Физика низких температур, 1995, т. 21, № 3, с. 282–285 УДК 537.6

# Магнитоэлектрические эффекты в пространственно неоднородных замагниченных $2D$ электронных системах

В. Б. Шикин

*Институт физики твердого тела РАН, Россия, 142432, Черноголовка, Московской обл*

Статья поступила в редакцию 29 июня 1994 г., после переработки 26 октября 1994 г.

Обсуждены детали локальных возмущений электронной плотности магнитоэлектрического происхождения в неоднородных $2D$ электронных системах в областях, в которых локальный фактор заполнения принимает целочисленные значения. Определен вклад этих возмущений в магнитоемкость $2D$ электронной полосы. Указывается на возможность нарушения пространственной однородности в задаче о магнитоемкости плоского конденсатора, состоящего из $2D$ системы и экранирующего электрода.

Обмірковано деталі локальних збурень електронної густини магнітоелектричного походження в неоднорідних $2D$ електронних системах в областях, в яких локальний фактор заповнення приймає цілочисельне значення. Визначено вклад цих збурень в магнітоємність $2D$ електронної смуги. Вказано на можливість порушення просторової однорідності в задачі про магнітоємність плоского конденсатора, який складається з $2D$ системи та екрануючого електрода.

В работе Шкловского и др. [1] (см. также [2]) показано, что в пространственно неоднородных $2D$ электронных системах, находящихся в сильном магнитном поле, нормальном плоскости системы, локальная электронная плотность $n(x)$ должна иметь особенности в окрестности каждого из значений $x_l$, отвечающих целочисленному фактору заполнения

$$\pi l_H^2\, n(x_l) = \nu\,, \quad \nu = 1, 2, 3\ldots \tag{1}$$

Здесь $l_H^2 = c\hbar/(eH)$ — магнитная длина. Явный вид этих особенностей — серия плато с центрами, имеющими координаты $x_l$, — авторами [1] постулируется, а проведенный в работе [1] расчет касается лишь их ширины.

Целью данной работы является обсуждение одного из наблюдаемых следствий возникновения особенностей при значениях (1). Речь идет об их вкладе в магнитоемкость $2D$ неоднородных систем.

1. Рассмотрим квазиодномерную электронную систему, заполняющую полоску шириной $2w$ $(-w \le x \le +w)$, без компенсирующего фона. В отсутствие магнитного поля распределение электронной плотности в такой системе определено выражением

$$n_0(x) = \frac{n_0}{(1 - x^2/w^2)^{1/2}}\,, \quad n_0 = \frac{N}{\pi w}\,, \tag{2}$$

здесь $N$ — полное число электронов на единицу длины полоски, считающееся заданным.

Учитывая общность магнитоэлектрических явлений в различных неоднородных системах, предполагаем, что в системе с плотностью $n_0(x)$ (2) при соответствующей напряженности магнитного поля $H$ должны возникать магнитоэлектрические особенности. Пусть магнитное поле таково, что на периферии $2D$ системы имеется линия $x = x_1$, (точнее две, в силу симметрии распределения $n_0(x)$ (2)), с $\pi l_H^2\, n_0(x_1) = 1$. Уравнения равновесия в этом случае имеют вид

$$\frac{1}{2}\hbar\omega_c + e\varphi(x) - T \ln S = \text{const}\,, \tag{3}$$

$$\varphi'(x) = \frac{2e}{\kappa}\int\limits_{-w}^{+w} \frac{n(s)ds}{x - s}\,, \quad \int\limits_{-w}^{+w} n(s)ds = N\,, \tag{4}$$

$$S(\nu) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu} - 1\right) + \left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\nu} - 1\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{2}{\nu} - 1\right)\right]^{1/2},$$

$$\nu \equiv \nu(x) = \pi l_H^2\, n(x), \quad \varepsilon = \exp\left(-\frac{\hbar\omega_c}{T}\right) \ll 1\,, \tag{5}$$

$$\omega_c = eH/m_* c\,.$$

Здесь $\varphi$ — электропотенциал; $\kappa$ — диэлектрическая постоянная; $m_*$ — эффективная масса электрона в $2D$ системе. Определение $S$ (5) верно до тех пор, пока $\nu < 2$.

© В. Б. Шикин, 1995

Распределение $n_0(x)$ (2) является решением уравнения

$$\varphi'(x) = 0\,, \quad -w \le x \le +w\,, \tag{3a}$$

которое следует из (3) при $\ln S = 0$.

Влияние магнитного поля на равновесие вдоль полоски определяется свойствами функции $S$ (5). Согласно (5), величина — $T \ln S$ скачком возрастает в окрестности $\nu = 1$ от нуля при $\nu = 1/2$ до значения $-T \ln S\big|_{\nu\to 1} \to \hbar\omega_c$. Ширина переходной области растет с увеличением $T$ и может меняться в связи с конечностью плотности состояний. Последнее обстоятельство в данном расчете не учитывается.

В отсутствие кулоновских эффектов соотношение

$$\frac{1}{2}\hbar\omega_c - T \ln S = \text{const} = \mu \tag{6}$$

определяет хорошо известные осцилляции химического потенциала $\mu$ как функции от $H$ при фиксированной плотности частиц $n_s$ (в данном случае $\nu = \pi l_H^2 n_s$). Для того чтобы убедиться в этом, запишем две ассимптотики (6) в областях $\nu = 1 \pm 0$.

$$\frac{1}{2}\hbar\omega_c - T \ln\left(\frac{1}{\nu} - 1\right) = \mu_-\,, \quad \nu = 1 - 0\,;$$

$$\frac{3}{2}\hbar\omega_c + T \ln\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) = \mu_+\,, \quad \nu = 1 + 0\,.$$

Положение минимума определено условием $d\mu_-/dH\big|_{\nu_{\min}} = 0$, откуда

$$\hbar\omega_c = \frac{T}{1 - \nu_{\min}}\,. \tag{7}$$

При $T \to 0$ $\nu_{\min} \to 1 - 0$.

Аналогично из $\partial\mu_+/\partial H = 0$ имеем положение максимума

$$2\hbar\omega_c = \frac{T}{\nu_{\max} - 1}\,. \tag{7a}$$

Таким образом, выявление магнитоэлектрических эффектов в окрестностях точек $x_l$ (1) сводится к исследованию системы (1)–(5).

2. Дифференциальная магнитоемкость $C$, рассчитанная на единицу длины полоски, определена выражением

$$C = e\frac{dQ}{d\mu}\,, \quad Q = e\int_{-w}^{+w} n(s)\,ds\,. \tag{8}$$

Здесь $Q$ — полный заряд на единицу длины полосы; $\mu$ — текущее значение электрохимического потенциала, которое считается заданным. Процедура вычисления производной (8) сводится к решению системы (3)–(5), что позволяет найти локальное распределение плотности $n(x)$ в терминах $H$, $T$, $\mu$, а затем и полного заряда $Q = \int_{-w}^{+w} n(s)ds$ в тех же терминах.

В отсутствие магнитного поля интересующая нас программа на своем первом этапе уже реализована в виде выражения (2) для $n_0(x)$. Требуя теперь выполнения соотношения (3) в любой из точек $-w \le x \le +w$ для распределения $n_0(x)$ (2), мы приходим к связи между $Q$ и $\mu$:

$$2e^2 \int_{-w}^{+w} n_0(s) \ln\frac{L}{s}\,ds = \kappa\mu\,. \tag{9}$$

Для определенности в требовании (9) координата $x$ положена равной нулю, $L$ — длина полосы вдоль оси $y$.

В результате, в отсутствие магнитного поля

$$C_0 = \frac{\pi\kappa}{4}\left[\int_0^{+1} \frac{\ln(L/ws)}{(1 - s^2)^{1/2}}\,ds\right]^{-1}\,. \tag{10}$$

Этот результат будет использован ниже для сравнения со случаем $H \ne 0$.

В соответствующей задаче о магнитоемкости удобно трансформировать уравнение (3), переписав его тождественно

$$n(x) = n_0(x) + \delta n(x)\,, \tag{11}$$

$$n_0(x) = \frac{n_0}{(1 - x^2/w^2)^{1/2}}$$

$$\delta n(x) = -\frac{T}{(w^2 - x^2)^{1/2}} \times$$

$$\times \int_{-w}^{+w} \frac{(w^2 - \xi^2)^{1/2}}{x - \xi}\,\frac{1}{S}\,\frac{\partial S}{\partial\nu}\,\frac{\partial\nu}{\partial\xi}\,d\xi\,, \tag{11a}$$

величина $n_0$ имеет тот же смысл, что и в (2), так как

$$\int_{-w}^{+w} \delta n(x)\,dx = 0 \tag{12}$$

независимо от свойств комбинации $S^{-1}(\partial S/\partial\nu)(\partial\nu/\partial x)$.

Определение $n$ (11) показывает, что плотность электронов может быть представлена в виде классической части $n_0(x)$ плюс локальные всплески $\delta n$

в окрестности точек $x_1$ . В предельном случае $T << \hbar\omega_c$ эти всплески локализованы на длине $a_1$ , масштаб которой оценен в [1] (см. также определение $a_1$ , полученное ниже, формула (15)). Имеет смысл также отметить, что согласно (11), производная $\partial\nu/\partial x$ не может иметь сингулярностей, возникающих в ходе модельного расчета из [1] (см. комментарии к формуле (20) из этой работы). Если допустить наличие таких сингулярностей, то несобственный интеграл в (11а) становится расходящимся, что автоматически ведет к особенностям в распределении $n(x)$, чего не может быть.

Локальные свойства $n(x)$ в окрестности точек $x_1$ определены уравнением

$$2\varepsilon^{1/2}T^{-1}e\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{d\nu}{dx}, \qquad (13)$$

следующим из (3), с учетом поведения $S(\nu)\big|_{\nu\to 1}$ . Очевидно, что в меру экспоненциальной малости параметра $\varepsilon$ в пределе $T << \hbar\omega_c$ и конечности $d\varphi/dx$ производная $d\nu/dx$ из (13) стремится к нулю, что свидетельствует о возникновении плато для $\nu(x)$ в окрестности точек $x = \pm x_1$ . Нарушение режима $d\nu/dx \to 0$ связано , согласно (13) с ростом производной $d\varphi/dx$ вдали от центра плато. Для оценки этого эффекта добавим в левую часть (13) слагаемое

$$-\varphi_0'(x) = -\frac{2e}{\kappa}\int_{-w}^{+w}\frac{n_0(s)dx}{x-s}$$

(напомним, что такая комбинация равна нулю на интервале $-w \le x \le +w$) и представим по аналогии с [1] возникающую в левой части разность $\delta n = n(x) - n_0(x)$ в виде

$$\delta n(x) = \begin{cases} -\left.\dfrac{dn_0}{dx}\right|_{x_1}\delta x, & |\delta x| < 2a_1 \\ 0, & |\delta x| > 2a_1 \end{cases} \qquad (14)$$

где $2a_1$ — характерная ширина плато $\delta x = x - x_1$ . В результате уравнение (13) принимает вид

$$\frac{d\nu}{dx} \simeq 8\varepsilon^{1/2}\frac{e^2a_1}{T}\left.\frac{dn_0}{dx}\right|_{x_1}\left(1 + \delta x\ln\frac{a_1+\delta x}{a_1-\delta x}\right). \qquad (13a)$$

Очевидно, на расстоянии $\delta x \lesssim \pm a_1$ плато $\nu(x)$ разрушается.

Что касается длины $a_1$ , то ее оценка следует из требования

$$\frac{4e^2a_1}{\kappa}\left.\frac{dn_0}{dx}\right|_{x_1}\int_{-a_1}^{+a_1}\left(1 + s\ln\frac{a_1+s}{a_1-s}\right)ds = \hbar\omega_c \qquad (15)$$

и имеет масштаб, определенный в [1].

Осталось найти связь между $N$ и $\mu$, следующую в общем случае из (3). Принимая во внимание упрощения, использованные выше, имеем

$$4e^2\frac{dN}{N}\int_0^w\left[n_0(s) + \delta n(s)\right]\ln\frac{L}{s}\,ds = \kappa d\mu ,$$

здесь $n_0(x)$ определено из (2), $\delta n(x)$ — из (14).

Соответственно

$$C^{-1} = C_0^{-1} + \frac{1}{\pi\kappa}\Delta , \qquad (16)$$

$$\Delta = \frac{4}{\pi Nw}\int_{x_1-a_1}^{x_1+a_1}\delta n(s)\ln(L/s)\,ds .$$

Сравнение (16) с (10) показывает, что магнитное поле $H$ уменьшает емкость $2D$ системы в меру $\Delta \neq 0$. Этот эффект относительно мал, пока $w >> a_1$ . Однако в мезоскопических объектах типа квантовых $2D$ дисков либо сложных устройств, демонстрирующих эффекты кулоновской блокады, магнитная перенормировка емкости $C$ может быть весьма заметна, ибо здесь величины $w$ и $a_1$ сравнимы между собой.

Интересно отметить разницу в структуре магнитоемкости для однородных экранированных и неоднородных $2D$ систем без экрана. В первом случае емкость имеет резкие минимумы при целочисленных значениях фактора заполнения, оставаясь практически классической в промежутках между этими минимумами. В неоднородных системах таких всплесков емкости нет. При появлении точек $x_1$ (1) в зоне неоднородности $(dn/dx) \neq 0$ емкость скачком уменьшается на величину, следующую из (16). В системе, обсуждавшейся выше, при постепенном уменьшении поля $H$ точки $x_1$ появляются вначале вблизи краев полосы. Формальные бесконечности в определении $n_0(x)$ при этом должны обрезаться на длине, имеющей масштаб боровского радиуса $a_B^*$ (детали этого уточнения см., например, в [3]), так что критическое поле $H_c$ , обеспечивающее появление точек $x_1$ в полосе, следует из оценки

$$\pi l_{H_c}^2 n_0(a_B^*) = 1 , \quad a_B^* = \kappa\hbar^2/m_* e^2 ,$$

где $a_B^*$ — эффективный боровский радиус.

Уменьшение поля в области $H < H_c$ приводит к смещению точек $x_1$ к центру полосы, при некотором характерном поле $H_{\min}$ обе точки сливаются и аннигилируют:

$$\pi l^2_{H_{\min}} n_0(0) = 1 .$$

Во всем интервале $H_{\min} < H < H_c$ емкость $C$ практически сохраняется, так как смещение точек $x_1$ к центру полосы не меняет характерной энергии образования ступеней в распределении плотности $n(x)$. И лишь после аннигиляции емкость $C$ восстанавливается до своего классического значения, если до этого в систему не «вошла» следующая особая точка $x_2$ и т.д.

3. Несколько слов об экранированных системах. Обычно (см., например, [4]) расчеты магнитоемкости в этом случае содержат гипотезу о локальной нейтральности системы (плотность заряда на одной из пластин равна с обратным знаком плотности заряда на другой пластине). В результате низкотемпературная емкость замагниченной, экранированной $2D$ системы падает в минимумах до нуля. Однако в действительности требование локальной (и даже интегральной) нейтральности экранированной системы в магнитном поле является избыточным. Для равновесия между управляющим электродом и $2D$ системой достаточно потребовать равенства их электрохимических потенциалов. Электрохимический потенциал управляющего электрода $\mu_m$ практически совпадает с электрохимическим потенциалом (квантовые поправки здесь несущественны). Поэтому изменение $\mu$ металла должно сопровождаться изменением полного числа зарядов на его поверхности. Что касается $2D$ системы, то в окрестности целочисленных значений фактора заполнения электрохимический потенциал этой системы $\mu_{2D}$ (3) меняется в основном за счет энтропийного вклада $T \ln S$ при практически неизменной плотности заряда вдоль $2D$ системы. Формально это утверждение следует из формулы типа (13):

$$\frac{dv_1}{dx} = 2\varepsilon^{1/2} T^{-1} e \left[ \frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{d\varphi_2}{dx} \right], \qquad (17)$$
$$\varphi_1(x) = \hat{L}(n_1), \ \varphi_2(x) = \hat{L}(n_2), \ \varepsilon \to 0$$

где $n_1(x)$, $n_2(x)$ — распределения плотностей зарядов в $2D$ системе и в экранирующем электроде; $\hat{L}(n_1)$, $\hat{L}(n_2)$ — интегральные операторы вида (4), определяющие связь между потенциалами $\varphi_1$, $\varphi_2$ и соответствующими распределениями плотностей в $2D$ системе и экранирующем электроде.

Свойство (17) и требование равенства электрохимических потенциалов $\mu_m = \mu_{2D}$ можно совместить, лишь нарушая интегральную нейтральность $2D$ системы с управляющим электродом. Пока выполняется условие $dv_1 \big|_{dx} \to 0$, $2D$ система практически является диэлектриком, избыточный заряд вдоль управляющего электрода распределен по закону (2), и емкость системы определена выражением (10). Емкость $C_0$ (10) гораздо меньше, чем классическая емкость плоского конденсатора $C$, которая, как известно, обратно пропорциональна расстоянию $d$ между пластинами плоского конденсатора. Однако емкость $C_0$ больше нуля, и в этом смысле приведенные соображения существенно корректируют нулевой результат существующей теории магнитоемкости экранированных $2D$ систем [4] в экстремальных точках.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного Научного Фонда, Грант RE 5000.

1. D. B. Shklovskii, B. I. Shklovskii, and L. I. Glazman, *Phys. Rev.* B46, 4026 (1992).
2. C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. Lett.* 64, 216 (1990).
3. V. B. Shikin and I. Nachev, *Surf. Sci.* 196, 494 (1988).
4. В. Б. Шикин, С. С. Назин, *ФНТ* 20, 658 (1994).

## Magnetoelectric effects in spatially inhomogeneous magnetized 2D electron systems

V. B. Shikin

Details of the local perturbations of electron density of magnetoelectric origin are considered in the regions of the inhomogeneous $2D$ electron systems wherein the local filling factor takes the integer values. A contribution of these perturbations into magnetic capacitance of the $2D$ electron strip has been determined. A possibility of breaking the spatial homogeneity condition in the problem of the magnetic capacitance of plane capacitor consisting of the $2D$ system and screening electrode has been considered.