Физика низких температур, 1995, т. 21, № 3, с. 261–264 УДК 538.941

Континуальное описание вихрей в гелии II при малых скоростях вращения

Л. В. Кикнадзе, Ю. Г. Мамаладзе

Институт физики АН Грузии, Грузия, 380077, г. Тбилиси, ул. Тамарашвили, 6

Статья поступила в редакцию 14 сентября 1994 г.

Континуальное описание вращающегося гелия II использовано с целью вывода относительно простой формулы для критической скорости образования первых вихрей в кольцевом зазоре между двумя цилиндрами. Рассмотрена парадоксальная ситуация, возникающая в свободно вращающемся сосуде при фазовом переходе He I — He II и последующем резком охлаждении.

Континуальний опис гелію II, який обертається, використано з метою виведення відносно простої формули для критичної швидкості утворення перших вихорів в кільцевому зазорі між двома циліндрами. Розглянуто парадоксальну ситуацію, яка виникає у сосуді, що вільно обертається, при фазовому переході He I — He II та наступному різкому охолодженні.

1. В работах [1–3] найдены первая

$$\omega_{c1} = \frac{\hbar}{mR^2} \ln \frac{b}{a} \qquad (1)$$

и следующие критические скорости вращения гелия II, при которых становится термодинамически выгодным образование в нем первого, второго и следующих вихрей (R — радиус сосуда; m — масса атома гелия: a — радиус ствола вихря; b — эффективный радиус вихря). Этим определены интервалы скоростей вращения, в которых равновесно то или иное число вихрей (известны равновесные позиции каждого из них, как и следует при дискретном описании).

При больших скоростях вращения ($\omega >> \omega_{c1}$) применяется континуальное описание, при котором вихри считаются равномерно распределенными на единицу площади пронизанной ими части сечения сосуда в количестве [4]

$$n = \frac{m\omega}{\pi\hbar} . \qquad (2)$$

Полное число вихрей вычисляется по формуле

$$N = \frac{m\omega}{\hbar} R_i^2 , \qquad (3)$$

учитывающей существование пристенной ирротационной области $R_i < r < R$.

Известная формула для ширины ирротационной области [5,6]: $\Delta \equiv R - R_i \approx [\hbar \ln (b/a)/2m\omega]^{1/2}$, благодаря соотношению (3), равноценна следующему выражению для числа вихрей:

$$N = \left(1 - \frac{2\Delta}{R}\right) \frac{m\omega}{\hbar} R^2 . \qquad (4)$$

Эта формула, как и оценки величины $\Delta = R - R_i$ в [5,6], справедлива только при соблюдении неравенства $\Delta << R$ (эквивалентного неравенству $\omega >> \omega_{c1}$). Однако, как будет показано в следующем разделе, между областями применимости дискретного и континуального описания в действительности нет резкой границы, и в рамках последнего можно с удовлетворительной точностью оценивать число вихрей не только при больших ω, но и при скоростях вращения не столь отдаленных от ω_{c1}, как требуется для соблюдения формулы (4).

2. Воспользуемся с этой целью условием экстремальности свободной энергии [5,6]*, которое можно записать в виде

$$\left(1 - \ln x\right) x = 1 - 1/\Omega , \qquad (5)$$

где $x \equiv R_i^2/R^2$; $\Omega \equiv m\omega R^2/\hbar \ln (b/a)$ (заметим, что $\Omega = 1$ при $\omega = \omega_{c1}$, когда $b = R$).

Вычисление N по формулам (5) и (3), т.е. по схеме

* Оговоримся, что имеется в виду минимизация «свободной энергии» $E - L\omega$ (E — кинетическая энергия, L — момент импульса) только по размеру ирротационной области. Циркуляция в ирротационной области (областях) задается условием непрерывности средней скорости вращения и плотностью вихрей (2).

© Л. В. Кикнадзе, Ю. Г. Мамаладзе, 1995

$$N = \Omega x \ln (b/a) , \qquad (6)$$

и сравнение полученных чисел с точными [3] обнаруживает, что при $\Omega = 1$ получается $N = 0$ вместо $N = 1$. Затем следует: $N = 1$ вместо 2 при $\Omega = 1, 2$; $N = 3$ вместо 5 при $\Omega = 1, 6$; $N = 7$ при $\Omega = 2$. Последний результат вполне согласуется с точным.

В этих же обозначениях формула (4) имеет вид

$$N = \Omega \ln (b/a)\left[1 - (2/\Omega)^{1/2}\right]$$

и дает $N = -9$ вместо $N = 1$ при $\Omega = 1$; $N = 0$ вместо $N = 7$ при $\Omega = 2$.

Таким образом, не переходя к пределу $\omega >> \omega_{c1}$, можно и в рамках континуального описания получить разумные значения N. Что касается больших ω, в этом пределе из (5) следует

$$x \to 1 - (2/\Omega)^{1/2},$$

что равноценно формуле (4).

3. При наличии одного равновесного вихря на оси вращения имеем $R_i = x = 0$, откуда, согласно (5), следует совершенно правильное значение $\Omega = 1$ ($\omega = \omega_{c1}$). Поэтому имеет смысл применить (5) к образованию первых вихрей в кольцевом пространстве между двумя цилиндрами с радиусами R_1 и R_2. Ирротационных областей тогда две: $R_1 < r < r_i$ и $R_i < r < R_2$.* Для каждой из них имеется уравнение типа (5), в одном из которых

$$x = r_i^2/R_1^2 \equiv x_1 > 1,$$

$$\Omega = m\omega R_1^2/\hbar \ln (b/a) \equiv \Omega_1 ,$$

а в другом

$$x = R_i^2/R_2^2 \equiv x_2 < 1,$$

$$\Omega = m\omega R_2^2/\hbar \ln (b/a) \equiv \Omega_2 ,$$

(каждому значению Ω соответствует два значения x — большее и меньшее единицы).

В такой геометрии критическая скорость образования первых вихрей определяется равенством $r_i = R_i \equiv R_0$ или $\Omega_1 x_1 = \Omega_2 x_2$. Это равенство и два уравнения (5) дают следующие выражения для размера окружности, на которой располагаются первые вихри, и для критической скорости ω_0, начиная с которой их присутствие термодинамически выгодно:

$$R_0^2 = \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln (R_2^2/R_1^2)} , \qquad (7)$$

$$\omega_0 = \Omega_{2c} \frac{\hbar}{mR_2^2} \ln \frac{b}{a} , \qquad (8)$$

$$\frac{1}{\Omega_{2c}} = 1 - \left(1 - \ln x_0\right) x_0 , \quad x_0 \equiv \frac{R_0^2}{R_2^2} . \qquad (9)$$

Согласно (7) и (9), Ω_{2c} зависит только от отношения радиусов R_1, R_2. Численные значения этой величины приведены в таблице.

Таблица

	R_1/R_2									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
Ω_{2c}	2,2	2,9	3,9	5,4	7,8	12	22	50	200	800

В пределе $R_1 \to 0$ получаем $R_0 \to 0$, откуда следует отмеченное в начале этого раздела значение $\Omega_{2c} = 1$. Три последних значения Ω_{2c} относятся к обратному предельному случаю $R_1/R_2 \to 1$ и хорошо согласуются с формулой Феттера [7]:

$$\omega_0 = \frac{2\hbar}{md^2} \ln \frac{2d}{\pi a} , \qquad (10)$$

справедливой для узкой щели

$$d \equiv R_2 - R_1 << (R_1 + R_2)/2.$$

В этом пределе $1 - x_0 \approx (2/\Omega_{2c})^{1/2}$, что равноценно формуле (10). Таким образом, формула (8) правильна в обоих предельных случаях: $R_1 \to 0$ и $R_1 \to R_2$.

4. Решив уравнения (5) (или протабулировав функцию $\Omega(x)$), можно вычислить также и число вихрей в кольцевом зазоре. В зависимости от избранной схемы расчета оно определяется одним из следующих выражений:

$$N = \frac{m\omega}{\hbar}\left(R_i^2 - r_i^2\right) = \left(\Omega_2 x_2 - \Omega_1 x_1\right) \ln (b/a) =$$

$$= \left[x_2 - \left(R_1^2/R_2^2\right) x_1\right] \Omega_2 \ln (b/a) =$$

$$= \left[x_2(R_i) - x_2(r_i)\right] \Omega_2 \ln (b/a) , \qquad (11)$$

где $x_2(r) \equiv r^2/R_2^2$.

* В случае произвольных R_1, R_2 дискретный подход приводит к формулам, восприятие которых несколько затруднительно [7]; по-видимому, желателен детальный численный эксперимент.

Однако, к сожалению, использование формулы (11) не позволяет получить столь же хороших результатов при малых скоростях, как при использовании формулы (6). Дело в том, что в односвязном объеме вращающегося гелия область, занятая вихрями, непрерывно расширяется с образованием второго, третьего и т.д. вихрей, и поэтому довольно быстро сходит на нет небольшая начальная неувязка (она состоит в том, что при $\Omega = 1$ имеем $x = 0$, в связи с чем вычисленное по формуле (6) число вихрей равно нулю вместо истинного $N = 1$). Иначе обстоит дело с кольцевым зазором. Здесь $R_i - r_i$ остается равным нулю вместе с вычисленным по формуле (11) числом вихрей до тех пор, пока вновь образующиеся вихри располагаются на своей первой окружности $r = R_0$. Начальная неувязка и ожидаемое последующее расхождение с истинным N в таком случае существенно больше.

Для того чтобы формула (11) дала удовлетворительные результаты необязательны (как и в случае формулы (6)) неравенства $r_i - R_1 \ll R_1$, $R_2 - R_i \ll R_2$. Однако совершенно необходимо наличие области, в которой реализуется плотность вихрей, описанная выражением (2). Это обеспечивается условием $R_i - r_i \gg (\hbar/m\omega)^{1/2}$ (неравенство может соблюдаться не очень строго).

В пределе больших скоростей, как уже отмечалось, $1 - x_2 \to (2/\Omega_2)^{1/2}$. Аналогично $x_1 - 1 \to (2/\Omega_1)^{1/2}$. Отсюда следует наличие у обеих стенок цилиндра ирротационных областей одинаковой ширины $\Delta \approx [\hbar \ln (b/a)/2m\omega]^{1/2}$ и следующее обобщение формулы (4):

$$N = \left(1 - \frac{2\Delta}{R_2 - R_1}\right) \frac{m\omega}{\hbar} \left(R_2^2 - R_1^2\right). \quad (12)$$

В случае узкой щели ($R_2 - R_1 \ll (R_1 + R_2)/2$) получаем формулу:

$$N = \left(1 - \frac{2\Delta}{d}\right) \frac{m\omega}{\hbar} 2Rd, \quad (13)$$

которая справедлива при $d \ll R$, но $d \gg (\hbar/m\omega)^{1/2}$.

5. Ввиду оценочного характера вычислений до сих пор мы, не уточняя эффективный радиус вихря b и радиус его ствола a, использовали распространенную оценку $\ln (b/a) = 15$. Заметим, однако, что ширины внутренней и внешней ирротационных областей окажутся не вполне идентичными, если эффективный радиус вихря оценивать не как $b = (\hbar/m\omega)^{1/2}$, а как $b = \hbar/m\omega r$ [8]. Тогда при вычислении r_i в уравнении (5) возникнет $\Omega = \Omega_1$ с $b = b_1 = \hbar/m\omega R_1$, а при вычислении R_i возникнет $\Omega = \Omega_2$ с $b = b_2 = \hbar/m\omega R_2$. Однако логарифмирование большого аргумента ($a \sim 2$ Å) сильно сглаживает это различие.

6. Чеишвили и авторы этой статьи рассмотрели вопрос о критической скорости ω_{c1}', выше которой термодинамически выгодно существование вихревого континуума с плотностью (2) (опубликовано в [9]). Получив оценку $\omega_{c1}' = 4\omega_{c1}$, мы расценили ее как довольно низкий (в связи с малостью критической скорости ω_{c1}) порог. Однако этот результат был все таки завышен (по причине недостаточного учета роли ирротационной области). Данные, приведенные в разд. 2, показывают, что четкого порога области применимости континуального приближения в действительности не существует. Грубая же оценка составляет $\omega_{c1} < \omega_{c1}' < 2\omega_{c2}$.

7. В работе [11], посвященной термодинамике вихреобразования в гелии II, был недостаточно подробно разобран один парадоксальный случай: переход гелий I — гелий II в свободно вращающемся сосуде. Сверхтекучая компонента, образовавшаяся в результате охлаждения вращающейся вязкой жидкости, должна (так как $\mathrm{rot}\, \mathbf{v}_s = 0$) либо остановиться, либо сформировать вихрь. Оба этих процесса в условиях постоянства момента импульса требуют энергии и оказываются невозможными в пределе малости конечной температуры и момента инерции сосуда. Парадокс разрешается образованием в конечном состоянии совокупности вихрей с плотностью (2). Если описанным в [10] способом вычислить критические значения начальной скорости вращения до охлаждения ($\omega_i = \omega_{ic}'$) и конечной скорости после вихреобразования ($\omega_f = \omega_{fc}'$), то получим:

$$\omega_{ic}' = 2\omega_{c1} \left[1 - \frac{\rho_s}{\rho + \rho_0} + \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho + \rho_0}\right)^{1/2}\right], \quad (14)$$

$$\omega_{fc}' = 2\omega_{c1} \left[1 + \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho + \rho_0}\right)^{1/2}\right], \quad (15)$$

где $\rho = \rho_s + \rho_n$ — полная плотность жидкого гелия, а ρ_0 — осредненная («размазанная») плотность материала сосуда (определяемая его вкладом в момент инерции прибора). Если ρ_0 мала, а $\rho_s \to \rho$ ($T \to 0$), то $\omega_{ic}' \to 0$, $\omega_{fc}' \to 2\omega_{c1}$.

Результаты этой работы (кроме разд. 3 и 4) доложены на Геттингенском Уоркшопе по вихрям в гелии II и опубликованы в его материалах [11]. Авторы благодарят Оргкомитет Уоркшопа за приглашение, стимулировавшее выполнение этой работы.

1. Р. Г. Архипов, *ЖЭТФ* **33**, 116 (1957).
2. W. F. Winen, In: *Progr. in Low Temp. Phys.*, North-Holl, Publ. Co., Amsterdam (1963), vol. 111, ch. 1, p. 1.
3. G. B. Hess, *Phys. Rev.* **B161**, 189 (1967).
4. R. P. Feynman, In: *Progr. in Low Temp. Phys.*, North-Holl. Publ. Co., Amsterdam (1955), vol. 1, ch.2, p. 17.
5. И. М. Халатников, *Введение в теорию сверхтекучести*, Физматгиз, Москва (1965).
6. D. Stauffer and A. L. Fetter, *Phys. Rev.* **168**, 156 (1968).
7. A. L. Fetter, *Phys. Rev.* **153**, 285 (1967).
8. L. V. Kiknadze and Yu. G. Mamaladze, *Proc. of the Internat. Workshop on Quantum Vorticity and Turbulence in He II Flow*, 4–6 November 1993. G. Stamm and W. Fiszdom (eds.) Göttingen (1994) p. 48.
9. Э. Л. Андроникашвили, Ю. Г. Мамаладзе, Дж. С. Цакадзе, *Физика сверхтекучего гелия*, кн. II, Мецниереба, Тбилиси (1978).
10. Л. В. Кикнадзе, Ю. Г. Мамаладзе, *ФНТ* **8**, 901 (1982).
11. L. V. Kiknadze and Yu. G. Mamaladze, in: *Proc. of the I Intern. Workshop on Quantum Vorticity and Turbulence in He II Flow*, 4–6 November 1993, G. Stamm and W. Fiszdom (eds.), Göttingen (1994) p. 83.

Continual description of vortices in helium II at low angular velocities

L. V. Kiknadze and Yu. G. Mamaladze

The continual description of rotating He II is used to derive a rather simple expression for the critical velocity of first vortices appearance on the circumference between rotating coaxial cylinders. The paradoxical situation is considered that occurs in a freely rotating vessel at the phase transition He I — He II with a subsequent cooling.