

Об устойчивости ограниченной заряженной пленки гелия с металлической подложкой

В. Б. Шикин, Е. В. Лебедева

*Институт физики твердого тела РАН, Россия, 142432, п. Черноголовка, Московск. обл.
E-mail: shikin@issp.as.ru*

Статья поступила в редакцию 30 сентября 1997 г.

Обсуждаются особенности задачи об устойчивости поверхности заряженной пленки гелия ограниченных размеров с металлической подложкой. Определена зависимость критических параметров неустойчивости от размеров пленки в ее плоскости. Предлагается способ наблюдения метастабильных состояний заряженной пленки жидкости.

Обговорюються особливості задачі про стійкість поверхні зарядженої плівки гелію обмежених розмірів з металевою підкладкою. Знайдено залежність критичних параметрів нестійкості від розмірів плівки в її площині. Пропонується спосіб спостереження метастабільних станів зарядженої плівки рідини.

PACS: 68.15.+e, 67.70.+n

Как известно, заряженная жидкая поверхность теряет устойчивость при постепенном увеличении на ней плотности поверхностных зарядов [1]. Наиболее полно это явление исследовано на заряженной электронами или ионами поверхности жидкого гелия [2,3], где удалась в деталях проследить за процессом потери устойчивости поверхностью гелия и подтвердить основные предсказания теории. Для полубесконечного гелия устойчивость теряется при конечных волновых числах (на так называемой капиллярной длине волны). При этом в закритичной области происходит реконструкция поверхности гелия, т.е. переход от плоской к периодически деформированной границе с периодом близким к капиллярной длине волны и амплитудой модуляции, сложным образом зависящей от степени надкритичности (см. теоретические работы [4,5] и экспериментальные [6–8]).

В перечне результатов, относящихся к изучению устойчивости массивного гелия с зарядами на его поверхности, следует отметить также обнаружение влияния на устойчивость ограниченности размеров свободной заряженной полубесконечной жидкости. Ожидаемый результат качественно предсказуем, хотя последовательно не рассчитан. Поскольку неустойчивость массивной жидкости развивается,

в первую очередь, на капиллярной длине волны, уменьшение размеров свободной поверхности жидкости до величины меньше капиллярной длины должно приводить к увеличению ее устойчивости, что и доказано экспериментально [9].

В случае бесконечно протяженной заряженной пленки жидкости самой «уязвимой» оказывается мода с нулевым волновым вектором. Это теоретическое предсказание (см. [10]) до сих пор не подтверждено прямыми экспериментами. Имеются лишь косвенные и в значительной мере качественные указания [11] на правильность теории, например наблюдаемое снижение (по сравнению с объемным значением) критической плотности заряда, приводящее к потере устойчивости. Количественное сравнение результатов [10] и [11] не вполне законно, так как эксперимент выполнен для ячейки конечных размеров, а расчеты в [10] дают нулевое критическое волновое число, т.е. реально применимы к случаю заряженной пленки бесконечного размера. Для устранения этого сохраняющегося до настоящего времени несоответствия желательно решить задачу о неустойчивости заряженной пленки жидкости ограниченных размеров. Конечной целью подобного анализа является ответ на вопросы о том, какая пленка может считаться бесконечно

протяженной и можно ли на этом пути устранить количественные расхождения между [10] и [11]. Естественно, что решение поставленной задачи позволит выяснить и роль геометрических факторов в поведении критических параметров пленки жидкости (т.е. решается пленочная задача, аналогичная [9] для массивного гелия).

Аналізу поведения заряженной пленки жидкости в условиях, способствующих поддержанию постоянства электрического потенциала вдоль заряженной ограниченной пленки жидкости, посвящена настоящая работа. Кроме критических параметров, нас будет интересовать и локальная деформация пленки жидкости, возможность измерения которой демонстрируется недавними экспериментами [12] с заряженными пленками жидкого водорода. Используемая здесь оптическая методика допускает реализацию экспериментов по изучению влияния геометрических факторов не только на устойчивость заряженной пленки жидкости, но и на ее локальную деформацию $\xi(r)$.

В первой части настоящей работы обсуждается структура уравнений равновесия заряженной пленки жидкости конечных размеров в ее плоскости и исследуются свойства одномерного варианта деформации такой пленки. Вторая часть посвящена деталям цилиндрически-симметричного случая деформации.

Одномерная деформация пленки жидкости конечных размеров

1. Рассмотрим заряженную пленку гелия на металлической подложке при полной компенсации электрического поля над пленкой. Расстояние верхнего электрода, всегда присутствующего в задаче о заряженной поверхности гелия, до пленки несущественно (оно лишь должно быть больше толщины пленки). Геометрия электродов удовлетворяет

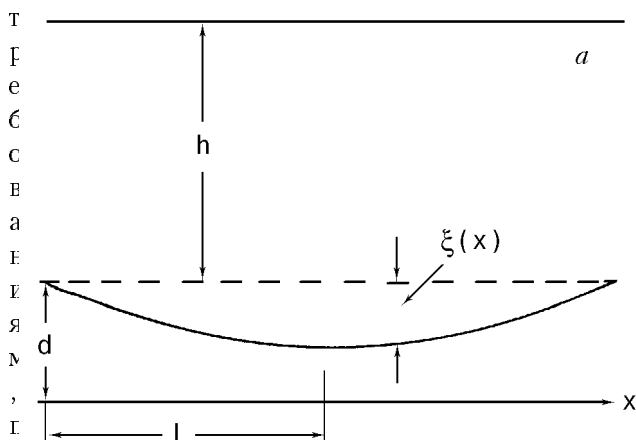


Рис. 1. Схема ячейки для изучения деформации заряженной пленки (а) и антипленки (б) гелия.

воляющим считать деформацию толщины пленки ξ одномерной (зависящей только от координаты x).

Исходное уравнение равновесия, определяющее эту деформацию, имеет структуру

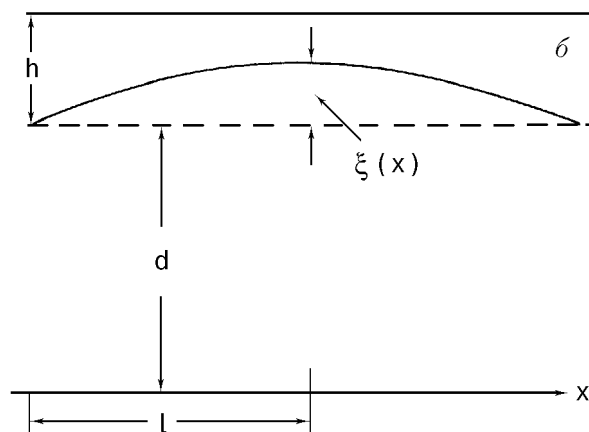
$$\rho g \xi - \alpha \frac{\xi''}{[1+(\xi')^2]^{3/2}} + \frac{V^2}{8\pi(d+\xi)^2} = 0, \quad -l \leq x \leq +l, \quad (1)$$

$$\xi(\pm l) = 0, \quad (2)$$

$$V = \text{const}, \quad -l \leq x \leq +l, \quad (3)$$

$$\xi'' = d^2 \xi / dx^2, \quad \xi' = d \xi / dx.$$

Здесь $\xi(x)$ — деформация поверхности гелия под влиянием совокупности сил, действующих на поверхность пленки: гравитации, поверхностного натяжения, сил электрического происхождения, пропорциональных разности потенциалов V между заряженной поверхностью гелия и металлической подложкой ($\xi(x) \rightarrow 0$, если $V \rightarrow 0$); ρ и g — плотность гелия и ускорение силы тяжести; α — поверхностное натяжение; d — равновесная толщина пленки гелия при $V \rightarrow 0$; $2l$ — размеры пленки в направлении x . На концах этого интервала, согласно (2), деформация поддерживается равной нулю. Электрическая часть уравнения (1) записана в предположении об идеальных металлических свойствах твердой подложки, кроме того, считается, что полное число электронов на пленке гелия не фиксировано (задана разность потенциалов V ; для получения уравнения равновесия (1) из общего функционала энергии в данном случае необходима определенная внимательность, см. [1]). Заряды поступают на пленку из радиоактивного источника на верхнем электроде. «Производство» этих зарядов прекращается после нейтрализации заданного внешнего поля $E = V/h$ полем зарядов, осевших на свободной поверхности пленки. Начало



координат помещено на металлическую подложку. Ось Oz направлена вертикально вверх. В целом геометрия задачи представлена на рис. 1 для случая пленки (a) и антипленки жидкости (b) (оба случая реализованы в [12]).

2. Сделаем несколько общих замечаний, помогающих ориентироваться в поведении $\xi(x)$. Прежде всего, очевидно, что если интервал $2l$ достаточно велик, то вдали от его концов $\xi(x)$ будет выходить на свою асимптотику ξ_0 :

$$\rho g \xi_0 + \frac{V^2}{8\pi(d + \xi_0)^2} = 0. \quad (4)$$

С электрической частью задачи в этом случае конкурирует лишь гравитационное слагаемое.

Устойчивое решение уравнения (4) относительно ξ_0 , удовлетворяющее требованию $\xi_0 \rightarrow 0$ при $V \rightarrow 0$, существует лишь в области

$$V < V_{cr}, \quad V_{cr}^2 = (2/3)^3 V_*^2, \quad V_*^2 = 4\pi\rho g d^3. \quad (5)$$

При этом

$$\xi_0^{cr} = -d/3. \quad (5a)$$

Имеется еще одно характерное значение ξ_p , отвечающее наличию точек перегиба на профиле $\xi(x)$. Положение этих точек определяется требованием $d^2\xi/dx^2 = 0$ или, что то же самое,

$$\rho g \xi_p + \frac{V^2}{8\pi(d + \xi_p)^2} = 0. \quad (6)$$

Очевидно, что определение (4) совпадает с (6). По этой причине для достаточно больших l точки перегиба на одномерном профиле $\xi(x)$ отсутствуют.

Таким образом, задачей теории является уточнение понятия «достаточно большой» интервал l , определение зависимости $\xi(x)$ вблизи концов $2D$ системы и выяснение влияния конечности l на структуру $\xi(x)$.

3. Возвращаясь к задаче (1), (2), рассмотрим сначала ее линейное решение в условиях

$$\xi(x) \ll d. \quad (7)$$

При этом

$$d^2\xi/dx^2 - p^2\xi = v^2/d^2, \quad v^2 = \frac{V^2}{8\pi\alpha}, \quad \xi(\pm l) = 0, \quad (8)$$

$$p^2 = \kappa^2 \left[1 - \frac{V^2}{4\pi(d + \xi_0)^3 \rho g} \right], \quad \kappa^2 = \rho g / \alpha.$$

Решение (8) имеет вид

$$\xi(x) = \delta \left(1 - \frac{\text{ch}(px)}{\text{ch}(pl)} \right), \quad \delta = -v^2/p^2 d^2. \quad (9)$$

Запишем еще производную $d\xi(+l)/dx$ на концах интервала, где она максимальна:

$$\left. \frac{d\xi(x)}{dx} \right|_{x=l} = v^2 \text{th}(pl)/pd, \quad (10)$$

$$\left. \frac{\text{th}(pl)}{p} \right|_{v \rightarrow 0} \rightarrow \kappa^{-1}.$$

Согласно (9), (10), размерные эффекты, связанные с конечностью l , определяются параметром pl . В области малых v речь идет о комбинации κl . Если же величина v стремится к своему критическому значению, то требование

$$pl \gg 1, \quad (11)$$

соответствующее пределу больших значений l , может отвечать размерам, существенно превышающим капиллярную постоянную данной жидкости. В этом — существенная специфика задачи о деформации пленки гелия по сравнению с вариантом этой же задачи для полубесконечной жидкости.

4. С ростом надкритичности положение точек с максимальной производной ξ'_{\max} (точки перегиба) может смещаться от границ $\pm l$ в глубину $2D$ системы. Амплитуда ξ_p , отвечающая этим точкам, находится, как и выше, из соотношения (6). Что касается критического значения V_{cr} , то в общем случае оно должно определяться из анализа зависимости $\xi(0)$ от параметров задачи. Решая уравнения (1), (2), находим требуемую зависимость в следующем виде:

$$\int_{\xi_0}^0 \frac{d\xi}{\{0,5\kappa^2(\xi^2 - \xi_0^2) + v^2[1/(d + \xi_0) - 1/(d + \xi)]\}^{1/2}} = \sqrt{2}l, \quad (12)$$

где v определяется из (8).

Несложно показать, что при $l \rightarrow \infty$ величина $\xi(0)$ принимает значение, следующее из (4). Если же l конечно, то возникает зависимость $\xi(0)$ от l , определение которой возможно лишь численно (см. ниже).

Зная $\xi(0)$, нетрудно рассчитать $\xi(x)$:

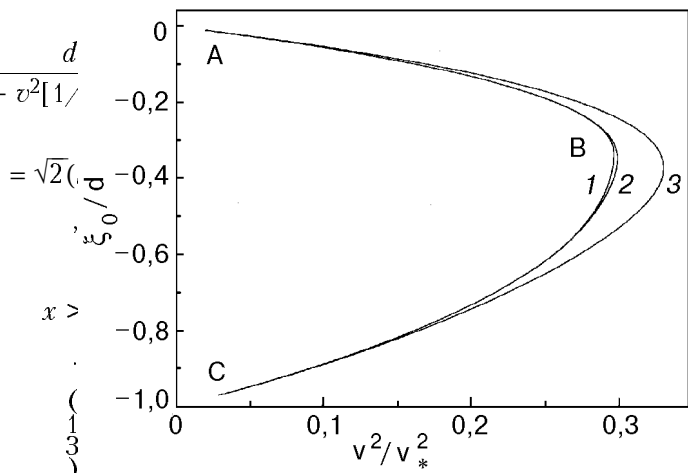


Рис. 2. Максимальная деформация $\xi(0)/d$ толщины пленки как функция безразмерного электрического потенциала V/V_* , следующая из (12), для разных значений параметра l/d . Кривым 1, 2, 3 отвечают соответственно $l/d = 10; 5; 2$. Точки A, B, C маркируют стабильные (AB) и метастабильные (BC) области на изображенных зависимостях.

Д
е
ние $\xi(0)$ (12) в функции от v для разных l представлено на рис. 2. Анализ этих зависимостей дает возможность определить поведение $V_{cr}(l)$ (см. рис. 3). На рис. 4 содержится также информация о $\xi(x)$ в (13). Имеет смысл отметить, что, как следует из рис. 4, в устойчивой области $0 < V < V_{cr}$ (участок AB кривой рис. 2) утверждение об отсутствии точек перегиба (6) на координатной зависимости деформации пленки является универсальным.

5. Специального рассмотрения заслуживает область BC на рис. 2. Эта область является нефизичной, так как начиная с малых значений V невозможно «проникнуть» на линию BC непрерывным образом. Однако если проследить за развитием событий после потери пленкой устойчивости, то можно надеяться на следующий сценарий. Пробой означает уход заряженных частиц с поверхности жидкой пленки на

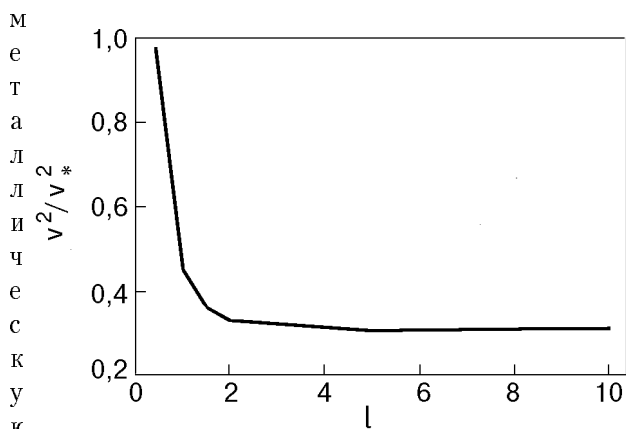


Рис. 3. Зависимость критического поля V_c^2/V_*^2 от размеров пленки вдоль плоскости подложки.

дложку. Если подвижность зарядов в жидкости достаточно мала, то сразу после пробоя вакуумный промежуток над пленкой жидкости перестает быть экранированным (новые заряды не успевают добраться до пленки). Разность потенциалов V , полностью сосредоточенная перед пробоем на пленке жидкости, перераспределяется на весь интервал h (рис. 1, a). Лишь часть ее $\delta V \ll V$ (в меру остаточного поверхностного заряда) продолжает оказывать

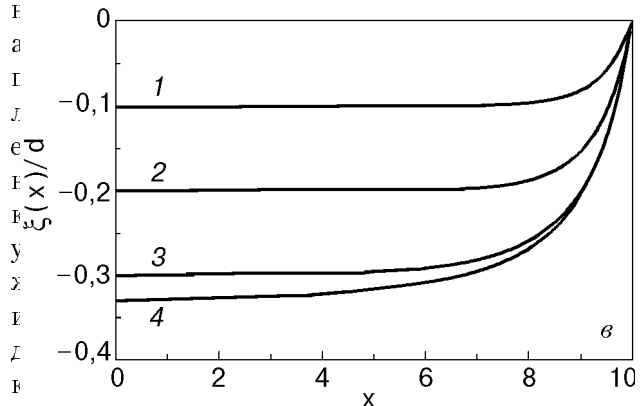
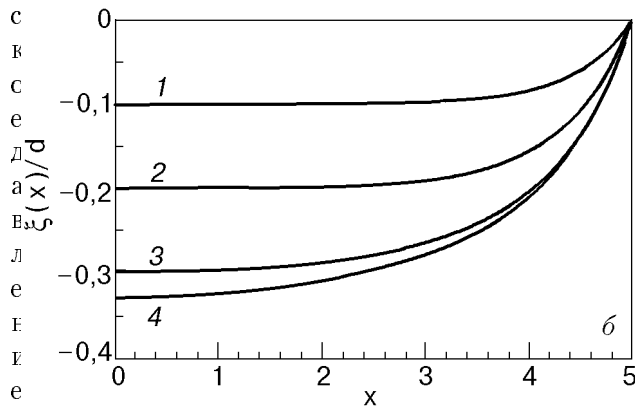
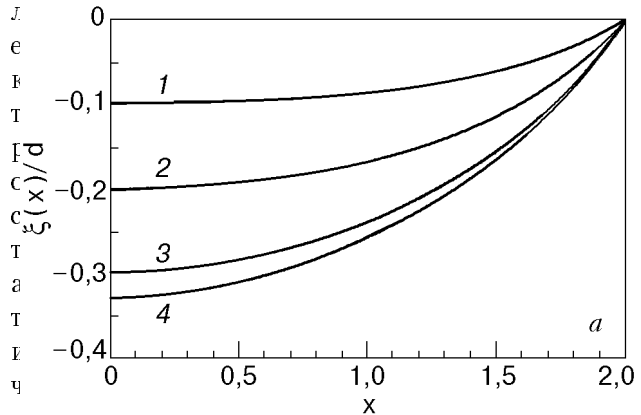


Рис. 4. Деформация $\xi(x)/d$, рассчитанная по (13) для разных V/V_* и l/d на стабильном участке AB на кривой рис. 2. Варианты a, б, в, получены соответственно для отношений $l/d = 10; 5; 2$. Кривые 1-4 на каждом из этих рисунков отвечают различным значениям параметра V/V_* при его монотонном увеличении.

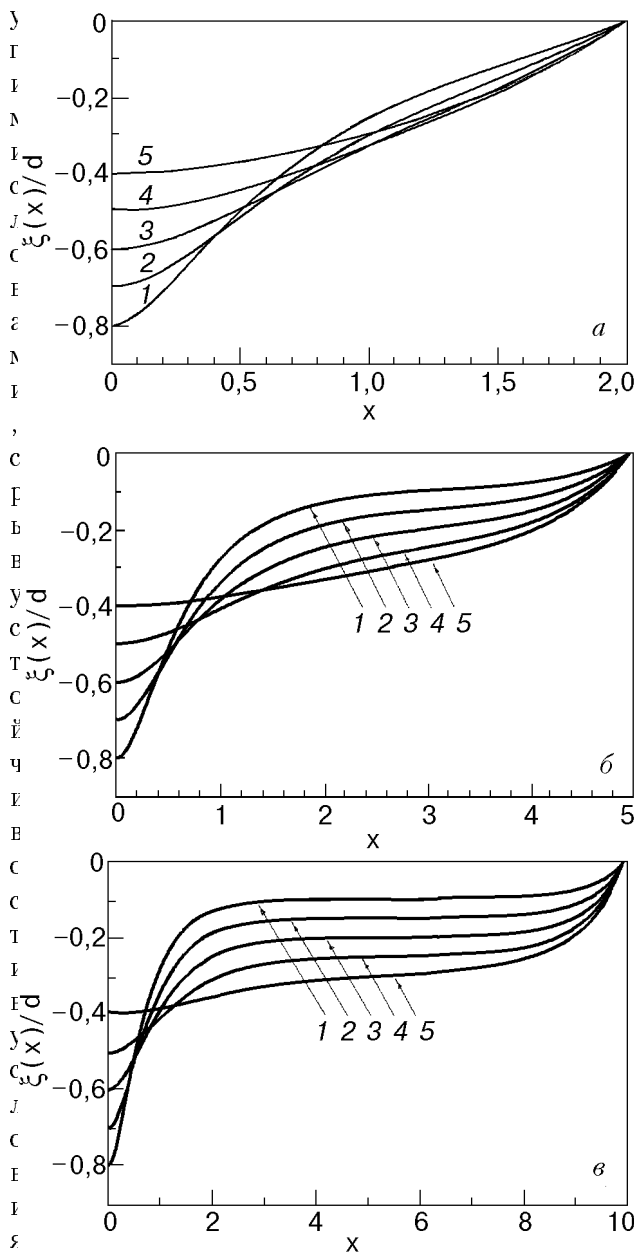


Рис. 5. Деформация $\xi(x)/d$, рассчитанная по (13) для разных V/V_* и l/d на метастабильном участке BC кривой на рис. 2. Варианты $a, б, в$, получены соответственно для отношений 2; 5; 10. Кривые 1–5 на каждом из этих рисунков отвечают различным значениям параметра V/V_* при его монотонном уменьшении.

аженных на рис. 1, a , с источником на верхней металлической пластине автоматически приводит систему к одному из состояний на линии BC (рис. 2). Если при этом еще и уменьшить немного исходную разность потенциалов V , то можно надеяться на стабилизацию задачи вдоль линии BC на рис. 2.

Учитывая сказанное, приведем (в дополнение к данным на рис. 4) решение задачи о деформации пленки жидкости на линии BC

(рис. 5). Характерной особенностью этой деформации является обратный ход величины деформации в зависимости от разности потенциалов V и появление точек перегиба на зависимости $\xi(x)$.

6. Случай антипленки, реально исследованный в [12], не требует специальных выкладок; следует только переместить начало координат на верхний электрод и направить ось Oz вертикально вниз (см. рис. 1, $б$). После этого задача об антипленке сводится к пленочной.

Деформация цилиндрически-симметричной пленки

Пусть теперь деформация поверхности пленки цилиндрически симметрична. Спрашивается, приведут ли формальные изменения в структуре уравнения равновесия (1) к новым физическим следствиям, в частности к появлению точек перегиба на устойчивом участке AB на рис. 2? Ответ заранее не очевиден, так как в данном случае отсутствует эквивалентность определений (5), (6).

Итак, вместо (1) имеем

$$\rho g \xi - \alpha \frac{\xi'' + \xi'/r}{[1 + (\xi')^2]^{3/2}} + \frac{V^2}{8\pi(d + \xi)^2} = 0, \quad (14)$$

$$0 \leq r \leq R,$$

$$\xi(r = R) = 0, \quad (15)$$

$$\xi'' = d^2 \xi / dr^2, \quad \xi' = d \xi / dr.$$

Здесь, как и выше, $\xi(r)$ — деформация пленки под влиянием совокупности сил, действующих на ее поверхность: гравитации, поверхностного натяжения, сил электрического происхождения, пропорциональных разности потенциалов V между заряженной поверхностью гелия и металлической подложкой ($\xi(r) \rightarrow 0$ в случае $V \rightarrow 0$); ρ и g — плотность жидкости и ускорение силы тяжести; α — поверхностное натяжение; d — равновесная толщина пленки при $V \rightarrow 0$; R — размеры пленки в направлении r . На периметре пленки, согласно (15), деформация поддерживается равной нулю.

Приступая к анализу решения уравнения (14), запишем это уравнение в центральной части пленки:

$$\rho g \xi(0) - 2\alpha \xi''(0) + \frac{V^2}{8\pi(d + \xi(0))^2} = 0. \quad (16)$$

При этом использовано предположение о поведении $\xi(r)$ в окрестности начала координат:

$$\xi(r) \equiv \xi(0) + \xi''(0)r^2/2. \quad (17)$$

Что касается точки перегиба r_p на профиле $\xi(r)$, то она по-прежнему определена требованием

$$\xi''(r_p) = 0, \quad (18)$$

и, следовательно, с учетом (14)

$$\rho g \xi(r_p) - \alpha \frac{\xi'(r_p)/r_p}{[1 + \xi'^2(r_p)]^{3/2}} + \frac{V^2}{8\pi(d + \xi(r_p))^2} = 0. \quad (19)$$

Кроме того, очевидно, что должно выполняться условие

$$|\xi(r_p)| < |\xi(0)|. \quad (20)$$

Для дальнейших рассуждений важны знаки $\xi''(0)$ и $\xi'(r_p)$. По смыслу,

$$\xi'(r_p) > 0, \quad \xi''(0) > 0 \quad (21)$$

и

$$\xi'(r_p) \equiv \xi''(0)r_p. \quad (22)$$

Комбинируя теперь (16) и (19), получаем

$$\begin{aligned} & \alpha \xi''(0) \left[2 - \frac{1}{[1 + (\xi'(r_p))^2]^{3/2}} \right] = \\ & = \frac{V^2}{8\pi} \left[\frac{1}{(d + \xi(0))^2} - \frac{1}{(d + \xi(r_p))^2} \right] - \rho g [\xi(0) - \xi(r_p)]. \end{aligned} \quad (23)$$

Левая часть (23) положительна. Знак правой части определяется вкладами выражений в двух квадратных скобках. Учитывая (20), нетрудно видеть, что величина в первой квадратной скобке положительна, а во второй отрицательна. Другими словами, оба вклада в правую часть (23) положительны. Следовательно, в цилиндрически-симметричном случае возможно появление точки перегиба на зависимости $\xi(r)$ даже для участка AB (рис. 4).

Заключение

Задача о деформации и потере устойчивости заряженной пленки на металлической подложке исследована достаточно подробно в одномерном приближении. Здесь представлена полная картина деформации пленки гелия, включая определение критических параметров и их зависимости от толщины пленки и ее размеров вдоль подложки. Отмечено отсутствие точек

перегиба на профиле статической деформации пленки во всем интервале AB (см. рис. 2). Кроме того, обращается внимание на возможность стабилизации состояний пленки на участке BC на рис. 2, считающихся обычно нереализуемыми.

Нелинейное радиально-симметричное уравнение (14) не удается решить аналитически. Тем не менее имеются несколько точных утверждений, позволяющих провести экспериментальную проверку. В самом деле, доступны для определения следующие величины: $\xi(0)$; $\xi(r_p)$; r_p ; $d\xi(r_p)/dr$.

Эти параметры не являются независимыми. Подставляя их, например, в (22), (23), можно проверить, удовлетворяют ли они этим соотношениям. Наиболее интересным предсказанием является, конечно, сам факт наличия точки перегиба на профиле $\xi(r)$ в цилиндрически-симметричном устойчивом состоянии (14).

Работа выполнена при поддержке Программы NASA RSA, Project TM 17.

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Гостехиздат (1957).
2. Л. П. Горьков, Д. М. Черникова, *Письма в ЖЭТФ* (в печати).
3. В. Б. Шикин, Ю. П. Монарха, *Двумерные заряженные системы в гелии*, Наука (1989).
4. Л. П. Горьков, Д. М. Черникова, *ДАН СССР* **228**, 829 (1976).
5. В. И. Мельников, С. В. Мешков, *Письма в ЖЭТФ* **33**, 222 (1981).
6. M. Wanner and P. Leiderer, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 315 (1979).
7. P. Leiderer and M. Wanner, *Phys. Lett.* **A73**, 1869 (1979).
8. R. W. Giannetta and H. Ikezi, *Surf. Sci.* **113**, 412 (1982).
9. А. П. Володин, В. С. Эдельман, *Письма в ЖЭТФ* **37**, 8 (1983).
10. Д. М. Черникова, *ФНТ* **2**, 1374 (1976).
11. А. П. Володин, В. С. Эдельман, *Письма в ЖЭТФ* **26**, 707 (1977).
12. А. Левченко, Е. Теске, Г. Колмаков, П. Лейдерер, Л. Межов-Деглин, В. Шикин, *Письма в ЖЭТФ* **65**, 547 (1997).

On stability of a restricted charged helium film with a metal substrate

V. B. Shikin and E. V. Lebedeva

The peculiarities of the problem on stability of a charged He film surface of limited sizes with a metal substrate are considered. The dependence of critical parameters of instability on film sizes in its plane are found. A method for observing metastable states of the charged liquid film is proposed.