки.

**1.** Розглянемо систему диференціально-різницевих рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-1) + C\dot{x}(t-1) + f(t), \tag{3}$$

де $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ — невироджені $(n \times n)$-матриці, елементи вектора $f(t) \not\equiv 0$ є неперервними $T$-періодичними функціями.

Запишемо систему (3) у вигляді

$$\dot{x}(t) = -C^{-1}Bx(t) - C^{-1}Ax(t+1) + C^{-1}\dot{x}(t+1) - C^{-1}f(t+1). \tag{4}$$

Легко переконатися, що якщо $\gamma(t)$ — деякий $T$-періодичний розв'язок системи (4), то він також є розв'язком системи (3).

Мають місце наступні теореми.

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови:*
*1)* $|e^{-C^{-1}Bt}| \leq Ne^{-\beta t}, \quad t \in \mathbb{R}^+$, *де* $\beta, N$ *— деякі додатні сталі,* $N > 1$;
*2)* $\left(\frac{N}{\beta}(1 + |C^{-1}B|) + 1\right) q \leq \Delta < 1$, *де*

$$q = \max\left\{|C^{-1}A|; |C^{-1}|\right\}.$$

*Тоді існує єдиний* $T$*-періодичний розв'язок* $\gamma_+(t)$ *системи рівнянь (4).*

***Доведення.*** Періодичний розв'язок системи рівнянь (4) будемо шукати у вигляді ряду

$$\gamma_+(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{5}$$

де $x_i(t)$ — деякі $T$-періодичні вектор-функції. Дійсно, підставивши (5) в (4), можна переконатися, що система (4) має формальний $T$-періодичний розв'язок у вигляді (5), якщо вектор-функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, при $t \in \mathbb{R}$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\begin{gathered} \dot{x}_0(t) = -C^{-1}Bx_0(t) - C^{-1}f(t+1), \\ \dot{x}_i(t) = -C^{-1}Bx_i(t) - C^{-1}Ax_{i-1}(t+1) + C^{-1}\dot{x}_{i-1}(t+1), \\ i = 1, 2, \ldots. \end{gathered} \tag{6}$$

Безпосередньо підстановкою в (6) можна переконатися, що вектор-функції систем рівнянь

$$\begin{gathered} x_0(t) = -\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-C^{-1}B(t-\tau)}C^{-1}f(\tau+1)d\tau, \\ x_i(t) = -\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-C^{-1}B(t-\tau)}\Big(C^{-1}Ax_{i-1}(\tau+1) - C^{-1}\dot{x}_{i-1}(\tau+1)\Big)d\tau, \quad i = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{7}$$

є $T$-періодичними розв'язками відповідних систем рівнянь (6). Взявши до уваги умови теореми, методом математичної індукції неважко показати, що при $t \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots,$ мають місце оцінки

$$|x_i(t)| \leq M_1 \Delta^i, \quad |\dot{x}_i(t)| \leq M_2 \Delta^i, \qquad i = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

де

$$M_1 = \frac{N}{\beta} f^*, \quad M_2 = \left( |C^{-1}B| \frac{N}{\beta} + 1 \right) f^*, \quad f^* = \max_{t \in [0;T)} |C^{-1} f(t)|.$$

Звідси випливає, що ряд (5), елементи якого визначаються співвідношеннями (7), рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервно диференційовної $T$-періодичної вектор-функції $\gamma_+(t)$, що є розв'язком системи (4). Можна також показати, що побудований розв'язок $\gamma_+(t)$ системи рівнянь (4) і, отже, системи (3) є єдиним.

Теорему 1 доведено.

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови*:

*1)* $|e^{-C^{-1}Bt}| \leq Ne^{\beta t}, \quad t \in \mathbb{R}^-$, *де* $\beta, N$ *— деякі додатні сталі,* $N > 1$;

*2)* $\left( \frac{N}{\beta}(1 + |C^{-1}B|) + 1 \right) q \leq \Delta < 1,$ */ де*

$$q = \max \left\{ |C^{-1}A|; |C^{-1}| \right\}.$$

*Тоді існує єдиний* $T$*-періодичний розв'язок* $\gamma_-(t)$ *системи (4) у вигляді ряду*

$$\gamma_-(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{x}_i(t),$$

*де*

$$\begin{gathered} \widetilde{x}_0(t) = \int\limits_t^{+\infty} e^{-C^{-1}B(t-\tau)} C^{-1} f(\tau + 1) d\tau, \\ \widetilde{x}_i(t) = \int\limits_t^{+\infty} e^{-C^{-1}B(t-\tau)} \left( C^{-1} A \widetilde{x}_{i-1}(\tau + 1) - C^{-1} \dot{\widetilde{x}}_{i-1}(\tau + 1) \right) d\tau, \quad i = 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{9}$$

Доведення теореми проводиться за тією ж схемою, що і доведення теореми 1.

Виконуючи в (4) заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \gamma(t), \tag{10}$$

де $\gamma(t)$ — $T$-періодичний розв'язок цієї системи, одержуємо систему однорідних рівнянь вигляду

$$\dot{y}(t) = -C^{-1}By(t) - C^{-1}Ay(t + 1) + C^{-1}\dot{y}(t + 1), \tag{11}$$

для якої мають місце наступні теореми.

**Теорема 3.** *Нехай виконуються умови*:

*1)* $|e^{-C^{-1}Bt}| \leq Ne^{-\beta t}, \quad t \in \mathbb{R}^+$, *де* $\beta, N$ — *деякі додатні сталі,* $N > 1$;

*2)* $\dfrac{N}{\beta - \beta_*}(2 + |C^{-1}B|)q \leq \Delta_+ < 1$, *де* $\beta_*$ — *деяка додатна стала така, що* $0 < \beta - \beta_* < 1$.

*Тоді існує* $n$*-параметрична сім'я* $y_+(t) = y_+(t, \widetilde{C})$ ($\widetilde{C}$ — *довільний вектор-стовпець розмірності* $n$) *неперервно диференційовних розв'язків системи (11) у вигляді ряду*

$$y_+(t, \widetilde{C}) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{12}$$

*для яких виконується умова*

$$\lim_{t\to+\infty} y_+(t) = 0.$$

***Доведення.*** Підставляючи (12) в (11), можна переконатися, що система (11) має формальний розв'язок у вигляді (12), якщо вектор-функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\dot{y}_0(t) = -C^{-1}By_0(t),$$

$$\dot{y}_i(t) = -C^{-1}By_i(t) - C^{-1}Ay_{i-1}(t+1) + C^{-1}\dot{y}_{i-1}(t+1), \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Такими, зокрема, будуть наступні, визначені при $t \geq 0$, вектор-функції:

$$\begin{gathered} y_0(t) = e^{-C^{-1}Bt}\widetilde{C}, \\ y_i(t) = -\int_0^t e^{-C^{-1}B(t-\tau)}\Big(C^{-1}Ay_{i-1}(\tau+1) - C^{-1}\dot{y}_{i-1}(\tau+1)\Big)d\tau, \quad i = 1, 2 \ldots . \end{gathered} \tag{13}$$

Не обмежуючи загальності, далі будемо вважати, що $|\widetilde{C}| \leq 1$.

Розмірковуючи за індукцією, неважко показати, що $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є неперервно диференційовними при $t \geq 0$ і задовольняють умови

$$|y_i(t)| \leq \widetilde{M}_1\Delta_+^i e^{-\beta_* t}, \quad |\dot{y}_i(t)| \leq \widetilde{M}_2\Delta_+^i e^{-\beta_* t}, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{14}$$

де

$$\widetilde{M}_1 = N, \quad \widetilde{M}_2 = (1 + |C^{-1}B|)\widetilde{M}_1.$$

Із (14) безпосередньо випливає, що ряд (12) рівномірно збігається при $t \geq 0$ до деякої неперервно диференційовної вектор-функції $y_+(t, \widetilde{C})$, яка є розв'язком системи (11) і задовольняє співвідношення

$$|y_+(t, \widetilde{C})| \leq \sum_{i=0}^{\infty}|y_i(t)| \leq \frac{\widetilde{M}_1}{1 - \Delta_+}e^{-\beta_* t},$$

$$\lim_{t\to+\infty} y_+(t,\widetilde{C}) = 0.$$

Теорему 3 доведено.

**Теорема 4.** *Нехай виконуються умови*:
*1)* $|e^{-C^{-1}Bt}| \le Ne^{\beta t}$, $t \in \mathbb{R}^-$, *де* $\beta, N$ — *деякі додатні сталі,* $N > 1$;
*2)* $N\dfrac{e^{\beta_*}}{\beta-\beta_*}(2+|C^{-1}B|)q \le \Delta_- < 1$, *де* $\beta_*$ — *деяка додатна стала така, що* $0 < < \beta - \beta_* < 1$.

*Тоді існує* $n$*-параметрична сім'я* $y_-(t) = y_-(t,\widetilde{\widetilde{C}})$ ($\widetilde{\widetilde{C}}$ — *довільний вектор-стовпець розмірності* $n$) *неперервно диференційовних розв'язків системи (11) у вигляді ряду*

$$y_-(t,\widetilde{\widetilde{C}}) = \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{y}_i(t),$$

*де*

$$\widetilde{y}_0(t) = e^{-C^{-1}Bt}\widetilde{\widetilde{C}},$$

$$\widetilde{y}_i(t) = \begin{cases} t\Big(C^{-1}\dot{\widetilde{y}}_{i-1}(1) - C^{-1}A\widetilde{y}_{i-1}(1)\Big), & t \in [0;1], \\ \int\limits_t^0 e^{-C^{-1}B(t-\tau)}\Big(C^{-1}A\widetilde{y}_{i-1}(\tau+1) - C^{-1}\dot{\widetilde{y}}_{i-1}(\tau+1)\Big)d\tau, & t \le 0, \end{cases} \tag{15}$$

$$i = 1, 2, \ldots ,$$

*для яких виконується умова*

$$\lim_{t\to-\infty} y_-(t) = 0.$$

Доведення теореми проводиться за тією ж схемою, що й доведення теореми 3.

Беручи до уваги заміну змінних (10) і доведені вище теореми, отримуємо наступне твердження.

**Теорема 5.** *Якщо виконуються умови теорем 1 і 3, то існує* $n$*-параметрична сім'я неперервно диференційовних розв'язків* $x_+(t)$ *системи (4) у вигляді ряду*

$$x_+(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \gamma_+(t),$$

*де* $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, *визначаються формулами (13), а* $\gamma_+(t)$ — *неперервно диференційовний* $T$*-періодичний розв'язок системи (4), таких, що має місце співвідношення*

$$\lim_{t\to+\infty}(x_+(t) - \gamma_+(t)) = 0.$$

*Якщо виконуються умови теорем 2 і 4, то існує* $n$*-параметрична сім'я неперервно диференційовних розв'язків* $x_-(t)$ *системи (4) у вигляді ряду*

$$x_-(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{y}_i(t) + \gamma_-(t),$$

*де* $\widetilde{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, *визначаються формулами (15), а* $\gamma_-(t)$ *— неперервно диференційовний* $T$*-періодичний розв'язок системи (4), таких, що має місце співвідношення*

$$\lim_{t \to -\infty} (x_-(t) - \gamma_-(t)) = 0.$$

**2.** Припустимо, що в системі (3) матриця $A$ має вигляд

$$A = \mathrm{diag}\Big(A_1, A_2\Big),$$

де $A_1, A_2$ — дійсні сталі матриці розмірності $p \times p$ та $(n-p) \times (n-p)$ відповідно, які задовольняють умови

$$\mathrm{Re}\ \lambda_i(A_1) < 0, \quad i = \overline{1, p},$$

$$\mathrm{Re}\ \lambda_i(A_2) > 0, \quad i = \overline{p+1, n}.$$

Тоді, як відомо, систему рівнянь (3) можна записати у вигляді

$$x(t) = Cx(t-1) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\Big((AC+B)x(\tau-1) + f(\tau)\Big)d\tau, \tag{16}$$

де

$$G(t) = \begin{cases} -\mathrm{diag}\Big(0, e^{A_2 t}\Big) & \text{при} \quad t < 0, \\ \mathrm{diag}\Big(e^{A_1 t}, 0\Big) & \text{при} \quad t > 0. \end{cases}$$

Має місце наступна теорема.

**Теорема 6.** *Нехай виконуються умови*:
*1)* $|C^{-1}| = c^* < 1$;
*2)* $|G(t)| \leq Me^{-\alpha|t|}$, $t \in \mathbb{R}$, *де* $\alpha$, $M$ *— деякі додатні сталі,* $M > 1$;
*3)* $\max\limits_{t \in [0;T)} |f(t)| = f^* < +\infty$;
*4)* $2\dfrac{M}{\alpha}\dfrac{c^*}{1-c^*} l \leq \Delta < 1$, *де* $l = |AC + B|$.

*Тоді існує неперервно диференційовний* $T$*-періодичний розв'язок* $\gamma(t)$ *системи рівнянь (16).*

***Доведення.*** $T$-періодичний розв'язок системи рівнянь (16) будемо шукати у вигляді функціонального ряду

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{17}$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, — деякі неперервні $T$-періодичні вектор-функції, що є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$x_0(t) = Cx_0(t-1) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)f(\tau)d\tau, \tag{$18_0$}$$

$$x_i(t) = Cx_i(t-1) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\Big(AC+B\Big)x_{i-1}(\tau-1)d\tau, \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{$18_i$}$$

Безпосередньою підстановкою в $(18_i)$ можна переконатися, що ряди

$$x_i(t) = -\sum_{j=1}^{\infty} C^{-j} F_i(t+j), \;\; i = 0, 1, \ldots , \tag{$19_i$}$$

де

$$F_0(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)f(\tau)d\tau,$$

$$F_i(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\,(AC+B)\,x_{i-1}(\tau-1)d\tau,$$

є формальними розв'язками систем рівнянь $(18_i)$. Покажемо, що ряд (17), елементи якого визначаються співвідношеннями $(19_i)$, $i = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$. Для цього, очевидно, достатньо показати, що при всіх $t \in \mathbb{R}$ мають місце оцінки

$$|x_i(t)| \leq \widetilde{M}\Delta^i, \; i = 0, 1, \ldots , \tag{$20_i$}$$

де

$$\widetilde{M} = \frac{2}{\alpha} M f^* \frac{c^*}{1-c^*}.$$

Дійсно, згідно з $(19_i)$ та умовами теореми отримуємо

$$|x_0(t)| = \left| -\sum_{j=1}^{\infty} C^{-j} F_0(t+j) \right| = \left| -\sum_{j=1}^{\infty} C^{-j} \left( \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t+j-\tau)f(\tau)d\tau \right) \right| \leq \widetilde{M},$$

і, отже, оцінка $(20_0)$ справджується. Припустимо, що вже доведено оцінки $(20_k)$, $k = 0, 1, \ldots, i-1$, і покажемо, що має місце оцінка $(20_i)$. Дійсно, на підставі $(20_{i-1})$ та умов теореми отримуємо

$$|x_i(t)| = \left| -\sum_{j=1}^{\infty} C^{-j} F_i(t+j) \right| =$$

$$= \left| -\sum_{j=1}^{\infty} C^{-j} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t+j-\tau)\Big(AC+B\Big) x_{i-1}(\tau-1)d\tau \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} c^{*j} \int_{-\infty}^{+\infty} Me^{-\alpha|t+j-\tau|} l |x_{i-1}(\tau-1)| d\tau \leq \frac{2}{\alpha} Ml \frac{c^*}{1-c^*} \widetilde{M}\Delta^{i-1} \leq \widetilde{M}\Delta^i.$$

Таким чином, справедливість оцінок $(20_i)$, $i = 0, 1, \ldots,$ повністю доведено.

Оскільки вектор-функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ що визначаються співвідношеннями $(19_i)$, є $T$-періодичними, то безпосередньо із $(20_i)$, $i = 0, 1, \ldots,$ та умови 4 теореми випливає, що ряд (17) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної $T$-періодичної вектор-функції $\gamma(t)$.

Покажемо, що вектор-функція $\gamma(t)$ є неперервно диференційовною. Для цього, очевидно, достатньо показати, що неперервно диференційовними є вектор-функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ і ряд

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \dot{x}_i(t) \tag{21}$$

є рівномірно збіжним при всіх $t \in \mathbb{R}$.

Справді, враховуючи умови теореми, при всіх $j = 1, 2, \ldots$ і $t \in \mathbb{R}$ маємо

$$\left| \Big( C^{-j} F_0(t+j) \Big)' \right| = \left| C^{-j} \Big( AF_0(t+j) + f(t+j) \Big) \right| \leq$$

$$\leq c^{*j} \Big( |A| \frac{2}{\alpha} Mf^* + f^* \Big) \leq \widehat{M} c^{*j}, \tag{22}$$

тобто вектор-функція $x_0(t)$ є неперервно диференційовною при $t \in \mathbb{R}$ і має місце оцінка

$$|\dot{x}_0(t)| = \left| -\sum_{j=1}^{\infty} \Big( C^{-j} F_0(t+j) \Big)' \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \widehat{M} c^{*j} = \widehat{M} \frac{c^*}{1-c^*}. \tag{$23_0$}$$

Далі, внаслідок неперервної диференційовності вектор-функцій $F_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots,$ при всіх $j = 1, 2, \ldots$ і $t \in \mathbb{R}$ маємо

$$\left|\Big(C^{-j}F_i(t+j)\Big)'\right| = \left|C^{-j}\Big(AF_i(t+j) + (AC+B)x_{i-1}(t+j-1)\Big)\right| \leq$$

$$\leq c^{*j}\left(|A|\frac{2}{\alpha}M|AC+B|\widetilde{M}\Delta^{i-1} + |AC+B|\widetilde{M}\Delta^{i-1}\right) \leq$$

$$\leq c^{*j}\left(|A|\frac{2}{\alpha}M + 1\right)l\widetilde{M}\Delta^{i-1} \leq \widehat{M}\Delta^i c^{*j},$$

звідки випливає

$$\left|-\sum_{j=1}^{\infty}\Big(C^{-j}F_i(t+j)\Big)'\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty}\widehat{M}\Delta^i c^{*j} = \widehat{M}\frac{c^*}{1-c^*}\Delta^i,$$

тобто вектор-функції $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, є неперервно диференційовними при $t \in \mathbb{R}$ і справджуються оцінки

$$|\dot{x}_i(t)| \leq \widehat{M}\frac{c^*}{1-c^*}\Delta^i, \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{$23_i$}$$

Таким чином, на підставі ($23_i$), $i = 0, 1, \ldots$, та умови 4 теореми ряд (21) є рівномірно збіжним при всіх $t \in \mathbb{R}$.

Теорему 6 доведено.

***Зауваження.*** Використовуючи відому теорему Флоке, одержані вище результати можна узагальнити на випадок систем рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-1) + C(t)\dot{x}(t-1) + f(t),$$

де елементи матриць $A(t)$, $B(t)$ і $C(t)$ є неперервними $T$-періодичними функціями.

**3.** Розглянемо тепер систему рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-1) + C\dot{x}(t-1) + \Phi(t, x(t), x(t-1)), \tag{24}$$

де

$$A = \mathrm{diag}\Big(A_1, A_2\Big),$$

$A_1, A_2$ — дійсні сталі матриці розмірності $(p \times p)$ та $(n-p)\times(n-p)$ відповідно, які задовольняють умови

$$\mathrm{Re}\ \lambda_i(A_1) < 0, \quad i = \overline{1,p},$$

$$\mathrm{Re}\ \lambda_i(A_2) > 0, \quad i = \overline{p+1,n},$$

$B, C$ — сталі матриці розмірності $n \times n$ ($\det C \neq 0$), $\Phi(t, x, y)$ — деяка дійсна неперервна при $t \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ $T$-періодична по $t$ вектор-функція. Неважко показати, що в цьому випадку систему рівнянь (24) можна записати у вигляді

$$x(t) = Cx(t-1) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\Big((AC+B)x(\tau-1) + \Phi\Big(\tau, x(\tau), x(\tau-1)\Big)\Big)d\tau, \qquad (25)$$

де

$$G(t) = \begin{cases} -\mathrm{diag}\Big(0, e^{A_2 t}\Big) & \text{при } t < 0, \\ \mathrm{diag}\Big(e^{A_1 t}, 0\Big) & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Має місце наступна теорема.

**Теорема 7.** *Нехай виконуються умови*:

*1)* $|C^{-1}| = c^* < 1$;

*2)* $|\Phi(t, x', y') - \Phi(t, x'', y'')| \leq L\Big(|x' - x''| + |y' - y''|\Big)$, *де* $t \in \mathbb{R}$, $x', x'', y', y'' \in \mathbb{R}^n$, $L$ — *деяка додатна стала;*

*3)* $|G(t)| \leq Me^{-\alpha|t|}$, $\quad t \in \mathbb{R}$, *де* $\alpha, M$ — *деякі додатні сталі,* $M > 1$;

*4)* $2\dfrac{M}{\alpha}\Big(|AC+B| + 2L\Big)\dfrac{c^*}{1-c^*} \leq \Delta < 1.$

*Тоді існує неперервно диференційовний $T$-періодичний розв'язок $\gamma(t)$ системи рівнянь (25).*

***Доведення.*** Покажемо, що система рівнянь (25) має розв'язок у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \qquad (26)$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні $T$-періодичні вектор-функції, що є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$x_0(t) = Cx_0(t-1) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\Phi(\tau, 0, 0)d\tau, \qquad (27_0)$$

$$x_1(t) = Cx_1(t-1) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)((AC+B)x_0(\tau-1) +$$

$$+ \Phi(\tau, x_0(\tau), x_0(\tau-1)) - \Phi(\tau, 0, 0)))d\tau, \qquad (27_1)$$

$$x_i(t) = Cx_i(t-1) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\left((AC+B)x_{i-1}(\tau-1) + \Phi\left(\tau, \sum_{j=0}^{i-1} x_j(\tau), \sum_{j=0}^{i-1} x_j(\tau-1)\right) - \right.$$

$$\left. - \Phi\left(\tau, \sum_{j=0}^{i-2} x_j(\tau), \sum_{j=0}^{i-2} x_j(\tau-1)\right)\right) d\tau, \quad i = 2,3,\ldots . \qquad (27_i)$$

Безпосередньою підстановкою в $(27_i)$, $i = 0,1,\ldots$, можна переконатися, що ряди

$$x_i(t) = -\sum_{j=1}^{\infty} C^{-j} F_i(t+j), \qquad (28_i)$$

де

$$F_0(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\Phi(\tau,0,0)\,d\tau,$$

$$F_1(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\left((AC+B)x_0(\tau-1) + \Phi\left(\tau, x_0(\tau), x_0(\tau-1)\right) - \Phi\left(\tau,0,0\right)\right) d\tau,$$

$$F_i(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\left((AC+B)x_{i-1}(\tau-1) + \Phi\left(\tau, \sum_{j=0}^{i-1} x_j(\tau), \sum_{j=0}^{i-1} x_j(\tau-1)\right) - \right.$$

$$\left. -\Phi\left(\tau, \sum_{j=0}^{i-2} x_j(\tau), \sum_{j=0}^{i-2} x_j(\tau-1)\right)\right) d\tau, \quad i = 2,3,\ldots ,$$

є формальними розв'язками систем рівнянь $(27_i)$ і задовольняють умови

$$|x_i(t)| \le \widetilde{M}\Delta^i, \; i = 0,1,\ldots, \qquad (29_i)$$

де

$$\widetilde{M} = \frac{2}{\alpha} M f^* \frac{c^*}{1-c^*}, \quad f^* = \max_{t\in[0;T)} |\Phi(t,0,0)|.$$

Із $(29_i)$, $i = 0,1,\ldots$, безпосередньо випливає, що ряд (26) рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної $T$-періодичної вектор-функції $\gamma(t)$. Можна показати, що ряд

$$\Phi(t,0,0) + (\Phi(t,x_0(t),x_0(t-1)) - \Phi(t,0,0)) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{\infty}\left(\Phi\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} x_j(t), \sum_{j=0}^{i-1} x_j(t-1)\right) - \Phi\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} x_j(t), \sum_{j=0}^{i-2} x_j(t-1)\right)\right)$$

рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}$ і його сума дорівнює $\Phi(t, \gamma(t), \gamma(t-1))$, тобто вектор-функція $\gamma(t)$ задовольняє систему (25).

Неважко переконатися у тому, що побудований розв'язок $\gamma(t)$ системи рівнянь (25) є неперервно диференційовним при $t \in \mathbb{R}$.

Теорему 7 доведено.

1. *Пелюх Г. П.* О существовании периодических решений нелинейных разностных уравнений // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, №12. — С. 1626 – 1633.

2. *Ахмеров Р. Р., Каменский М. И., Потапов А. С. и др.* Теория уравнений нейтрального типа // Итоги науки и техники. Мат. анализ. — 1981. — **19**. — С. 55 – 126.

3. *Курбатов В. Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. — Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990. — 167 с.

4. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.

5. *Пелюх Г. П., Олійниченко О. П.* Асимптотичні властивості глобальних розв'язків системи диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу з нелінійними відхиленнями аргументу // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 4. — С. 489 – 503.

6. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. — Киев: Наук. думка, 1984. — 212 с.

7. *Пелюх Г. П., Блащак Н. І.* Про існування і єдиність періодичних розв'язків систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійним відхиленням аргументу // Доп. НАН України. — 1997. — № 8. — С. 10 – 13.

8. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* О периодических решениях систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Там же. — 1994. — № 3. — С. 19 – 21.

9. *Качурівський Р. І., Пелюх Г. П.* Про існування періодичних розв'язків систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2009. — **6**, № 2. — С. 400 – 416.

10. *Пелюх Г. П., Богай Н. А.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 3. — С. 351 – 359.

*Одержано 05.07.10,*
*після доопрацювання — 29.10.10*