УДК 517 . 9

АПРОКСИМАЦІЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З НЕОБМЕЖЕНИМ ОПЕРАТОРОМ

О. О. Покутний

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул.Терещенківська, 3
e-mail: lenasas@gmail.com

We give a substantiation of a parametrization method for a differential equation, in a Banach space, with an unbounded operator coefficient. We propose an algorithm for finding bounded generalized solutions with an arbitrary degree of precesion.

Обосновывается метод параметризации для дифференциального уравнения в банаховом пространстве с неограниченным операторным коэффициентом. Предложен алгоритм нахождения обобщенных ограниченных решений произвольного порядка точности.

Вступ. На осі $\mathbb{R}$ розглядається лінійне еволюційне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \tag{1}$$

де $A(t)$ — сім'я лінійних замкнених операторів із незалежною від t областю визначення $D(A(t)) = D \subset B$, щільною у вихідному банаховому просторі B, вектор-функція f належить $BC(\mathbb{R}, B)$ — простору неперервних й обмежених функцій за нормою $|||f||| = \sup_{t\in\mathbb{R}} ||f(t)||_B$.

Питання існування обмеженого на всій осі розв'язку диференціального рівняння (1) різними методами вивчалося у роботах [1 – 5] у випадку, коли B — скінченновимірний або нескінченновимірний простір. Зазначимо також, що рівняння (1) може мати сім'ю обмежених розв'язків (так звані некоректні задачі), але не при всіх неоднорідностях [3]. Побудові наближених методів для знаходження обмежених розв'язків рівняння (1) присвячено ряд праць (див., наприклад, [6]). При цьому розглядаються, як правило, алгоритми лише у випадку, коли рівняння (1) має вигляд системи звичайних диференціальних рівнянь (в цьому випадку завжди $\sup_{t\in\mathbb{R}} ||A(t)||_{\mathcal{L}(B)} < +\infty$) і на коефіцієнти рівняння накладено умови коректної розв'язності (щоб для будь-якої неоднорідності існував єдиний обмежений розв'язок).

У даній роботі наведено узагальнення методу параметризації [6, 7] на випадок необмежених операторів з не обов'язково заданими коректно [8] коефіцієнтами. Даний алгоритм дозволяє знаходити узагальнені обмежені розв'язки диференціального рівняння (1) за умов їх існування й у тому випадку, коли породжуючий оператор еволюції (у випадку $\mathbb{R}^n$ — фундаментальна матриця) є невідомим. Для простоти викладу будемо припускати виконання умов, за яких еволюційний оператор вихідного рівняння (1) є сильнонеперервним [2].

У подальшому через $l_\infty(Z, B)$ традиційно [9] будемо позначати простір нескінченних послідовностей $x = \{x_s, s \in \mathbb{Z}\}$ зі значеннями в банаховому просторі B, які мають обмежену норму $||x||_\infty = \sup_{s\in\mathbb{Z}} ||x_s||_B$.

Позначимо також через $l_\infty(Z; C([(s-1)h; sh); B))$, $h > 0$, простір послідовностей неперервних й обмежених функцій $x(t) = (x_s(t))_{s\in\mathbb{Z}}$, $x_s(t) \in B$, визначених для $t \in$ $\in [(s-1)h; sh)$ з нормою $||x||_{l_\infty(Z;C([(s-1)h;sh);B))} = \sup_{s\in\mathbb{Z}} \sup_{t\in[(s-1)h;sh)} ||x_s(t)||_B$, яку для зручності позначатимемо $||x||_1$.

Метод параметризації. Виберемо шаг $h > 0$ й розбиття $\mathbb{R} = \cup_{s=-\infty}^{+\infty}[(s-1)h; sh)$. Звуження будь-якої функції $x(t) \in BC(\mathbb{R}, B)$ на півінтервал $[(s-1)h; sh)$ позначатимемо через $x_s(t)$. Тоді рівняння (1) перетвориться на багатоточкову крайову задачу

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = A(t)x_s(t) + f(t), \quad t \in [(s-1)h; sh), \tag{2}$$

з умовами зшивання в точках розбиття

$$\lim_{t\to sh-0} x_s(t) = x_{s+1}(sh), \quad s \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Позначимо $\lambda_s = x_s((s-1)h)$ і на кожному півінтервалі $[(s-1)h; sh)$ виконаємо заміну змінних $u_s(t) = x_s(t) - \lambda_s$. Отримаємо крайову задачу із параметром

$$\frac{du_s(t)}{dt} = A(t)(u_s(t) + \lambda_s) + f(t), \quad u_s((s-1)h) = 0, \quad t \in [(s-1)h; sh), \tag{4}$$

$$\lim_{t\to sh-0} u_s(t) + \lambda_s = \lambda_{s+1}, \quad s \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Задачі (2), (3) та (4), (5) еквівалентні в тому сенсі, що якщо система неперервних і обмежених функцій $(x_s(t))_{s\in\mathbb{Z}}$ є розв'язком задачі (2), (3), то система пар $(\lambda, u(t)) =$ $= (\lambda_s, u_s(t))_{s\in\mathbb{Z}}$ — розв'язок крайової задачі (4), (5). Якщо пара $(\lambda^*, u^*(t)) \in l_\infty(\mathbb{Z}, B) \times$ $\times l_\infty\,(Z; C([(s-1)h; sh); B))$ — розв'язок задачі (4), (5), то функція $x^*(t) = (\lambda_s^* + u_s^*(t))_{s\in\mathbb{Z}}$ належить класу $BC(\mathbb{R}, B)$ й задовольняє диференціальне рівняння (1) на D.

Перевага задачі (4) полягає в тому, що при фіксованих значеннях параметра $\lambda =$ $= (\lambda_s)_{s\in\mathbb{Z}}$ вона є задачею Коші й має єдиний розв'язок, який можна знайти [2] з інтегрального рівняння

$$u_s(t) = \int\limits_{(s-1)h}^{t} A(\tau)[u_s(\tau) + \lambda_s]d\tau + \int\limits_{(s-1)h}^{t} f(\tau)d\tau. \tag{6}$$

Підставляючи $u_s(t)$ у праву частину (6) і повторюючи цей процес m разів, отримуємо

$$u_s(t) = \left[\int\limits_{(s-1)h}^{t} A(\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_{(s-1)h}^{t} A(\tau_1) \int\limits_{(s-1)h}^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \int\limits_{(s-1)h}^{t} A(\tau_1) \ldots \int\limits_{(s-1)h}^{\tau_{m-1}} A(\tau_m)d\tau_m \ldots d\tau_1 \right] \lambda_s + \int\limits_{(s-1)h}^{t} f(\tau_1)d\tau_1 + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{(s-1)h}^{t} A(\tau_1) \ldots \int\limits_{(s-1)h}^{\tau_{m-2}} A(\tau_{m-1}) \int\limits_{(s-1)h}^{\tau_{m-1}} f(\tau_m)d\tau_m d\tau_{m-1} \ldots d\tau_1 +$$

$$+ \int\limits_{(s-1)h}^{t} A(\tau_1) \ldots \int\limits_{(s-1)h}^{\tau_{m-2}} A(\tau_{m-1}) \int\limits_{(s-1)h}^{\tau_{m-1}} A(\tau_m)d\tau_m d\tau_{m-1} \ldots d\tau_1. \tag{7}$$

Звідси знаходимо $\lim\limits_{t \to sh-0} u_s(t)$ і, підставляючи у (5), одержуємо нескінченну в обидва боки операторну систему рівнянь відносно параметрів λ_s :

$$[I + P_{m,s}(h)]\lambda_s - \lambda_{s+1} = -F_{m,s}(h) - R_{m,s}(u,h), \tag{8}$$

де I — тотожний оператор,

$$P_{m,s}(h) = \int\limits_{(s-1)h}^{sh} A(\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_{(s-1)h}^{sh} A(\tau_1) \int\limits_{(s-1)h}^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{(s-1)h}^{sh} A(\tau_1) \ldots \int\limits_{(s-1)h}^{\tau_{m-1}} A(\tau_m)d\tau_m \ldots d\tau_1,$$

$$F_{m,s}(h) = \int\limits_{(s-1)h}^{sh} f(\tau_1)d\tau_1 + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{(s-1)h}^{sh} A(\tau_1) \ldots \int\limits_{(s-1)h}^{\tau_{m-2}} A(\tau_{m-1}) \int\limits_{(s-1)h}^{\tau_{m-1}} f(\tau_m)d\tau_m d\tau_{m-1} \ldots d\tau_1,$$

$$R_{m,s}(u,h) = \int\limits_{(s-1)h}^{sh} A(\tau_1) \ldots \int\limits_{(s-1)h}^{\tau_{m-2}} A(\tau_{m-1}) \int\limits_{(s-1)h}^{\tau_{m-1}} A(\tau_m)u_s(\tau_m)d\tau_m d\tau_{m-1} \ldots d\tau_1.$$

Позначимо через $Q_{m,h}$ нескінченну операторну матрицю, яка відповідає лівій частині рівняння (8). У кожному блоковому рядку матриці $Q_{m,h}$ ненульовими блоками будуть лише оператори $I + P_{m,s}(h)$ та $-I$. Ввівши до розгляду зліченні вектори $P_m(h) = (\ldots, P_{m,s}(h), P_{m,s+1}(h), \ldots)$ і $R_m(u,h) = (\ldots, R_{m,s}(u,h), R_{m,s+1}(u,h), \ldots)$, отримаємо операторне рівняння

$$Q_{m,h}\lambda = -P_m(h) - R_m(u,h). \tag{9}$$

Легко бачити, що операторна матриця

$$Q_{m,h} : l_\infty(\mathbb{Z}, B) \to l_\infty(\mathbb{Z}, B)$$

є обмеженим оператором, для якого справедливою є оцінка

$$||Q_{m,h}||_{\mathcal{L}(l_\infty(\mathbb{Z},B))} \leq 2 + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!}\,(\alpha h)^j, \quad \alpha = \sup_{t\in[(s-1)h;sh]} ||A(t)||.$$

Розв’язок задачі (4), (5) з параметром — систему пар $(\lambda_s, u_s(t))_{s\in\mathbb{Z}}$ —знаходимо за наступним алгоритмом.

Крок 1. Початкове наближення $\lambda^{(0)}$ параметра визначаємо з операторного рівняння

$$Q_{m,h}\lambda = -F_m(h).$$

На відрізках $[(s-1)h; sh)$, розв’язуючи задачу Коші (4) при $\lambda_s = \lambda_s^{(0)}$, знаходимо $u_s^{(0)}(t)$, виходячи з (6).

Крок 2. Підставляючи знайдені $u_s^{(0)}(t)$ у праву частину (7), з рівняння

$$Q_{m,h}\lambda = -F_m(h) - R_m(u^0, h)$$

визначаємо $\lambda^{(1)}$. На відрізках $[(s-1)h; sh)$, розв’язуючи задачу Коші (4) при $\lambda_s = \lambda_s^{(1)}$, знаходимо $u_s^{(1)}(t)$ тощо.

Теорема. *Нехай при деяких $h > 0$ і $m \in \mathbb{N}$ операторна матриця $Q_{m,h} : l_\infty(\mathbb{Z}, B) \to l_\infty(\mathbb{Z}, B)$ є узагальнено-оборотним оператором і виконуються нерівності*

$$||Q^-_{m,h}|| \leq \gamma_m(h), \quad \gamma_m(h) = \mathrm{const},$$

$$q_m(h) = \gamma_m(h)\left[\exp(\alpha h) - 1 - \ldots - (m!)^{-1}(\alpha h)^m\right] < 1.$$

Тоді рівняння (1) має обмежений розв’язок $x(t) \in BC(\mathbb{R}, B)$, для якого справедливою є оцінка

$$|||x - x^{(k)}||| \leq \gamma_m(h)\frac{(\alpha h)^m}{m!}\,e^{\alpha h}\,\frac{[q_m(h)]^k}{1 - q_m(h)}\,M(h,c), \tag{10}$$

$$M(h,c) = \left[e^{\alpha h} - 1\right]\left(h|||f|||\gamma_m(h)\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(\alpha h)^j}{(j+1)!} + ||\mathcal{P}_{N(Q_{m,h})}c||_\infty\right) + e^{\alpha h}|||f|||\,h,$$

$$x^{(k)}(t) = u^{(k)}(t) + \lambda^{(k)}.$$

Доведення. Зважаючи на узагальнену оборотність $Q_{m,h}$, вибираємо початковий вектор $\lambda^{(0)}$ з рівності

$$\lambda^{(0)} = Q^{-}_{m,h}(-F_m(h)) + \mathcal{P}_{N(Q_{m,h})}c,$$

де c — будь-який фіксований елемент з банахового простору B. Тоді

$$||\lambda^{(0)}||_\infty = \sup_{s\in\mathbb{Z}} ||\lambda^{(0)}_s||_B \le ||Q^{-}_{m,h}||\, ||F_m(h)||_\infty + ||\mathcal{P}_{N(Q_{m,h})}c||_\infty.$$

Оскільки

$$||F_m(h)||_\infty \le h|||f||| \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\alpha h)^j}{(j+1)!},$$

то

$$||\lambda^{(0)}||_\infty \le \gamma_m(h)h|||f||| \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\alpha h)^j}{(j+1)!} + ||\mathcal{P}_{N(Q_{m,h})}c||_\infty.$$

Згідно з нашими припущеннями, за параметром $\lambda^{(0)}$ задача (4) має єдиний розв'язок $(u^{(0)}_s(t))_{s\in\mathbb{Z}}$, для якого справджується оцінка

$$||u^{(0)}_s(t)||_B \le [e^{\alpha[t-(s-1)h]} - 1]||\lambda^{(0)}_s||_B + e^{\alpha[t-(s-1)h]}|||f|||h.$$

На підставі цього для $u^{(0)}(t)$ отримуємо оцінку

$$||u^{(0)}||_1 \le \sup_{s\in\mathbb{Z}} \sup_{t\in[(s-1)h;sh)} ||u^{(0)}_s(t)||_B \le$$

$$\le \left[e^{\alpha h} - 1\right] \left(h|||f|||\gamma_m(h) \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\alpha h)^j}{(j+1)!} + ||\mathcal{P}_{N(Q_{m,h})}c||_\infty \right) + e^{\alpha h}|||f|||\, h.$$

З алгоритму далі знаходимо вектор $\lambda^{(1)} = Q^{-}_{m,h}[-F_m(h) - R_m(u^{(0)}, h)] + \mathcal{P}_{N(Q_{m,h})}c$, де елемент банахового простору $c \in B$ виберемо таким же чином, як і на попередньому кроці. Врахувавши це, оцінимо різницю $\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}$ за нормою:

$$||\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}||_\infty = ||Q^{-}_{m,h}[-R_m(u^{(0)}, h)]|| \le \gamma_m(h)||R_m(u^{(0)}, h)||_\infty \le \gamma_m(h)||u^{(0)}|| \frac{(\alpha h)^m}{m!},$$

тоді

$$||\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}||_\infty \le \gamma_m(h) \frac{(\alpha h)^m}{m!} \times$$

$$\times \left([e^{\alpha h} - 1] \left(h|||f|||\gamma_m(h) \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\alpha h)^j}{(j+1)!} + ||\mathcal{P}_{N(Q_{m,h})}c|| \right) + e^{\alpha h}|||f|||\, h \right).$$

Продовжуючи цей ітераційний процес за індукцією, отримуємо нерівності

$$||u^{(n+1)}_s(t) - u^{(n)}_s(t)||_B \le [e^{\alpha[t-(s-1)]h} - 1]||\lambda^{(n+1)}_s - \lambda^{(n)}_s||_B. \tag{11}$$

Визначаючи знову з алгоритму пару векторів

$$\lambda^{(n+1)} = Q^{-}_{m,h}[-F_m(h) - R_m(u^{(n)}, h)] + \mathcal{P}_{N(Q_{m,h})}c,$$

$$\lambda^{(n)} = Q^{-}_{m,h}[-F_m(h) - R_m(u^{(n-1)}, h)] + \mathcal{P}_{N(Q_{m,h})}c$$

з одним і тим самим елементом c, переконуємось, що для різниці $\lambda^{(n+1)} - \lambda^{(n)}$ виконується ланцюг нерівностей

$$||\lambda^{(n+1)} - \lambda^{(n)}||_\infty = ||Q^{-}_{m,h}[R_m(u^{(n-1)}, h) - R_m(u^{(n-1)}, h)]||_\infty \leq$$
$$\leq \gamma_m(h)||R_m(u^{(n-1)}, h) - R_m(u^{(n)}, h)||_\infty.$$

Підставляючи (11) й обчислюючи повторні інтеграли, знаходимо

$$||R_m(u^{(n-1)}, h) - R_m(u^{(n)}, h)||_\infty \leq \left[e^{\alpha h} - \sum_{j=0}^{m} \frac{(\alpha h)^j}{j!}\right] ||\lambda^{(n)} - \lambda^{(n-1)}||_\infty,$$

звідки

$$||\lambda^{(n+1)} - \lambda^{(n)}||_\infty \leq \gamma_m(h) \left[e^{\alpha h} - \sum_{j=0}^{m} \frac{(\alpha h)^j}{j!}\right] ||\lambda^{(n)} - \lambda^{(n-1)}||_\infty =$$
$$= q_m(h)||\lambda^{(n)} - \lambda^{(n-1)}||_\infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки за умови теореми $q_m(h) < 1$, то послідовність $\lambda^{(n)} = (\lambda_s^{(n)})_{s\in\mathbf{Z}}$ є збіжною до деякого вектора $\lambda^* = (\lambda_s^*)_{s\in\mathbf{Z}}$ при $n \to \infty$ і для неї виконується [10] оцінка

$$||\lambda^* - \lambda^{(n)}||_\infty \leq \frac{(q_m(h))^n}{1 - q_m(h)}||\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}||_\infty \leq \frac{(q_m(h))^n}{1 - q_m(h)}\gamma_m(h)\frac{(\alpha h)^m}{m!}M(h, c).$$

Для послідовності $u^{(n)}(t)$ маємо оцінку

$$||u^{(n+1)} - u^{(n)}||_1 \leq ||R_m(u^{(n-1)}, h) - R_m(u^{(n)}, h)||_\infty,$$

з якої, як і для параметрів λ, робимо висновок щодо збіжності послідовності функцій $u^{(n)}(t)$ до деякої функції $u^*(t)$ і справедливості оцінки

$$||u^* - u^{(n)}||_1 \leq [e^{\alpha h} - 1]\frac{(q_m(h))^n}{1 - q_m(h)}\,\gamma_m(h)\frac{(\alpha h)^m}{m!}\,M(h, c).$$

Враховуючи це, бачимо, що функція $u^*(t) + \lambda^*$ є обмеженим розв'язком вихідної задачі, а $(u^{(n)}(t) + \lambda^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовність, що прямує до нього при $n \to \infty$, і виконується оцінка (12). Таким чином, теорему доведено.

1. *Плисс В.А.* Ограниченные решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. — Киев: Наук. думка, 1977.
2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
3. *Покутний О. О.* Узагальнені обмежені розв'язки лінійних еволюційних рівнянь в локально-опуклих просторах // Журн. обчислюв. та прикл. математики. — 2009. — **98**, № 2. — С. 35 – 40.
4. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 317 p.
5. *Бойчук А. А., Покутний А. А.* Ограниченные решения линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 1. — С. 3 – 14.
6. *Джумабаев Д. С.* Аппроксимация ограниченного решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения решениями двухточечных краевых задач // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1990. — **30**, № 3. — С. 388 – 404.
7. *Джумабаев Д. С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Там же. — 1989. — **29**, № 1. — С. 50 – 66.
8. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
9. *Слюсарчук В. Ю.* Стійкість розв'язків різницевих рівнянь у банаховому просторі. — Рівне: УДУВГП, 2003. — 365 с.
10. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984. — 750 с.

Одержано 17.06.10