Физика низких температур, 1998, т. 24, № 4, с. 291–298

О бесстолкновительном механизме затухания нулевого звука в нормальной ферми-жидкости

Ю. В. Слюсаренко

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
Украина, г. Харьков, 310108, ул. Академическая, 1
E-mail: slusarenko@kipt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 8 октября 1997 г., после переработки 18 ноября 1997 г.

Показана возможность реализации бесстолкновительного механизма (механизм Ландау) затухания долгоживущих нулевых колебаний в нормальной ферми-жидкости. Получены выражения для коэффициентов затухания нулевого звука в простой модели. Рассмотрены предельные случаи больших и малых амплитуд взаимодействия частиц.

Показано можливість реалізації беззіткневого механізму (механізм Ландау) згасання довгоіснуючих нульових коливань в нормальній фермі-рідині. Одержано вирази для коефіцієнтів згасання нульового звуку в простій моделі. Розглянуто крайні випадки великих та малих амплітуд взаємодії частинок.

PACS: **05.20.**—y, 05.30.Fk

Введение

О возможности существования специфических коллективных мод в нормальных ферми-жидкостях сообщалось в основополагающих работах Ландау и Силина [1–4]. Симметричная продольная мода, единственная, связанная с флуктуациями плотности нормальной ферми-жидкости, представляет собой высокочастотный аналог обычного звука, вследствие чего и была названа Ландау «нулевым звуком». Затухание нулевого звука обусловливалось «размытием» равновесной функции распределения квазичастиц, например, за счет столкновений. Учет такого «размытия» приводит к тому, что коэффициент затухания нулевого звука γ пропорционален квадрату отношения температуры T к энергии Ферми ε_F (см., например, [5,6]), т.е. $\gamma \sim (T/\varepsilon_F)^2$. Отсюда следует в соответствии с одним из основных положений теории нормальной ферми-жидкости ($(T/\varepsilon_F) << 1$), что нулевые колебания являются долгоживущими по отношению к процессам диссипации за счет столкновений квазичастиц. Возможность же существования бесстолкновительного механизма затухания нулевого звука (типа затухания Ландау) некоторыми авторами если и допускалась, то ограничивалась условиями, при которых затухание настолько велико, что теряется смысл самого понятия нулевых колебаний (см. в этой связи, например, [7,8]).

В настоящей работе, посвященной более подробному исследованию вопроса существования бесстолкновительного механизма затухания нулевого звука, будет показана возможность реализации такого механизма без дополнительных (по сравнению с общепринятыми, см. ниже) ограничительных условий существования нулевых долгоживущих колебаний в нормальной ферми-жидкости.

Для упрощения последующего изложения материала напомним некоторые положения кинетической теории нормальной ферми-жидкости.

1. Основные уравнения кинетики нормальной ферми-жидкости

Под нормальной ферми-жидкостью традиционно понимается вырожденная ферми-жидкость, сохраняющая основные свойства систем невзаимодействующих фермионов. Примерами нормальной ферми-жидкости являются ^{3}He выше $4{\cdot}10^{-3}$ K и электроны проводимости в несверхпроводящих металлах при температурах ниже $5{\cdot}10^4$ K [7,8]. Естественно, что в силу большого радиуса кулоновского взаимодействия между фермионами заряженная ферми-жидкость существенно отличается от нейтральной. Однако, принимая во внимание наличие обширной литературы, по данному вопросу, мы, по возможности, не будем специально останавливаться на различии свойств заряженной и нейтральной ферми-жидкостей. Имея в виду цель настоящей работы, выделим характерные свойства, общие для заряженных и нейтральных ферми-жидкостей, главным из которых является зависимость гамильтониана возбуждений ε от функции распределения квазичастиц $n(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$; $\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}; n)$ [1–10]. Не будем также учитывать наличие у частиц спина, что допустимо при решении достаточно широкого круга задач, т.е. считаем, что состояние системы описывается одночастичной функцией распределения $n(x, t)$, $(x \equiv (\mathbf{x}, \mathbf{p}))$, зависящей в момент времени t от координаты $\mathbf{x}$ и импульса $\mathbf{p}$ и не зависящей от спиновых переменных. Как будет видно из дальнейшего изложения, от многих сделанных упрощений в рамках предложенного подхода можно было бы отказаться, что, однако, значительно усложнило бы выкладки и сказалось бы на наглядности результатов.

Отметим, что описание системы при помощи функции распределения, зависящей от координаты и импульса, эквивалентно полуклассическому приближению Вигнера в статистической механике и, как известно, согласуется с принципом неопределенности при рассмотрении макроскопических явлений, когда характерные пространственные масштабы и времена много больше соответствующих атомных параметров. В случае кулоновского взаимодействия между электронами проводимости в металлах характерным малым пространственным масштабом является радиус r_0 экранирования Томаса-Ферми:

$$r_0 = \left(\frac{\varepsilon_F}{6\pi\eta e^2}\right)^{1/2} , \tag{1}$$

где ε_F — граничная энергия на поверхности Ферми; η - плотность электронов; e — величина элементарного заряда. Наличие такого экранирования связывается с существованием инертной положительно заряженной компоненты, т.е. система является квазинейтральной.

Естественно, везде в дальнейшем подразумевается выполнимым главное условие применимости теории нормальной ферми-жидкости

$$\varepsilon_F >> T , \tag{2}$$

где T — температура, измеряемая в энергетическихединицах.

В рамках сделанных предположений кинетическое уравнение, описывающее неравновесное состояние нормальной ферми-жидкости, можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x, t) = \frac{\partial \varepsilon(x; n)}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial n(x, t)}{\partial \mathbf{x}} -$$

$$- \frac{\partial \varepsilon(x; n)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial n(x, t)}{\partial \mathbf{p}} = L(x; n) , \tag{3}$$

где $L(x; n) = L(\mathbf{x}, \mathbf{p}; n(\mathbf{x}', \mathbf{p}'))$ — интеграл столкновений, явный вид которого в настоящей работе не понадобится (см. в этой связи, например, [1–4]). Конкретный вид энергии квазичастицы как функционала функции распределения в феноменологической теории нормальной ферми-жидкости неизвестен. В теории Ландау-Силина [1–4], изучающей низколежащие длинноволновые возбуждения на фоне равновесного распределения

$$n_0(\mathbf{p}) = \left\{\exp\left(\frac{\varepsilon_0(\mathbf{p}) - \mu}{T}\right) + 1\right\}^{-1} \tag{4}$$

($\varepsilon_0(\mathbf{p})$ — энергия, отвечающая равновесному состоянию; μ — химический потенциал), оказывается достаточным введение в рассмотрение функции взаимодействия квазичастиц $f(x, x') = f(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \ \mathbf{p}, \mathbf{p}')$ (амплитуды Ландау). Она является линейной реакцией энергии квазичастицы на малое изменение $\delta n(x, t)$ функции распределения $n(x, t)$:

$$n(x, t) = n_0(\mathbf{p}) + \delta n(x, t) , \tag{5}$$

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \sum_{\mathbf{p}'} \int d\mathbf{x}' \, f(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; \mathbf{p}, \mathbf{p}') \, \delta n(x, t) .$$

Функция $f(x, x')$, представляющая собой вторую вариационную производную от энергии системы по функции распределения, является параметром теории, характеристики которого могут быть определены экспериментально (см., например, [1–4]).

Отметим также, что в соответствии с соотношением (2) равновесное распределение $n_0(\mathbf{p})$ незначительно отличается от «ступенчатого»

$$n_0(\varepsilon) = \theta(\varepsilon_F - \varepsilon) \tag{6}$$

или

$$n_0(p) = \theta(p_F - p) \ , \tag{6a}$$

где $\theta(x)$ — единичная функция Хевисайда; $\varepsilon_F = \varepsilon_0(p_F)$; граничный импульс p_F, как обычно, определяется из соотношения

$$\varepsilon_0(p_F) = \mu \ . \tag{7}$$

Для упрощения считаем, что ферми-поверхность сферическая, а энергия квазичастицы $\varepsilon_0(\mathbf{p})$, отвечающая равновесному распределению (4), зависит только от модуля импульса, $\varepsilon_0(\mathbf{p}) = \varepsilon_0(p)$.

Перейдем теперь непосредственно к изучению затухания Ландау нулевого звука в нормальной ферми-жидкости.

2. Бесстолкновительный механизм затухания долгоживущих нулевых колебаний

Как известно, существование нулевого звука возможно в области частот $\omega\tau_r >> 1$, где τ_r — время релаксации, в связи с чем не будем учитывать столкновения между квазичастицами, а следовательно, и интеграл столкновений в кинетическом уравнении (3). Остановимся на наиболее простой модели нулевого звука [5]. Считаем силы взаимодействия между квазичастицами короткодействующими и полагаем, что функция взаимодействия $f(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; \mathbf{p}, \mathbf{p}')$ не зависит от импульсов:

$$f(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; \mathbf{p}, \mathbf{p}') = f\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \ , \tag{8}$$

где $f = \mathrm{const}$.

В пренебрежении столкновениями линеаризованное с учетом формул (5), (8) кинетическое уравнение (3) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\delta n(x, t) + \frac{\partial \varepsilon_0(p)}{\partial \mathbf{p}}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\,\delta n(x, t) - f\,\frac{\partial n_0(p)}{\partial \mathbf{p}}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \sum_{\mathbf{p}'} \delta n(\mathbf{x}, \mathbf{p}', t) = 0 \ . \tag{9}$$

Переходя в этом уравнении к фурье-образу отклонения $\delta n(x, t)$ функции распределения от равновесной (4)

$$\delta n(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp\,(i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega t)\delta n_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \omega) \ , \tag{10}$$

имеем

$$\delta n_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \omega)(-\omega + \mathbf{v}\mathbf{k}) - f\,\mathbf{k}\,\frac{\partial n_0(p)}{\partial \mathbf{p}} \sum_{\mathbf{p}'} \delta n_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}', \omega) = 0 \ . \tag{11}$$

Решение уравнения (11) можно представить в виде

$$\delta n_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \omega) = -f\,\{\omega - \mathbf{v}\mathbf{k} + i0\}^{-1}\,\mathbf{k}\,\frac{\partial n_0(p)}{\partial \mathbf{p}}\,\delta\varphi_{\mathbf{k}}(\omega) + \delta A(\mathbf{p}, \mathbf{k})\,\delta(\omega - \mathbf{v}\mathbf{k}) \ , \tag{12}$$

где введено обозначение

$$\mathbf{v} \equiv \frac{\partial \varepsilon_0(p)}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \varepsilon_0(p)}{\partial p}\,\frac{\mathbf{p}}{p} \ . \tag{13}$$

Функция $\delta\varphi_{\mathbf{k}}(\omega)$ определяется выражением

$$\delta\varphi_{\mathbf{k}}(\omega) = \sum_{\mathbf{p}} \delta n_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \omega) \ , \tag{14}$$

а $\delta A(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ — произвольные функции, на которые накладывается ограничение, связанное с тем, что величина $\delta n(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$, вычисленная в соответствии с формулой (10), должна быть малой по сравнению с равновесной функцией распределения $n_0(p)$ (см. (4)). Из (10) следует также, что $\delta A(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ должны удовлетворять соотношению

$$\delta A^*(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \delta A(\mathbf{p}, -\mathbf{k}) \ . \tag{15}$$

Весь допустимый набор таких функций обозначим $\delta A_\nu(\mathbf{p}, \mathbf{k})$, где ν — некий символический дискретный или непрерывный параметр, от которого могут зависеть функции $\delta A(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \equiv \delta A_\nu(\mathbf{p}, \mathbf{k})$.

Полученная формула (12) позволяет найти величину $\delta\varphi_{\mathbf{k}}(\omega)$ в терминах функций $\delta A_\nu(\mathbf{p}, \mathbf{k})$:

$$\delta\varphi_{\nu,\mathbf{k}}(\omega) = \delta\tilde{A}_\nu(\mathbf{k}, \omega)\,\tilde{\varepsilon}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) \ , \tag{16}$$

где

$$\delta\tilde{A}_\nu(\mathbf{k}, \omega) \equiv \sum_{\mathbf{p}} \delta A(\mathbf{p}, \mathbf{k})\,\delta(\omega - \mathbf{v}\mathbf{k}) \ , \tag{17}$$

$$\delta\tilde{A}^*_\nu(\mathbf{k}, \omega) = \delta\tilde{A}_\nu(-\mathbf{k}, -\omega) \ .$$

Подставляя далее (16) в (12), получаем следующее выражение для величины $\delta n_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \omega)$:

$$\delta n_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, \omega) = \delta A(\mathbf{p}, \mathbf{k})\,\delta(\omega - \mathbf{v}\mathbf{k}) - f\,\{\omega - \mathbf{v}\mathbf{k} + i0\}^{-1}\,\tilde{\varepsilon}^{-1}(\mathbf{k}, \omega)\,\delta\tilde{A}_\nu(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{k}\,\frac{\partial n_0(p)}{\partial \mathbf{p}} \ . \tag{18}$$

Отметим, что величина $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}, \omega)$ в (16), (18), равная

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k},\,\omega) = \tilde{\varepsilon}^{*}(-\mathbf{k},\,-\omega) = \tilde{\varepsilon}_1(\mathbf{k},\,\omega) + i\tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{k},\,\omega) =$$

$$= 1 + f\,\mathbf{k} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\partial n_0(p)}{\partial \mathbf{p}} \{\omega - \mathbf{vk} + i0\}^{-1}, \qquad (19)$$

в случае заряженной ферми-жидкости представляет собой комплексную диэлектрическую проницаемость системы (см., например, [11]). Как известно, наличие в величине $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k},\omega)$ мнимой добавки означает диссипацию энергии волн, закон дисперсии которых $\omega_0(\mathbf{k})$ должен находиться из уравнения

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k},\,\omega_0(\mathbf{k}) - i\gamma_{\mathbf{k}}) = 0\,. \qquad (20)$$

Причем декремент затухания волны $\gamma_{\mathbf{k}}$ и определяется мнимой частью $\tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{k},\omega)$ величины $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k},\omega)$. По этой причине слабозатухающие колебания в системе

$$|\omega_0(\mathbf{k})| >> \gamma_{\mathbf{k}} \qquad (21)$$

могут существовать только при условии

$$|\tilde{\varepsilon}_1(\mathbf{k},\,\omega)| >> |\tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{k},\,\omega)|\,. \qquad (22)$$

Переходя в (19) от суммирования по $\mathbf{p}$ к интегрированию и воспользовавшись формулой

$$(z + i0)^{-1} = P\,\frac{1}{z} - i\pi\delta(z) \qquad (23)$$

(символ P означает, что при дальнейшем интегрировании берется главное значение), представим величины $\tilde{\varepsilon}_1(\mathbf{k},\omega)$, $\tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{k},\omega)$ в виде

$$\tilde{\varepsilon}_1(\mathbf{k},\,\omega) = \tilde{\varepsilon}_1(k,\,\omega) = 1 + \frac{f}{2\pi^2\hbar^3}\times$$

$$\times \int_0^\infty dp p^2\,\frac{\partial n_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\left\{-1 + \frac{\omega}{2kv}\ln\left|\frac{\omega + kv}{\omega - kv}\right|\right\}, \qquad (24)$$

$$\tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{k},\,\omega) = -\frac{f}{4\pi\hbar^3}\int_0^\infty dp p^2\,\frac{\omega}{kv}\,\frac{\partial n_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\,\theta(kv - |\omega|)\,. \qquad (25)$$

В соответствии с (20)–(22), (24), (25) в предположении малости затухания звука дисперсионное уравнение для определения $\omega_0(k)$ имеет вид

$$\tilde{\varepsilon}_1(k,\,\omega(k)) = 0 \qquad (26)$$

или

$$1 + \frac{f}{2\pi^2\hbar^3}\times$$

$$\times \int_0^\infty dp p^2\,\frac{\partial n_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\left\{-1 + \frac{\omega}{2kv}\ln\left|\frac{\omega + kv}{\omega - kv}\right|\right\} = 0\,, \qquad (26a)$$

а декремент затухания волны дается выражением

$$\gamma_k = \left\{\frac{\partial \tilde{\varepsilon}_1(k,\,\omega)}{\partial \omega}\right\}^{-1}_{\omega=\omega_0} \tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{k},\,\omega_0)\,. \qquad (27)$$

Как известно, в изучаемой системе даже при температуре равной нулю существуют специфические колебания — нулевой звук, который и интересует нас в настоящей работе. Исходя из (26) с учетом формулы (4) легко получить дисперсионное уравнение для нулевого звука

$$1 + F\left[1 - \frac{s}{2}\ln\frac{s+1}{s-1}\right] - \frac{f}{2\pi^2\hbar^3}\times$$

$$\times \int_0^\infty dz(e^z + 1)^{-1}\,\frac{\partial}{\partial z}\left[\chi(\varepsilon_F + Tz) + \chi(\varepsilon_F - Tz)\right] = 0\,, \qquad (28)$$

где введены обозначения

$$F \equiv \frac{fp_F^2}{2\pi^2\hbar^3 v_F}\,,\quad s \equiv \frac{\omega_0}{kv_F} > 1\,, \qquad (29)$$

и в соответствии с (13)

$$v_F = \left.\frac{\partial \varepsilon_0(p)}{\partial p}\right|_{p=p_F}. \qquad (30)$$

В (28) функция

$$\chi(\varepsilon) = \frac{p^2(\varepsilon)}{v(\varepsilon)}\left\{-1 + \frac{sv_F}{2v(\varepsilon)}\ln\left|\frac{s + 1 + (v(\varepsilon) - v_F)/v_F}{s - 1 - (v(\varepsilon) - v_F)/v_F}\right|\right\} \qquad (31)$$

определяет влияние теплового размытия равновесной функции распределения на закон дисперсии нулевого звука. Из выражения (31) для функции $\chi(\varepsilon)$ видно, что вопрос учета этого влияния становится принципиальным только при $s \to 1$, что и будет рассмотрено ниже.

Вычислим теперь коэффициент затухания нулевого звука γ_k. Необходимо найти величину $\tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{k},\omega_0)$, которая, согласно (25), (29), может быть представлена в виде

$$\tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{k},\,\omega_0) = -\,\frac{f s v_F}{4\pi\hbar^3} \int\limits_0^\infty d\varepsilon\, \frac{p^2(\varepsilon)}{v^2(\varepsilon)}\, \frac{\partial n_0(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\, \theta(v(\varepsilon) - s v_F)\ , \tag{32}$$

где зависимость v от ε должна находиться из (13). Наличие в подынтегральном выражении единичной функции Хевисайда приводит к тому, что затухание звука определяется областью температурного «размытия» равновесного распределения с энергией квазичастиц $\varepsilon \ge \bar{\varepsilon} > \varepsilon_F$, где $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_0(\bar{p})$, а величина граничного импульса $\bar{p}$ находится из условия

$$\left.\frac{\partial\varepsilon_0(p)}{\partial p}\right|_{p=\bar{p}} = s v_F = s \left.\frac{\partial\varepsilon_0(p)}{\partial p}\right|_{p=p_F} . \tag{33}$$

Остановимся на вычислении интегралов типа

$$\int\limits_{\bar{\varepsilon}}^\infty d\varepsilon g(\varepsilon)\, \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \left\{\exp\left[(\varepsilon - \mu)/T\right] + 1\right\}^{-1}\ ,\ \ \bar{\varepsilon} > \mu\ . \tag{34}$$

Производя замену переменных $z = (\varepsilon - \mu)/T$, приходим к выражению

$$\int\limits_{(\bar{\varepsilon}-\mu)/T}^\infty dz g(\mu + zT)\, \frac{d}{dz} \left\{e^z + 1\right\}^{-1} . \tag{35}$$

Ясно, что при $(\bar{\varepsilon} - \mu)/T \gtrsim 1$ либо при $0 < (\bar{\varepsilon} - \mu)/T \le 1$ в силу быстрого убывания при $z \to \infty$ функции $(\exp z + 1)^{-1}$ и справедливости неравенства $\mu >> T$ (см. (2), (7)) в полученном выражении возможно разложение функции $g(\mu + zT)$ в ряд по степеням (zT) (естественно, при условии дифференцируемости функции $g(\mu)$ в точке μ). В главном приближении по температуре, согласно (7), (33), (34), имеем

$$\int\limits_{\bar{\varepsilon}}^\infty d\varepsilon g(\varepsilon)\, \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \left\{\exp\left[(\varepsilon - \mu)/T\right] + 1\right\}^{-1} \approx$$

$$\approx -g(\varepsilon_F) \left\{\exp\left(\frac{\bar{\varepsilon} - \varepsilon_F}{T}\right) + 1\right\}^{-1} .$$

В соответствии с этим в том же приближении получаем следующее выражение для величины $\tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{k},\,\omega_0)$:

$$\tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{k},\,\omega_0) \approx \frac{\pi}{2}\, sF \left\{\exp\left(\frac{\bar{\varepsilon} - \varepsilon_F}{T}\right) + 1\right\}^{-1} . \tag{36}$$

Легко также убедиться, что при $(\bar{\varepsilon} - \mu)/T >> 1$ интеграл (34) оценивается формулой

$$\int\limits_{\bar{\varepsilon}}^\infty d\varepsilon g(\varepsilon)\, \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \left\{\exp\left[(\varepsilon - \mu)/T\right] + 1\right\}^{-1} \approx$$

$$\approx -g(\bar{\varepsilon}) \exp\left(-\,\frac{\bar{\varepsilon} - \varepsilon_F}{T}\right),$$

и, следовательно, приходим к выражению для $\tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{k},\,\omega_0)$:

$$\tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{k},\,\omega_0) \approx \frac{\pi}{2}\, sF \left(\frac{p(\varepsilon)}{p_F}\right)^2 \left(\frac{v_F}{v(\varepsilon)}\right)^2 \exp\left(-\,\frac{\bar{\varepsilon} - \varepsilon_F}{T}\right),$$

$$(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_F)/T >> 1\ . \tag{36a}$$

Учитывая далее, что, согласно (24), (26), справедлива формула

$$\left.\frac{\partial\tilde{\varepsilon}_1(k,\,\omega)}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_0} = \frac{(F + 1 - s^2)}{(s^2 - 1)\,\omega_0}\ , \tag{37}$$

декремент затухания γ_k в соответствии с (27) (36), может быть представлен в виде

$$\gamma_k = \omega_0\, \frac{\pi}{2}\, \frac{s(s^2 - 1)F}{(F + 1 - s^2)} \left\{\exp\left(\frac{\bar{\varepsilon} - \varepsilon_F}{T}\right) + 1\right\}^{-1} \tag{38}$$

при $(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_F)/T \gtrsim 1$ либо при $0 < (\bar{\varepsilon} - \varepsilon_F)/T \le 1$ и, согласно (36а), дается выражением

$$\gamma_k = \omega_0\, \frac{\pi}{2}\, \frac{s(s^2 - 1)F}{(F + 1 - s^2)} \left(\frac{p(\bar{\varepsilon})}{p_F}\right)^2 \left(\frac{v_F}{v(\bar{\varepsilon})}\right)^2 \exp\left(-\,\frac{\bar{\varepsilon} - \varepsilon_F}{T}\right) \tag{38a}$$

при $(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_F)/T >> 1$. Напомним, что (38), (38а) получены в предположении $\gamma_k << |\omega_0(k)|$ и справедливы, следовательно, только при выполнении соответственно условий

$$\frac{\pi}{2}\, \frac{s(s^2 - 1)F}{(F + 1 - s^2)} \left\{\exp\left(\frac{\bar{\varepsilon} - \varepsilon_F}{T}\right) + 1\right\}^{-1} << 1 \tag{39}$$

при $(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_F)/T \gtrsim 1$ либо при $0 < (\bar{\varepsilon} - \varepsilon_F)/T \le 1$ и

$$\frac{\pi}{2}\, \frac{s(s^2 - 1)F}{(F + 1 - s^2)} \left(\frac{p(\bar{\varepsilon})}{p_F}\right)^2 \left(\frac{v_F}{v(\bar{\varepsilon})}\right)^2 \exp\left(-\,\frac{\bar{\varepsilon} - \varepsilon_F}{T}\right) << 1 \tag{39a}$$

при $(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_F)/T >> 1$.

Отметим также, что инвариантность выражения (28) относительно замены $s \to -s$ отражает факт наличия двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях с одним и тем же коэффициентом затухания γ_k, определяемым формулами (38), (39). Положительность декремента затухания γ_k легко доказать, исследуя поведение функции $\partial\tilde{\varepsilon}_1(\omega)/\partial\omega|_{\omega=skv_F}$ (см. (37)) с учетом положительности величины $\tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{k}, \omega_0)$. Можно показать, что эта функция при изменении s от 1 до ∞ монотонно убывает, оставаясь положительной, следовательно, коэффициент затухания γ_k положителен.

Получим теперь выражения для коэффициента затухания нулевых колебаний в двух предельных случаях: $s \approx 1$ $(s > 1)$ и $s >> 1$ (см. (29)). В случае $s \gtrsim 1$, реализующемся при значениях амплитуды взаимодействия $0 < F \lesssim 2$, как уже отмечалось, необходимо рассмотреть вопрос о влиянии теплового «размытия» равновесной функции распределения на закон дисперсии нулевого звука. Дисперсионное уравнение (28) при $s \gtrsim 1$ приобретает вид

$$1 + \frac{1}{F} - \frac{1}{2}\ln\frac{2}{s-1} - 2\left[\frac{T}{2\varepsilon_F(s-1)}\right]^2 \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty dz z(e^z+1)^{-1}\left\{1 - z^2\left[\frac{T}{2\varepsilon_F(s-1)}\right]^2\right\}^{-1}, \qquad (40)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Это уравнение из-за своей сложности не может быть решено аналитически в общем виде. Однако с точки зрения поставленной в настоящей работе задачи наиболее интересным представляется случай $T[\varepsilon_F(s-1)]^{-1} \lesssim 1$, когда декремент затухания нулевого звука наиболее существен; тогда интеграл в уравнении (30) может быть заменен асимптотическим рядом

$$1 + \frac{1}{F} - \frac{1}{2}\ln\frac{2}{s-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\pi T}{\varepsilon_F(s-1)}\right]^{2n}\frac{1-2^{1-2n}}{2n}B_n = 0\,, \qquad (41)$$

где B_n — числа Бернулли. Легко видно, что в главном приближении по параметру

$$\frac{\pi T}{\varepsilon_F(s-1)} \lesssim 1 \qquad (42)$$

отклонение величины s от 1 определяется взаимодействием квазичастиц (см. (29)). В связи с этим оно может быть представлено в виде

$$s - 1 \approx \delta s_{\rm int} + \delta s_T\,, \quad \delta s_T < \delta s_{\rm int}\,, \qquad (43)$$

где $\delta s_{\rm int}$ находится из дисперсионного уравнения (41) без учета тепловых добавок:

$$\delta s_{\rm int} \approx 2\exp\{-2(1 + 1/F)\} << 1\,. \qquad (44)$$

Отклонение δS_T, определяющее вклад в закон дисперсии нулевого звука тепловых эффектов, может быть найдено как поправка к $\delta s_{\rm int}$ в теории возмущений по параметру $\pi T(\varepsilon_F\delta s_{\rm int})^{-1} \lesssim 1$:

$$\delta s_T \approx \frac{1}{12F}\left(\frac{\pi T}{\varepsilon_F\delta s_{\rm int}}\right)^2\delta s_{\rm int}\,. \qquad (45)$$

Отметим, что выражения (43)–(45) справедливы при $0 < F \lesssim 2$, когда $0 < \delta s_{\rm int} \lesssim 0{,}1$. Таким образом, при соблюдении условий (42), (43), (45) можно не учитывать тепловые поправки к частоте нулевого звука и выражение (38) для его коэффициента затухания может быть представлено в виде

$$\gamma_k \approx \pi\delta s_{\rm int}\left\{\exp\left[2\pi\frac{\tilde{m}}{m^*}\left(\frac{\partial s_{\rm int}\varepsilon_F}{\pi T}\right)\right] + 1\right\}^{-1}\omega_0\,, \qquad (46)$$

$$\omega_0 = kv_F\,,$$

где учтено, что в силу справедливости соотношения (44) граничная энергия $\bar{\varepsilon}$ (см. (38)) порядка энергии ε_F:

$$\bar{\varepsilon} - \varepsilon_F \approx 2\frac{\tilde{m}}{m^*}\varepsilon_F\delta s_{\rm int}\,, \qquad (47)$$

где

$$\tilde{m}^{-1} \equiv \left(\frac{\partial^2\varepsilon_0(p)}{(\partial p)^2}\right)_{p=p_F} \qquad (48)$$

и эффективная масса m^*, как обычно, определяется формулой

$$p_F = m^* v_F\,. \qquad (49)$$

Следует обратить внимание на то, что в данном приближении, несмотря на соотношение $\varepsilon_F >> T$, выражение в показателе экспоненты в формуле (46) не обязательно велико в силу справедливости (42) и (44). Исходя из выражения (46) с учетом (42) и полагая $m^* \sim \bar{m}$, можно оценить максимальное значение декремента затухания нулевого звука с частотой $\omega_0 = kv_F$:

$$\gamma_k^{\max} \approx \pi \delta s_{\text{int}} \exp(-2\pi)\omega_0 . \qquad (50)$$

В противоположном предельном случае $s >> 1$, соответствующем значениям амплитуд взаимодействия $F >> 1$, влияние тепловых эффектов на закон дисперсии нулевого звука также может быть учтено в теории возмущений по температуре. Однако в нашем случае учет тепловых поправок, как это следует из (28), не имеет принципиального значения и по этой причине рассматриваться в настоящей работе не будет. Из (28) без учета тепловых эффектов имеем

$$s \approx \sqrt{F/3} >> 1 . \qquad (51)$$

Тогда, полагая для простоты закон дисперсии квазичастиц квадратичным

$$\varepsilon_0(p) = \frac{p^2}{2m^*} ,$$

из формулы (38а) после проведения простых выкладок получаем

$$\gamma_k \approx \frac{\pi}{12} kv_F F^2 \exp\left(-\frac{F}{3}\frac{\varepsilon_F}{T}\right). \qquad (52)$$

Из сравнения выражений (38) и (38а), (46) и (52) видно, что зависимость коэффициента затухания нулевых колебаний от обратной температуры может иметь экспоненциальный характер (см. (38а), (52)). Вследствие этого затухание нулевого звука экспоненциально мало, но подобная зависимость декремента затухания от обратной температуры может в ряде случаев и подавляться в силу справедливости соотношений (42), (46). Поэтому можно надеяться, что в физических системах, обладающих свойствами нормальных ферми-жидкостй, могут существовать условия, обеспечивающие преимуществену (по сравнению с гидродинамическим механизмом) реализацию бесстолкновительного механизма затухания нулевых колебаний, несмотря на то, что в случае затухания вследствие столкновений зависимость декремента от температуры имеет степенной характер: $\gamma \sim (T/\varepsilon_F)^2$.

Заключение

Проиллюстрируем последнее утверждение приближенными оценками, а именно, выясним, при каких условиях коэффициент бесстолкновительного затухания нулевого звука может быть порядка коэффициента поглощения за счет столкновений

$$\gamma_k \sim 1/\tau_r , \qquad (53)$$

где τ_r — время релаксации. Отметим, что в соответствии с (38), (38а) это условие эквивалентно требованию, чтобы параметр $(\gamma_k/\omega_0(k)) << 1$, определяющий условия существования долгоживущих нулевых колебаний в нормальной ферми-жидкости, был порядка $(\omega_0(k)\tau_r)^{-1} << 1$, определяющего условие применимости бесстолкновительного приближения. Из формул (38), (38а) следует, что бесстолкновительное поглощение нулевого звука максимально при выполнении (42), что справедливо, как уже отмечалось, в области относительно малых амплитуд Ландау ($0 < F \lesssim 2$). Время релаксации τ_r за счет столкновений квазичастиц в ^{3}He в хорошем согласии с экспериментом [7,8,12–15] может быть оценено формулой

$$\tau_r \sim 10^2 \frac{\hbar}{\varepsilon_F}\left(\frac{\varepsilon_F}{T}\right)^2 .$$

Тогда из соотношения (53) с учетом выражения (46) получаем

$$\pi^3 \exp\left\{-2\pi\left(\frac{\delta s_{\text{int}}\varepsilon_F}{\pi T}\right)\right\} \approx 10^{-2}\delta s_{\text{int}}\left(\frac{\pi T}{\delta s_{\text{int}}\varepsilon_F}\right)\frac{\varepsilon_F}{\hbar\omega_0} ,$$
$$\frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon_F} << 1 . \qquad (54)$$

Для максимального значения коэффициента затухания нулевого звука (см. (50)) имеем

$$\frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon_F} \sim 10^{-2}\frac{\delta s_{\text{int}}}{\pi^3}\exp(2\pi) , \quad \frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon_F} << 1 . \qquad (55)$$

Напомним, что справедливость соотношения

$$\frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon_F} << 1 ,$$

отражающего малость частоты нулевого звука по сравнению с характерными атомными частотами, является обязательным условием применимости кинетической теории нормальной ферми-жидкости.

Соотношения (54), (55) и определяют частоты нулевого звука, для которых бесстолкновительное затухание сравнимо с гидродинамическим затуханием нулевых колебаний.

Следует отметить, что использование существующих экспериментальных данных, касающихся нулевого звука в ^{3}He (см., например, [7,12–16]), для проверки справедливости (53)–(55) вряд ли корректно хотя бы по причине максимально упрощенной модели нулевого звука, рассмотренной в настоящей статье, имеющей основной целью показать принципиальную возможность реализации бесстолкновительного механизма затухания при $s > 1$. Однако из всего изложенного ясно, что бесстолкновительный механизм поглощения нулевого звука будет реализоваться тем лучше, чем ближе система к слабо неидеальному ферми-газу.

Нами уже отмечалось, что в научной литературе, посвященной изучению нормальных ферми-жидкостей, затухание нулевого звука либо обусловливается гидродинамическими механизмами, что выходит за рамки бесстолкновительного приближения, либо допускается существование бесстолкновительного механизма затухания (механизма Ландау), но при $s < 1$, когда это затухание настолько велико, что вряд ли можно вообще говорить о существовании нулевого звука. Последнее обстоятельство, очевидно, связано с тем, что, как следует из выражений (46), (52), строго при $T = 0$ затухание нулевых колебаний отсутствует. При $T \neq 0$ и $\varepsilon_F >> T$ декремент γ_k не может быть получен традиционным разложением по малой температуре (как это происходит при изучении гидродинамического механизма затухания нулевого звука) вследствие неаналитической зависимости коэффициента затухания от температуры.

В заключение мне хотелось бы выразить благодарность академику НАН Украины С. В. Пелетминскому за ценные обсуждения полученных результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (грант № 24/378).

1. Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **30**, 1058 (1957).
2. В. П. Силин, *ЖЭТФ* **33**, 495 (1957).
3. Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **32**, 59 (1957).
4. В. П. Силин, *ЖЭТФ* **35**, 1243 (1958).
5. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1978), ч. 2.
6. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
7. Д. Пайнс, Ф. Нозьер, *Теория квантовых жидкостей*, Мир, Москва (1967).
8. Ф. Платцман, П. Вольф, *Волны и взаимодействия в плазме твердого тела*, Мир, Москва (1975).
9. А. И. Ахиезер, В. В. Красильников, С. В. Пелетминский, А. А. Яценко, *УФН* **163**, 1 (1993).
10. M. Luft and S. V. Peletminsky, *Physica* **A162**, 542 (1990).
11. А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, *Методы статистической физики*, Наука, Москва (1977).
12. J. Gavoret, *Phys. Rev.* **A137**, 731 (1965).
13. A. C. Anderson, J. I. Connoly, and J. C. Wheatley, *Phys. Rev.* **A135**, 910 (1964).
14. B. E. Keen, P. W. Matthews, and J. Wilks, *Phys. Lett.* **5**, 5. (1963).
15. *Helium Three*, W. P. Halperin and L. P. Pitaevskii (eds.), North-Holland, Amsterdam, Oxford, New-York, Tokyo (1990).
16. E. V. Bezuglyi et al., *J. Phys. Cond. Matter* **3**, 7867 (1991).

On collisionless mechanism of the zero-point sound dissipation in the normal Fermi-liquid

Yu. V. Slusarenko

The possibility of collisionless mechanism (Landau mechanism) of the long-living oscillations dissipation in the normal Fermi-liquid was shown. The expressions for the dissipation coefficients of the zero-point sound are obtained in the terms of a simple model. The limiting cases of large and small amplitudes of the particle interactions are considered.