УДК 517 . 928

ВЛАСТИВОСТІ МАТРИЦАНТА ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ З ФІКСОВАНИМИ МОМЕНТАМИ ІМПУЛЬСНОЇ ДІЇ

Р. І. Петришин, Т. М. Сопронюк

Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича
Україна, 58012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2

Using an estimate for the matriciant of a linear system without impulsive effects, we find an exponential estimate for the matriciant of the corresponding system with impulsive effects occurring at fixed times. The behaviour of the partial derivatives of this matriciant with respect to a small parameter ε is examined.

На основании оценки матриканта линейной системы без импульсного воздействия получена экспоненциальная оценка матриканта соответствующей системы с фиксированными моментами импульсного воздействия. Исследовано также поведение частных производных этого матриканта по малому параметру ε.

Системи лінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу вивчались у роботах [1, 2]. Важливу роль у таких дослідженнях відіграє поведінка нормальної фундаментальної матриці. Зазначимо, що експоненціальні оцінки матриканта системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією суттєво застосовуються при вивченні властивостей матрицантів більш складних систем, наприклад систем зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами і функціональними моментами імпульсної дії (класифікацію моментів імпульсної дії наведено у статті [3]). Тому отримані у даній роботі оцінки є актуальними.

Будемо розглядати систему лінійних диференціальних рівнянь з фіксованими моментами імпульсної дії

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau)x, \quad \Delta x|_{\tau=\tau_j} = B_j(\varepsilon)x, \tag{1}$$

де $x \in R^n$, $\tau \in R$, $j \in Z$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \ni \varepsilon$ — малий параметр, матриця $A(\tau)$ неперервна при $\tau \in R$, матриці $B_j(\varepsilon)$ l разів диференційовні по ε та виконуються оцінки

$$\|A(\tau)\| \le \sigma, \quad \|B_j(\varepsilon)\| \le \varepsilon\sigma, \quad \|B_j^{(m)}(\varepsilon)\| \le \sigma, \quad \sigma = \mathrm{const}, \tag{2}$$

для всіх $\tau \in R$, $j \in Z$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $m = \overline{1, l}$.

Вважаємо, що моменти імпульсної дії τ_j задовольняють нерівність

$$\tau_{j+1} - \tau_j \ge \varepsilon\theta \tag{3}$$

для всіх $j \in Z$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ з деякою додатною сталою θ.

Позначимо через $Q_t^\tau(\varepsilon)$ матрицант системи (1). Припустимо, що виконується оцінка

$$\|Q_t^\tau(\varepsilon)\| \le Ke^{-\gamma(\tau - t)}, \quad \tau \ge t, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

з деякими сталими $K \geq 1$ і $\gamma > 0$, не залежними від ε. Ставиться задача: дослідити оцінку частинних похідних $\dfrac{\partial^m}{\partial \varepsilon^m} Q_t^\tau(\varepsilon)$, $m = \overline{1, l}$.

Оскільки

$$Q_t^\tau(\varepsilon = E + \int\limits_t^\tau A(\xi) Q_t^\xi(\varepsilon)\, d\xi + \sum_{t \leq \tau_j < \tau} B_j(\varepsilon) Q_t^{\tau_j}(\varepsilon),$$

то

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t^\tau(\varepsilon) = \int\limits_t^\tau A(\xi) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t^\xi(\varepsilon)\, d\xi + \sum_{t \leq \tau_j < \tau} B_j'(\varepsilon) Q_t^{\tau_j}(\varepsilon) + \sum_{t \leq \tau_j < \tau} B_j(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t^{\tau_j}(\varepsilon),$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t^\tau(\varepsilon) \right\| \leq \sigma \int\limits_t^\tau \left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t^\xi(\varepsilon) \right\| d\xi + \sigma K \sum_{t \leq \tau_j < \tau} e^{-\gamma(\tau_j - t)} + \sigma\varepsilon \sum_{t \leq \tau_j < \tau} \left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t^{\tau_j}(\varepsilon) \right\|.$$

Враховуючи, що

$$\sum_{t \leq \tau_j < \tau} e^{-\gamma(\tau_j - t)} < e^{\gamma(t - \tau_1)} + e^{\gamma(t - \tau_1 - \varepsilon\theta)} + \ldots + e^{\gamma(t - \tau_1 - j\,\varepsilon\theta)} + \ldots = \frac{e^{\gamma(t - \tau_1)}}{1 - e^{-\gamma\varepsilon\theta}} < \frac{e^{\gamma\theta\varepsilon_0}}{\varepsilon\gamma\theta},$$

і аналог леми Гронуолла – Беллмана для інтегро-сумарних нерівностей [1], маємо

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t^\tau(\varepsilon) \right\| \leq K\sigma \frac{e^{\gamma\theta\varepsilon_0}}{\varepsilon\gamma\theta} \prod_{t \leq \tau_j < \tau} (1 + \sigma\varepsilon) e^{\sigma(\tau - t)} \leq \varepsilon^{-1} \frac{K\sigma e^{\gamma\theta\varepsilon_0}}{\gamma\theta} e^{\sigma(1 + \theta^{-1})(\tau - t)}.$$

Отримана оцінка є грубою і не дає експоненціального прямування до нуля. Для того щоб одержати експоненціальне прямування до нуля норм матриць $\dfrac{\partial^m}{\partial \varepsilon^m} Q_t^\tau(\varepsilon)$, $m = \overline{1, l}$, звузимо клас матриць, які визначають систему (1).

Поставимо у відповідність системі (1) систему без імпульсної дії

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau) x. \tag{4}$$

Нехай матрицант $U(\tau, t)$, $U(\tau, \tau) = E$, системи (4) задовольняє оцінку

$$\| U(\tau, t) \| \leq K e^{-\gamma_0(\tau - t)}, \quad K \geq 1, \quad \gamma_0 > K\sigma/\theta, \quad \tau \geq t. \tag{5}$$

Розглянемо далі теореми, в яких накладаються додаткові обмеження на праві частини системи (1).

Теорема 1. *Припустимо, що матрицант $U(\tau, t)$ задовольняє оцінку (5), матриці $B_j(\varepsilon)$ задовольняють умови (2), а моменти імпульсної дії — нерівність (3). Тоді для будь-яких додатних $\gamma < \gamma_0 - \sigma K/\theta$, $\gamma_1 < \gamma$, всіх $\tau \geq t$, $m = \overline{1, l}$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ справджуються оцінки*

$$\begin{gathered} \| Q_t^\tau(\varepsilon) \| \leq K\, e^{-\gamma(\tau - t)}, \\ \left\| \frac{\partial^m}{\partial \varepsilon^m} Q_t^\tau(\varepsilon) \right\| \leq \varepsilon^{-m} K^{m+1} \sigma \left(\frac{m}{\theta e(\gamma - \gamma_1)} \right)^m e^{-\gamma_1(\tau - t)}. \end{gathered} \tag{6}$$

Доведення. Припустимо для зручності, що $\tau_0 < t$, $\tau_1 \geq t$. Матрицант $Q_t^\tau(\varepsilon)$ можна записати у вигляді [1]

$$Q_t^\tau(\varepsilon) = \begin{cases} U(\tau, t), & t < \tau \leq \tau_1, \\ V_k(\tau, \varepsilon), & \tau_k < \tau \leq \tau_{k+1}, \quad k \geq 1, \end{cases} \tag{7}$$

де

$$V_1(\tau, \varepsilon) = U(\tau, \tau_1)(E + B_1(\varepsilon))U(\tau_1, t),$$

$$V_k(\tau, \varepsilon) = U(\tau, \tau_k)(E + B_k(\varepsilon)) \left[\prod_{i=k}^{2} U(\tau_i, \tau_{i-1})(E + B_{i-1}(\varepsilon)) \right] U(\tau_1, t), \quad k \geq 2.$$

За допомогою методу математичної індукції доведемо нерівності

$$\|V_k(\tau, \varepsilon)\| \leq K(1 + K\varepsilon\sigma)^k e^{-\gamma_0(\tau - t)},$$
$$\left\| \frac{\partial^m V_k(\tau, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^m} \right\| \leq k^m K^{m+1} \sigma (1 + K\varepsilon\sigma)^{k-1} e^{-\gamma_0(\tau - t)}, \quad m \geq 1, \quad \tau \in (\tau_k, \tau_{k+1}]. \tag{8}$$

Врахуємо при цьому умови (5) і властивість матрицанта

$$U(\tau, \bar{\tau})U(\bar{\tau}, t) = U(\tau, t), \quad \bar{\tau} \in (t, \tau).$$

При $k = 1$ одержимо

$$\|V_1(\tau, \varepsilon)\| \leq \|U(\tau, \tau_1)U(\tau_1, t)\| + \|U(\tau, \tau_1)\| \varepsilon\sigma \|U(\tau_1, t)\| \leq K(1 + K\varepsilon\sigma)e^{-\gamma_0(\tau - t)},$$
$$\left\| \frac{\partial^m V_1(\tau, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^m} \right\| = \left\| U(\tau, \tau_1)B_1^{(m)}(\varepsilon)U(\tau_1, t) \right\| \leq 1 \cdot K^2 \sigma e^{-\gamma_0(\tau - t)}, \ m \geq 1, \ \tau \in (\tau_1, \tau_2]. \tag{9}$$

Припустимо, що при $k = j$ справджуються оцінки

$$\|V_j(\tau, \varepsilon)\| \leq K(1 + K\varepsilon\sigma)^j e^{-\gamma_0(\tau - t)},$$
$$\left\| \frac{\partial V_j(\tau, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right\| \leq jK^2 \sigma (1 + K\varepsilon\sigma)^{j-1} e^{-\gamma_0(\tau - t)}, \tag{10}$$
$$\left\| \frac{\partial^m V_j(\tau, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^m} \right\| \leq j^m K^{m+1} \sigma (1 + K\varepsilon\sigma)^{j-1} e^{-\gamma_0(\tau - t)}, \quad m \geq 2, \quad \tau \in (\tau_j, \tau_{j+1}].$$

Тоді при $k = j + 1$ отримаємо ланцюжок рівностей

$$V_{j+1}(\tau, \varepsilon) = U(\tau, \tau_{j+1})(E + B_{j+1}(\varepsilon)) \times$$
$$\times U(\tau_{j+1}, \tau_j)(E + B_j(\varepsilon)) \left[\prod_{i=j}^{2} U(\tau_i, \tau_{i-1})(E + B_{i-1}(\varepsilon)) \right] U(\tau_1, t) =$$

$$= U(\tau,\tau_j)(E + B_j(\varepsilon)) \left[\prod_{i=j}^{2} U(\tau_i,\tau_{i-1})(E + B_{i-1}(\varepsilon))\right] U(\tau_1,t) +$$

$$+ U(\tau,\tau_{j+1})B_{j+1}(\varepsilon)U(\tau_{j+1},\tau_j)(E + B_j(\varepsilon)) \left[\prod_{i=j}^{2} U(\tau_i,\tau_{i-1})(E + B_{i-1}(\varepsilon))\right] U(\tau_1,t).$$

Звідси маємо

$$V_{j+1}(\tau,\varepsilon) = V_j(\tau,\varepsilon) + U(\tau,\tau_{j+1})B_{j+1}(\varepsilon)V_j(\tau_{j+1},\varepsilon), \tag{11}$$

$$\|V_{j+1}(\tau,\varepsilon)\| \le K(1+K\varepsilon\sigma)^j e^{-\gamma_0(\tau-t)} + Ke^{-\gamma_0(\tau-\tau_{j+1})}\varepsilon\sigma \times$$
$$\times K(1+K\varepsilon\sigma)^j e^{-\gamma_0(\tau_{j+1}-t)} = K(1+K\varepsilon\sigma)^{j+1} e^{-\gamma_0(\tau-t)},\ \tau \in (\tau_{j+1},\tau_{j+2}]. \tag{12}$$

З формули (11) дістанемо співвідношення

$$\frac{\partial V_{j+1}(\tau,\varepsilon)}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left\{V_j(\tau,\varepsilon) + U(\tau,\tau_{j+1})B_{j+1}(\varepsilon)V_j(\tau_{j+1},\varepsilon)\right\},$$

$$\left\|\frac{\partial V_{j+1}(\tau,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\| \le j\,K^2\sigma(1+K\varepsilon\sigma)^{j-1}e^{-\gamma_0(\tau-t)} + \tag{13}$$

$$+ Ke^{-\gamma_0(\tau-\tau_{j+1})}\sigma\,\|V_j(\tau_{j+1},\varepsilon)\| + Ke^{-\gamma_0(\tau-\tau_{j+1})}\varepsilon\sigma\left\|\frac{\partial V_j(\tau_{j+1},\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\| \le$$

$$\le j\,K^2\sigma(1+K\varepsilon\sigma)^{j-1}e^{-\gamma_0(\tau-t)}(1+K\varepsilon\sigma) + K^2\sigma(1+K\varepsilon\sigma)^j e^{-\gamma_0(\tau-t)} \le$$

$$\le (j+1)\,K^2\sigma(1+K\varepsilon\sigma)^j e^{-\gamma_0(\tau-t)}, \quad \tau \in (\tau_{j+1},\tau_{j+2}].$$

Для доведення третьої нерівності з (10) застосуємо відомі формули

$$(j+1)^m = \sum_{l=0}^{m} C_m^l j^{m-l},$$

$$(p(\varepsilon)q(\varepsilon))^{(m)} = \sum_{l=0}^{m} C_m^l p^{(l)}(\varepsilon)q^{(m-l)}(\varepsilon).$$

Використаємо далі нерівність

$$\left\|(p(\varepsilon)q(\varepsilon))^{(m)}\right\| \le \left\|p(\varepsilon)q^{(m)}(\varepsilon)\right\| + \sigma\sum_{l=1}^{m} C_m^l \left\|q^{(m-l)}(\varepsilon)\right\|, \tag{14}$$

яка справджується для деяких m разів диференційовних функцій $p(\varepsilon)$ і $q(\varepsilon)$ при умові, що всі похідні функції $p(\varepsilon)$ до порядку m включно обмежені сталою σ.

Далі здиференціюємо m разів рівність (11), використавши формулу Лейбніца:

$$\frac{\partial^m V_{j+1}(\tau,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^m} = \frac{\partial^m V_j(\tau,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^m} + U(\tau,\tau_{j+1})\sum_{l=0}^{m} C_m^l B_{j+1}^{(l)}(\varepsilon)\frac{\partial^{m-l} V_j(\tau_{j+1},\varepsilon)}{\partial\varepsilon^m}.$$

Для оцінки норми згрупуємо перші два доданки, як і при доведенні (13), і застосуємо нерівність (14) для функцій $B_{j+1}(\varepsilon)$ і $\partial V_j(\tau_{j+1},\varepsilon)/\partial\varepsilon$. Тоді дістанемо

$$\left\|\frac{\partial^m V_{j+1}(\tau,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^m}\right\| \le$$

$$\le j^m\, K^{m+1}\sigma(1+K\varepsilon\sigma)^j e^{-\gamma_0(\tau-t)} + Ke^{-\gamma_0(\tau-\tau_{j+1})}\sigma\sum_{l=1}^{m} C_m^l\left\|\frac{\partial^{m-l} V_j(\tau_{j+1},\varepsilon)}{\partial\varepsilon^m}\right\| \le$$

$$\le j^m\, K^{m+1}\sigma(1+K\varepsilon\sigma)^j e^{-\gamma_0(\tau-t)} + K^{m+1}\sigma(1+K\varepsilon)^{j-1}\sum_{l=1}^{m} C_m^l j^{m-l} e^{-\gamma_0(\tau-t)} \le$$

$$\le (j+1)^m\, K^{m+1}\sigma(1+K\varepsilon\sigma)^j e^{-\gamma_0(\tau-t)}, \quad m\ge 2, \quad \tau\in(\tau_j,\tau_{j+1}]. \tag{15}$$

Отже, при $k=1$ виконуються нерівності (9), а при $k=j+1$ за умови виконання (10) справджуються нерівності (12), (13) і (15), тому для довільного $k\ge 1$ справедливими є оцінки (8). Звідси маємо

$$\begin{gathered}\|Q_t^\tau(\varepsilon)\| \le K(1+K\varepsilon\sigma)^k e^{-\gamma_0(\tau-t)},\\ \left\|\frac{\partial^m Q_t^\tau(\varepsilon)}{\partial\varepsilon^m}\right\| \le k^m\, K^{m+1}\sigma(1+K\varepsilon\sigma)^{k-1} e^{-\gamma_0(\tau-t)}, \quad \tau\in(\tau_k,\tau_{k+1}].\end{gathered} \tag{16}$$

Матрицант $Q_t^\tau(\varepsilon)$ при $\tau\in[t,\tau_1]$ не залежить від ε, тому $\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon}Q_t^\tau(\varepsilon)\equiv 0$ і справджуються оцінки (6).

Оскільки кількість імпульсів k на інтервалі (t,τ) не перевищує величину $(\tau-t)/(\theta\varepsilon)$, то з (16) дістанемо, що для будь-якого $\tau\in(\tau_k,\tau_{k+1}]$, $k\in N$, виконуються оцінки

$$\|Q_t^\tau(\varepsilon)\| \le K(1+K\varepsilon\sigma)^{(\tau-t)/(\theta\varepsilon)} e^{-\gamma_0(\tau-t)} \le Ke^{-\left(\gamma_0-\frac{K\sigma}{\theta}\right)(\tau-t)} \le Ke^{-\gamma(\tau-t)},$$

$$\left\|\frac{\partial^m Q_t^\tau(\varepsilon)}{\partial\varepsilon^m}\right\| \le \left(\frac{\tau-t}{\theta\varepsilon}\right)^m K^{m+1}\sigma e^{-\left(\gamma_0-\frac{K\sigma}{\theta}\right)(\tau-t)} \le$$

$$\le K^{m+1}\sigma\left(\frac{\tau-t}{\varepsilon\theta}\right)^m e^{-(\gamma-\gamma_1)(\tau-t)} e^{-\gamma_1(\tau-t)} \le K^{m+1}\sigma\left(\frac{m}{\theta\varepsilon(\gamma-\gamma_1)e}\right)^m e^{-\gamma_1(\tau-t)}.$$

Теорему доведено.

Зазначимо, що у випадку, коли матриці $A(\tau)$ і $B_j(\varepsilon)$, $j\in Z$, є діагональними, оцінку частинних похідних $\dfrac{\partial^m}{\partial\varepsilon^m}Q_t^\tau(\varepsilon)$ можна отримати безпосередньо з експоненціальної оцінки матрицанта $Q_t^\tau(\varepsilon)$, не вимагаючи обмеження (5) на матрицант $U(\tau,t)$.

Теорема 2. *Припустимо, що матриці $A(\tau)$ і $B_j(\varepsilon)$, $j \in N$, є діагональними. Якщо виконуються нерівності (2) і (3), а для матриканта системи (1) виконується умова*

$$\|Q_t^\tau(\varepsilon)\| \leq K e^{-\gamma(\tau-t)}, \quad \tau \geq t, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

з деякими сталими $K \geq 1$ і $\gamma > 0$, не залежними від ε, то існує таке додатне $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для будь-якого додатного $\gamma_1 < \gamma$, всіх $\tau \geq t$, $m = \overline{1, l}$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ справджується оцінка

$$\left\| \frac{\partial^m}{\partial \varepsilon^m} Q_t^\tau(\varepsilon) \right\| \leq K \varepsilon^{-m} \left(\frac{m \max\{2\sigma, 1\}}{(\gamma - \gamma_1)\theta e} \right)^m e^{-\gamma_1(\tau - t)}. \tag{17}$$

Доведення. При множенні діагональних матриць добуток матриць має властивість комутативності, тому запишемо рівність (7), врахувавши діагональність матриць $(E + B_j(\varepsilon))$ і $A(\tau)$:

$$Q_t^\tau(\varepsilon) = \prod_{j=d(t,\tau)}^{1} (E + B_j(\varepsilon)) U(\tau, t), \quad \tau \geq t, \tag{18}$$

де $d(t, \tau)$ — кількість імпульсів на інтервалі (t, τ).

Здиференціюємо рівність (18) по ε на кожному півінтервалі $(\tau_k, \tau_{k+1}]$.

Оскільки матрицант $Q_t^\tau(\varepsilon)$ при $\tau \in [t, \tau_1]$ не залежить від ε, то $\dfrac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t^\tau(\varepsilon) \equiv 0$ і виконується оцінка

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t^\tau(\varepsilon) \right\| \leq 0 \cdot \frac{1}{2\sigma} \, \|Q_t^\tau(\varepsilon)\|, \quad \tau \in [t, \tau_1]. \tag{19}$$

При $k = 1$ одержимо

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t^\tau(\varepsilon) = 2\sigma \frac{1}{2\sigma} B_1'(\varepsilon) U(\tau, t),$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t^\tau(\varepsilon) \right\| = 2\sigma \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{2\sigma} B_{1_{ii}}'(\varepsilon) \right| |u_{ii}(\tau, t)|,$$

$$\|Q_t^\tau(\varepsilon)\| = \sum_{i=1}^{n} |1 + B_{1_{ii}}(\varepsilon)| \, |u_{ii}(\tau, t)|.$$

Тут через $u_{ii}(\tau, t)$ і $B_{1_{ii}}(\varepsilon)$ позначено діагональні елементи матриканта $U(\tau, t)$ і матриці $B_1(\varepsilon)$ відповідно.

З обмежень (2) випливає, що існує таке додатне $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що для будь-яких $j \in Z$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, $i \in [1, n]$, $m > 0$ справджуються нерівності

$$\left| \frac{1}{2\sigma} B_{j_{ii}}^{(m)}(\varepsilon) \right| \leq \frac{1}{2}, \quad |1 + B_{j_{ii}}(\varepsilon)| \geq \frac{1}{2},$$

тобто будь-який діагональний елемент матриці $E + B_j(\varepsilon)$ більший або дорівнює модулю відповідного елемента матриці $B_j^{(m)}(\varepsilon)/(2\sigma)$. Звідси отримуємо оцінку

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t^\tau(\varepsilon) \right\| \le 1 \cdot 2\sigma \left\| Q_t^\tau(\varepsilon) \right\|, \quad \tau \in (\tau_1, \tau_2]. \tag{20}$$

Далі при $k = 2$ з (18) знаходимо

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t^\tau(\varepsilon) = 2\sigma \left[\frac{1}{2\sigma} B_2'(\varepsilon)(E + B_1(\varepsilon)) + (E + B_2(\varepsilon)) \frac{1}{2\sigma} B_1'(\varepsilon) \right] U(\tau, t),$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t^\tau(\varepsilon) \right\| \le 2\sigma \sum_{i=1}^{n} \left[\left| \frac{1}{2\sigma} B_{2_{ii}}'(\varepsilon) \right| (1 + B_{1_{ii}}(\varepsilon)) + (1 + B_{2_{ii}}(\varepsilon)) \left| \frac{1}{2\sigma} B_{1_{ii}}'(\varepsilon) \right| \right] |u_{ii}(\tau, t)|,$$

$$\| Q_t^\tau(\varepsilon) \| = \sum_{i=1}^{n} (1 + B_{1_{ii}}(\varepsilon))(1 + B_{2_{ii}}(\varepsilon)) \, |u_{ii}(\tau, t)|.$$

Тому маємо оцінку

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t^\tau(\varepsilon) \right\| \le 2 \cdot 2\sigma \left\| Q_t^\tau \right\|, \quad \tau \in (\tau_2, \tau_3]. \tag{21}$$

Продовжуючи цей процес, при $k > 2$ одержуємо

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t^\tau(\varepsilon) = 2\sigma \sum_{l=k}^{1} \prod_{j=1}^{k} \left(\delta_{lj} E + \frac{B_j^{(1-\delta_{lj})}(\varepsilon)}{(2\sigma)^{1-\delta_{lj}}} \right) U(\tau, t),$$

$$\begin{gathered} \left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t^\tau(\varepsilon) \right\| \le 2\sigma \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} \prod_{j=k}^{1} \left| \delta_{lj} E + \frac{B_{j_{ii}}^{(1-\delta_{lj})}(\varepsilon)}{(2\sigma)^{1-\delta_{lj}}} \right| |u_{ii}(\tau, t)|, \quad \delta_{lj} = \begin{cases} 0, & l = j, \\ 1, & l \ne j, \end{cases} \\ \| Q_t^\tau(\varepsilon) \| = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} (1 + B_{j_{ii}}(\varepsilon)) \, |u_{ii}(\tau, t)|, \\ \left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t^\tau(\varepsilon) \right\| \le k \cdot 2\sigma \left\| Q_t^\tau \right\|, \quad \tau \in (\tau_k, \tau_{k+1}]. \end{gathered} \tag{22}$$

Для отримання оцінки частинних похідних по ε матриціанта $Q_t^\tau(\varepsilon)$ порядку $m > 1$ використаємо одну з нерівностей

$$\left| \frac{1}{2\sigma} B_{j_{ii}}^{(m)}(\varepsilon) \right| \le \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad \sigma > \frac{1}{2},$$

$$\left| B_{j_{ii}}^{(m)}(\varepsilon) \right| \le \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad \sigma \le \frac{1}{2}.$$

Якщо функції $B_j(\varepsilon)$ є m разів диференційовними по ε, то для $\tau \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$, як і вище, можна одержати

$$\left\| \frac{\partial^m Q_t^\tau(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^m} \right\| \le k\lambda \left\| \frac{\partial^{m-1} Q_t^\tau(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^{m-1}} \right\| \le k^m \lambda^m \left\| Q_t^\tau(\varepsilon) \right\| \le k^m \lambda^m K e^{-\gamma(\tau - t)}.$$

Тут $\lambda = \max\{2\sigma, 1\}$.

Остаточно, враховуючи нерівності (19) – (22) і те, що кількість імпульсів $d(t,\tau)$ на інтервалі (t,τ) не перевищує величину $(\tau - t)/(\theta\varepsilon)$, переконуємося, що для всіх $\tau \ge t$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ виконується ланцюжок нерівностей

$$\left\| \frac{\partial^m Q_t^\tau(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^m} \right\| \le \lambda^m \left(\frac{\tau - t}{\varepsilon\theta} \right)^m K e^{-\gamma(\tau - t)} \le \varepsilon^{-m} \lambda^m \left(\frac{m}{(\gamma - \gamma_1)\theta e} \right)^m K e^{-\gamma_1(\tau - t)}.$$

Звідси випливає оцінка (17).

Теорему доведено.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 288 с.

2. *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 428 с.

3. *Петришин Р. І., Сопронюк Т. М.* Усереднення початкової та крайової задач для одного класу коливних імпульсних систем // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 1. — С. 68 – 84.

Одержано 06.08.09,
після доопрацювання — 28.12.10