Физика низких температур, 1995, т. 21, № 1, с. 3–23 УДК 536.48;537.6

Газодинамика квазичастиц. II. Кинетические коэффициенты в уравнениях переноса квазичастиц

(Обзор)

А. И. Ахиезер, В. Ф. Алексин, В. Д. Ходусов*

Национальный научный центр. Харьковский физико-технический институт, Украина, 310108, г. Харьков, ул. Академическая, 1

* *Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4*

Статья поступила в редакцию 9 марта 1994 г., после переработки 8 июля 1994 г.

Вычислены кинетические коэффициенты в гидродинамических уравнениях для фононов, магнонов и их смесей. Использованы специальные функции и системы ортогональных полиномов, построенных на основе весовой функции, характерной для статистики Бозе—Эйнштейна.

Обчислено кінетичні коефіцієнти в гідродинамічних рівняннях для фононів, магнонів і їх сумішій. Використано спеціальні функції і системи ортогональних поліномів, побудованих на основі вагової функції, характерної для статистики Бозе—Эйнштейна.

Содержание

1. Специальные функции, используемые в исследованиях газа фононов и магнонов . . . 3
2. Кинетические коэффициенты бинарной смеси газов фононов и магнонов . . . 6
3. Математические методы вычисления кинетических коэффициентов теплопроводности и вязкости . . . 9
4. Кинетические коэффициенты газа фононов в кристаллических диэлектриках . . . 10
5. Кинетические коэффициенты газа магнонов в ферродиэлектриках . 15
6. Кинетические коэффициенты газа магнонов в антиферромагнетиках 19
Заключение . . . 23
Список литературы . . . 23

Данная работа является второй частью обзора «Газодинамика квазичастиц». В первой части обзора, опубликованной в журнале «Физика низких температур» в 1994 г., изложена общая теория газодинамики квазичастиц. Во второй части обзора вычисляются кинетические коэффициенты в гидродинамических уравнениях для фононов, магнонов и их смесей.

1. Специальные функции, используемые в исследованиях газа магнонов и фононов

При построении уравнений гидродинамики квазичастиц необходимо знать термодинамические функции и кинетические коэффициенты. В вычислениях этих величин используются специальные функции, характерные для квазичастиц с определенным законом дисперсии. Если закон дисперсии квазичастиц является неизотропным, то при введении этих специальных функций необходимо предварительно выполнить интегрирование по углам.

В случае фононов в кристаллах интегрирование по углам является громоздким [1]. Поэтому в первой части обзора в разд. 2.1 мы воспользовались моделью приведенного изотропного кристалла, в которой закон дисперсии фононов является изотропным $\omega_v = v_v k$ ($v = l, t$), а специальной функцией является хорошо изученная ζ-функция Римана [2].

В случае магнонов с неизотропным законом дисперсии возникает необходимость вычисления интегралов вида

$$I = \int f\left(\alpha_{ij} k_i k_j\right) d\mathbf{k} ,$$

© А. И. Ахиезер, В. Ф. Алексин, В. Д. Ходусов, 1995

где α_{ij} — тензор неоднородного обменного взаимодействия. Переходя к переменным $x^2 = \alpha_{ij} k_i k_j$ в сферической системе координат в импульсном пространстве, получаем

$$I = \int \frac{dO}{(\alpha_{ij} \kappa_i \kappa_j)^{3/2}} \int_0^\infty f(x)\, x^2 dx\,, \qquad (1)$$

где $\kappa_i = k_i/k$. Интегрирование по углам легко выполнить в системе координат, связанной с главными осями тензора α_{ij}. В результате получим

$$I = \frac{4\pi}{(\alpha_1 \alpha_3 \alpha_3)^{3/2}} \int_0^\infty f(x)\, x^2 dx\,, \qquad (2)$$

где α_1, α_2, α_3 — главные значения тензора α_{ij}. Интегралы

$$\int_0^\infty f(x)\, x^2 dx$$

будут представлены специальными функциями.

Для магнонов в ферродиэлектриках с законом дисперсии $\omega_s = \omega_a + \alpha_{ij} k_i k_j$, рассмотренных в разд. 2.3 первой части обзора, эти функции зависят от двух параметров и определяются рядами либо интегралами вида

$$F(z, \alpha) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\exp(-nz)}{n^\alpha} = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)[\exp(x \pm z)]}\, dx\,, \qquad (3)$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция, $\mathrm{Re}\, z > 0$. В частных случаях $F(z, 0) = (e^z - 1)^{-1}$, $F(z, 1) = -\ln(1 - e^{-z})$. Функция $F(z, \alpha)$ удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$\frac{\partial F(z, \alpha)}{\partial z} = -F(z, \alpha - 1) \qquad (4)$$

и при $\alpha > 0$

$$F(z, \alpha + 1) = \zeta(\alpha + 1) - \int_0^z F(x, \alpha)\, dx\,. \qquad (5)$$

В области малых значений $|z| < 2\pi$ [2]

$$F(z, \alpha) = \Gamma(1 - \alpha)\, z^{\alpha-1} + \sum_{m=0}^\infty \zeta(\alpha - m) \frac{(-z)^m}{m!}\,. \qquad (6)$$

В частности,

$$F(z, 1/2) = \sqrt{\pi/z} + \zeta(1/2) + \frac{1}{2}\frac{z}{2\pi}\zeta(3/2) - \frac{3}{8}\left(\frac{z}{2\pi}\right)^2 \zeta(5/2) + \ldots\,, \qquad (7)$$

$(\zeta(1/2) = -1{,}46038)$,

$$F(z, 1) = -\ln z + \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\zeta(2n)\left(\frac{z}{2\pi}\right)^{2n}\,. \qquad (8)$$

Разложение других функций с дробными и целочисленными значениями легко получить из (7), (8), воспользовавшись рекуррентными соотношениями (4), (5). В области больших значений $\mathrm{Re}\, z \gg 1$ $F(z, \alpha) \approx e^{-z}$. В табл. 1 приведены значения функций $F(z, \alpha)$ для ряда значений z и α.

Наряду с приведенной специальной функцией $F(z, \alpha)$ при рассмотрении предельного случая $x_m = (4\pi \mu_0 M_0)/T \gg 1$ используется также специальная функция вида

$$\mathrm{Fi}(z, \alpha) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} \mathrm{erfc}\, \sqrt{nz}\,, \qquad (9)$$

где

$$\mathrm{erfc}\, z = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

— интеграл ошибок.

Производная по z от функции $\mathrm{Fi}(z, \alpha)$, которая используется при вычислении термодинамических функций, равна

$$\frac{\partial\, \mathrm{Fi}(z, \alpha)}{\partial z} = -\frac{1}{(\pi z)^{1/2}} F(z, \alpha - 1/2)\,. \qquad (10)$$

При малых $|z| < 2\pi$ функция $\mathrm{Fi}(z, \alpha)$ представима рядами, которые легко находятся, если $\alpha > 2$, интегрированием рядов для функции $F(z, \alpha - 1/2)$,

$$\mathrm{Fi}(z, \alpha) = \zeta(\alpha) - \int_0^z \frac{F(x, \alpha - 1/2)}{(\pi x)^{1/2}}\, dx\,. \qquad (11)$$

Функция $\mathrm{Fi}(z, 1)$ имеет логарифмическую особенность при $z = 0$:

$$\mathrm{Fi}(z, 1) = \ln\frac{1}{z} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \ln 2 - \sqrt{z/\pi}\left[2\zeta(1/2) + \frac{1}{3}\frac{z}{2\pi}\zeta(3/2) + \ldots\right]. \qquad (12)$$

При $z \gg 1$

$$\mathrm{Fi}(z, \alpha) \approx \frac{1}{(\pi z)^{1/2}}(e^{-z})\,.$$

Таблица 1

Значения функции $F(z, \alpha)$

z	α											
	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
0	—	—	2,1621	1,6449	1,3415	1,2021	1,1267	1,0823	1,0547	1,0369	1,0252	1,0173
0,05	6,4600	3,0206	1,8923	1,4440	1,2354	1,1254	1,0624	1,0242	0,9998	0,9843	0,9738	0,9668
0,1	4,1653	2,3522	1,6363	1,3112	1,1477	1,0567	1,0029	0,9696	0,9484	0,9345	0,9252	0,9189
0,2	2,5440	1,7078	1,3150	1,1132	1,0015	0,9359	0,8957	0,8702	0,8536	0,8426	0,8351	0,8301
0,3	1,8369	1,3502	1,0996	0,9616	0,8813	0,8325	0,8018	0,7819	0,7688	0,7600	0,7541	0,7500
0,4	1,4232	1,1096	0,9382	0,8393	0,7798	0,7426	0,7188	0,7032	0,6929	0,6859	0,6811	0,6778
0,5	1,1469	0,9328	0,8105	0,7376	0,6926	0,6639	0,6453	0,6230	0,6247	0,6191	0,6153	0,6126
0,7	0,7990	0,6863	0,6193	0,5775	0,5507	0,5332	0,5216	0,5138	0,5085	0,5049	0,5024	0,5006
0,9	0,5838	0,5218	0,4828	0,4577	0,4412	0,4303	0,4229	0,4179	0,4144	0,4120	0,4104	0,4093
1	0,5060	0,4587	0,4284	0,4088	0,3957	0,3870	0,3811	0,3770	0,3743	0,3723	0,3710	0,3701
1,25	0,3627	0,3376	0,3211	0,3102	0,3028	0,2978	0,2943	0,2920	0,2903	0,2892	0,2884	0,2878
1,50	0,2663	0,2525	0,2432	0,2370	0,2327	0,2298	0,2278	0,2264	0,2254	0,2247	0,2243	0,2239
1,75	0,1987	0,1909	0,1860	0,1820	0,1795	0,1778	0,1766	0,1757	0,1752	0,1747	0,1745	0,1743
2,0	0,1499	0,1454	0,1423	0,1402	0,1387	0,1377	0,1370	0,1365	0,1362	0,1359	0,1358	0,1356
2,5	0,0872	0,0857	0,0846	0,0838	0,833	0,830	0,0827	0,0825	0,824	0,823	0,0822	0,0822
3	0,0516	0,0511	0,0507	0,0504	0,0502	0,0501	0,0500	0,0499	0,0499	0,0499	0,0498	0,0498

Для магнонов в антиферромагнетиках типа «ЛП», рассмотренных в первой части обзора в разд. 2.6, с законом дисперсии $\omega_k^{(j)} = (\alpha_{il} k_i k_l + \Delta_j^2)^{1/2}$, где Δ_j — величина щели в спектре магнонов сорта $j (j = a, b)$, вводятся специальные функции $S(n, m; x)$ от трех параметров, которые при $\mathrm{Re}\, x > 0$ определены рядами

$$S(n, m; x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{K_m(px)}{p^n}, \qquad (13)$$

где $K_m(px)$ — модифицированные функции Бесселя.

Рассмотрим некоторые свойства функций $S(n, m; x)$ в случае действительной переменной x и целочисленных значений n и m. Функция $K_m(x) = K_{-m}(x)$, поэтому далее для определенности будем полагать $m \geq 0$. Функции $S(n, m; x)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\frac{d}{dx}\left[x^m S(n, m; x)\right] = -x^m S(n-1, m-1; x);$$
$$\frac{d}{dx}\left[x^{-m} S(n, m; x)\right] = -x^{-m} S(n-1, m+1; x); \qquad (14)$$

$$2mS(n, m; x) =$$
$$= x\left[S(n-1, m+1; x) - S(n-1, m-1; x)\right]. \qquad (15)$$

Эти соотношения получены из рекуррентных соотношений для функции $K_m(x)$. Функции $S(n, m; x)$ обладают рядом примечательных свойств. Эти функции можно разбить на два класса (с четным и нечетным значением суммы $(n+m)$). Из рекуррентных соотношений (14), (15) следует, что, задавая значение какой-либо функции из одного класса, можно, в принципе, с помощью операций дифференцирования и интегрирования по переменной x найти все функции из того же класса. Функции четного класса вида $S(n, n; x)$ представимы интегралами

$$S(n, n; x) =$$
$$= \frac{2^n n!}{(2n)!}\frac{1}{x^n}\int_0^{\infty} \frac{t^{2n}}{\left(x^2+t^2\right)^{1/2}\left[\exp\left((x^2+t^2)^{1/2}\right)-1\right]}\,dt. \qquad (16)$$

Используя рекуррентные соотношения, функции $S(0, 2; x)$; $S(0, 4; x)$; $S(1, 3; x)$ можно свести к линейным комбинациям функций $S(n, n; z)$

$$S(0, 2; x) = S(0, 0; x) + \frac{2}{x} S(1, 1; x);$$
$$S(0, 4; x) = S(0, 0; x) + \frac{8}{x} S(1, 1; x) + \frac{24}{x^2} S(2, 2; x); \qquad (17)$$
$$S(1, 3; x) = S(1, 1; x) + \frac{4}{x} S(2, 2; x).$$

В табл. 2 приведены значения функций $S(0, 0; x)$; $S(1, 1; x)$; $S(2, 2; x)$. Термодинамические функции для АФМ «ЛП», которые приведены в первой части обзора (разд. 2.6), принадлежат к функциям четного класса.

Функции с нечетным значением $(n+m)$ будут использоваться в разд. 6 при вычислении кинети-

ческих коэффициентов первой вязкости. Эти функции можно свести к функциям $S(n, n+1; x)$, определяемым интегралами

$$S(n, n+1; x) = \frac{2^n n!}{(2n)!}\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^\infty \frac{t^{2n}}{\exp\left((x^2+t^2)^{1/2}\right)-1}\,dt. \tag{18}$$

Предельные значения функций $S(n, m; x)$ при $x \to \infty$ равны

$$\lim_{x\to\infty} S(n, m; x) = K_m(x) + O(e^{-2x}); \tag{19}$$

$$\lim_{x\to\infty} K_m(x) \approx \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}\left(1 + O(1/x)\right).$$

при $x \to 0$ и $m, n \geq 1$

$$\lim_{x\to 0} x^m S(n, m; x) = 2^{m-1}(m-1)!\,\zeta(n+m). \tag{20}$$

Выражения для функций $S(n, m; x)$ в виде быстро сходящихся рядов при $x < 2\pi$ можно получить из рядов для функций $S(0, 0; x)$ и $S(0, 1; x)$, воспользовавшись рекуррентным соотношением и формулой

Таблица 2

Значения функций $S(n, n; x)$ $(n = 0, 1, 2)$

x	$(2x/\pi)\,S(0, 0; x)$	$xS(1, 1; x)$	$x^2S(2, 2; x)$
0,0	1,00000	1,64493	2,16465
0,1	0,86451	1,49975	2,15691
0,2	0,77312	1,37141	2,13551
0,3	0,69832	1,25601	2,10278
0,4	0,63426	1.15147	2,06077
0,5	0,57812	1,05634	2,01121
0,6	0,52825	0,96952	1,95560
0,7	0,48354	0,89011	1,89527
0,8	0,44319	0,81738	1,83134
0,9	0,40661	0,75069	1,76479
1,0	0,37332	0,68947	1,69648
1,2	0,31516	0,58160	1,55735
1,4	0,26638	0,49047	1,41862
1,6	0,22525	0,41343	1,28361
1,8	0,19048	0,34828	1,15465
2,0	0,16102	0,293196	1,03325
2,5	0,10553	0,19002	0,76766
3,0	0,06883	0,12254	0,55446

$$x^{m+1}S(n+1, m+1; x) =$$

$$= 2^m m!\,\zeta(n+m+2) - \int_0^x t^{m+1}S(n, m; t)dt. \tag{21}$$

Ряды для функций $S(0, 0; x)$ и $S(0, 1; x)$ имеют вид

$$S(0, 0; x) = \frac{\pi}{2x} + \frac{1}{2}\ln\frac{\gamma}{4\pi} -$$

$$-\frac{1}{4}\zeta(3)\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \frac{3}{4}\zeta(5)\left(\frac{x}{2\pi}\right)^4 + \ldots. \tag{22}$$

$$S(0, 1; x) = \frac{1}{x}\ln\frac{2}{x} + \frac{x}{24}\left(\ln\frac{4\pi}{x} + C_2 - \frac{1}{2}\right) +$$

$$+\frac{x^3}{2^6 5!}\left(\ln\frac{4\pi}{x} + C_4 - \frac{7}{2}\right) + \ldots, \tag{23}$$

где $\ln\gamma = 0{,}57721566$ — постоянная Эйлера; C_{2n} — постоянные, равные

$$C_{2n} = \frac{1}{\zeta(2n)}\sum_{p=2}^{\infty}\frac{\ln p}{p^{2n}}$$

$$\left(C_2 = 0{,}569962;\ C_4 = 6{,}36698\cdot 10^{-2}\ldots\right).$$

2. Кинетические коэффициенты бинарной смеси газов фононов и магнонов

Вычислим кинетические коэффициенты бинарной смеси газов фононов и магнонов, для которых нет необходимости решать кинетические уравнения относительно отклонения функции распределения от равновесного значения. К этим коэффициентам относятся ν_{ss}, ν_{sv}, ζ_{sv}, входящие в источник числа магнонов (1.88)*

$$I_s = -T^{-1}\delta\mu_s\left(\nu_{ss} + \nu_{sv}\right) - \left(\theta_s - \theta_v\right)\zeta_{sv}, \tag{24}$$

коэффициенты обмена энергий γ_{sv} и взаимного трения $r^{(sv)}$ (1.80) между газами магнонов и фононов. Предельные значения этих коэффициентов и сравнение их вкладов в процессы рассмотрены в первой части обзора в разд. 2.5.

Число столкновений трех магнонов в единице объема ν_{ss}, приводящее к изменению числа магнонов, определяется выражением (1.89)

$$\nu_{ss} = \sum_{k_1 k_2 k_3} W\left(1_s, 2_s; 3_s\right),$$

* Ссылки на формулы, в нумерации которых указан номер главы, относятся к первой части обзора [*ФНТ*, 20, 1199 (1994)].

в котором вероятность столкновений $W(1_s, 2_s; 3_s)$ выражается через матричные элементы (2.112).

Переходя к интегрированию по k_1, k_2 и телесным углам dO_1, dO_2 (анизотропией тензора α_{il} в (2.84) пренебрегаем, положив $\alpha_{il} = \Theta_c a^2 \delta_{il}$, что не изменяет порядок величин), находим

$$\nu_{ss} = \frac{1}{180\pi^3} \frac{\Theta_C}{s\hbar a^3} \left(\frac{4\pi \mu_0 M_0}{\Theta_C}\right)^2 \left(\frac{T}{\Theta_C}\right)^2 I(x_a), \quad (25)$$

где $I(x_a)$ — интеграл вида

$$I(x_a) = \int_0^\infty \operatorname{cth} \frac{x + x_a}{2} \frac{dx}{\exp\left((x + x_a)^2/x\right) - 1}. \quad (26)$$

В предельных случаях этот интеграл равен

$$I(x_a) = \begin{cases} x_a^{-1} + \ln x_a + \frac{3}{2} + O(x_a); & x_a << 1, \\ \frac{\sqrt{\pi}}{x_a^{3/2}} e^{-4x_a}\left(1 + O(x_a^{-1})\right); & x_a >> 1. \end{cases} \quad (27)$$

Его значения равны 10^2 при $x_a = 10^{-2}$, 6,75 при $x_a = 10^{-1}$, 0,047 при $x_a = 1$. С ростом x_a величина интеграла экспоненциально убывает как $\exp(-4x_a)$.

При вычислении числа столкновений магнонов в единице объема, приводящих к слиянию магнонов и распаду фононов на два магнона, воспользуемся выражением (1.90) и матричным элементом (2.119). В результате интегрирования по k и суммирования по поляризациям получаем

$$\nu_{sl} = (\delta')^2 A_l I_0(x_a, y_l); \quad \bar{\nu}_{st} = \frac{3}{2}(\delta')^2 A_t I_0(x_a, y_t);$$

$$A_{l,t} = \frac{1}{90\pi^5} \frac{\Theta_{l,t}}{\hbar a^3} \left(\frac{\Theta_{l,t}}{m v_{l,t}^2}\right) \left(\frac{T}{\Theta_{l,t}}\right)^4, \quad (28)$$

$\Theta_{l,t} = \hbar w_{l,t}/a$; $y_{l,t} = \Theta_{l,t}/2(T\Theta_C)^{1/2}$; $I_0(x_a, y)$ — частный случай функции $I_n(x_a, y)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), которая равна нулю, если $y^2 \le x_a$, и интегралу следующего вида, если $y^2 \ge x_a$:

$$I_n(x_a, y) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^{3+n} e^x}{(e^x - 1)^2} \times$$

$$\times \left\{z + \frac{2}{x} \ln \frac{1 - \exp(-x(1+z)/2)}{1 - \exp(-x(1-z)/2)}\right\} dx, \quad (29)$$

где

$$x_{1,2} = 4y\left[y \mp (y^2 - x_a)^{1/2}\right];$$

$$z = \frac{1}{4y^2}\left[(x - x_1)(x_2 - x)\right]^{1/2}.$$

Предельные значения $I_0(x_a, y)$ равны

$$I_0 = \begin{cases} 8\pi y^2\left(1 - \sqrt{x_a}/y\right); & x_a \lesssim y^2 << 1 \\ 15{,}8/y; & x_a << 1;\ y >> 1 \\ \frac{\sqrt{2\pi}}{4y} x_1^3 e^{-x_1}\left(1 - x_a/y^2\right)^{1/4}; & y^2 > x_a >> 1;\ (y^2 - x_a)^{1/2} >> \frac{1}{4y}. \end{cases} \quad (30)$$

В выражение (1.95), определяющее релаксацию химического потенциала, входят кинетические коэффициенты ζ_{sv} и γ_{sv}. Воспользовавшись выражениями (1.90) и (1.91) для этих коэффициентов, получаем

$$\zeta_{sv} = \frac{2}{T} \sum_{1_v, k_2, k_3} \omega_{1v} W\left(1_v; 2_s, 3_s\right); \quad (31)$$

$$\gamma_{sv} = \gamma_{sv}' + \gamma_{sv}'', \quad (32)$$

где

$$\gamma_{sv}' = \frac{2}{T^2} \sum_{1_v, k_2, k_3} \omega_{1v}^2 W\left(1_v, 2_s; 3_s\right); \quad (33)$$

$$\gamma_{sv}'' = T^{-2} \sum_{1_v, k_2, k_3} \omega_{1v}^2 W\left(1_v; 2_s, 3_s\right). \quad (34)$$

Величину ζ_{sv} и второе слагаемое в γ_{sv} в выражении (32) можно вычислить аналогично определению коэффициента ν_{sv}. В результате получим

$$\zeta_{sl} = \frac{(\delta')^2}{2} A_l I_1(x_a, y_l); \quad \bar{\zeta}_{st} = \frac{1}{3}(\delta')^2 A_t I_1(x_a, y_t); \quad (35)$$

$$\gamma_{sl}'' = \frac{1}{4}(\delta')^2 A_l I_2(x_a, y_l); \quad \bar{\gamma}_{st}'' = \frac{1}{6}(\delta')^2 A_t I_2(x_a, y_t), \quad (36)$$

где $I_n(x_a, y)$ — интегралы вида (29) с $n = 1, 2$. Предельные значения этих интегралов равны

$$I_1 = \begin{cases} 32y^4\pi\left(1 - \sqrt{x_a}/y\right); & x_a \le y^2 << 1, \\ 58{,}1/y; & x_a << 1;\ y >> 1, \\ \dfrac{\sqrt{2\pi}}{4y} x_1^4 e^{-x_1}\left(1 - x_a/y^2\right)^{1/4}; & y^2 > x_a >> 1;\ (y^2 - x_a)^{1/2} >> \dfrac{1}{4y}, \end{cases} \tag{37}$$

$$I_2 = \begin{cases} 128y^6\pi\left(1 + x_a^{1/2}/2y - x_a/2y^2\right)\left(1 - x_a^{1/2}/y\right); & x_a \le y^2 << 1, \\ 171/y; & x_a << 1;\ y >> 1, \\ \dfrac{\sqrt{2\pi}}{4y} x_1^5 e^{-x_1}\left(1 - x_a/y^2\right)^{1/4}; & y^2 >> x_a >> 1;\ (y^2 - x_a)^{1/2} >> \dfrac{1}{4y}. \end{cases} \tag{38}$$

При вычислении γ'_{sv} подставим в (33) смешанный матричный элемент обменного и релятивистского магнон-фононного взаимодействий (2.120), проинтегрируем по k и телесным углам dO_1, dO_2 и просуммируем по поляризации e_1. В результате получим

$$\gamma'_{sl} = B_l\left[\frac{2}{3\pi^2}(\delta')^2\left(\frac{\Theta_C}{T}\right)^2 I_{10}(x_a, y_l) - \frac{2}{3\pi}\delta'\frac{\Theta_C}{T}\left(I_{20}(x_a, y_l)\beta'' + (\beta' + \beta'')\, I_{11}(x_a, y_l)\right) + \right.$$
$$\left. + (\beta'')^2 I_{30}(x_a, y_l) + 2(\beta' + \beta'')\beta'' I_{21}(x_a, y_l) + (\beta' + \beta'')^2 I_{12}(x_a, y_l)\right], \tag{39}$$

$$\overline{\gamma}_{st}{}' = B_t\left[\frac{5}{6\pi^2}(\delta')^2\left(\frac{\Theta_C}{T}\right)^2 I_{10}(x_a, y_t) + \frac{1}{3\pi}\beta'\delta'\frac{\Theta_C}{T} I_{1\frac{1}{2}}(x_a, y_t) + (\beta')^2 I_{20}(x_a, y_t)\right], \tag{40}$$

где

$$B_{l,t} = \frac{\Theta_C}{16\pi^3\hbar a^3}\frac{\Theta_{l,t}}{m v_l^2}\left(\frac{T}{\Theta_{l,t}}\right)^3\left(\frac{T}{\Theta_C}\right)^3; \tag{41}$$

$I_{mn}(x_a, y)$ — функции двух параметров, представимые интегралами вида

$$I_{mn} = n!\int_0^\infty \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2}\left(y^2 - x^2/16y^2\right)^m\left[F\left(x_a + (y - x/4y)^2; n\right) - F\left(x_a + (y + x/4y)^2; n\right)\right]dx, \tag{42}$$

$$I_{n1/2} = n!\int_0^\infty \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2}\left(\sqrt{x + (y + x/4y)^2} - y - \frac{x}{4y}\right)\left[F\left(x_a + (y - x/4y)^2; n\right) - F\left(x_a + (y + x/4y)^2; n\right)\right]dx, \tag{43}$$

(n и m — целые числа).

Асимптотические представления этих интегралов имеют вид

при $y \to \infty$

$$I_{12} = y^2 I_{21} = y^2 I_{11} = \frac{1}{2} y^4 I_{30} = y^4 I_{10} = 2y^5 I_{1\frac{1}{2}} = 771{,}47 y^4 \exp\left(-x_a - y^2\right);$$

при $y \to 0$ (44)

$$I_{nm}(x_a, y) = (-1)^m\, 128 y^4\, F\left(x_a; n + m + 1\right);\quad I_{n1/2}(x_a, y) = 24 y^4\, F\left(x_a; 5/2\right).$$

Если газ фононов рассматривать в модели приведенного изотропного кристалла, то коэффициент взаимного трения газа фононов и магнонов в бинарной смеси $r^{(sv)}$ связан с γ_{sv} простым соотношением

$$r^{(sv)} = \frac{T}{v_l^2}\left(\gamma_{sl} + \beta^{-2}\overline{\gamma}_{st}\right). \tag{45}$$

3. Математические методы вычисления кинетических коэффициентов теплопроводности и вязкости

Для нахождения кинетических коэффициентов в газе квазичастиц воспользуемся методом аналогичным методу Энского—Чепмена [3] с применением специально построенных ортогональных полиномов. Запишем линеаризованное кинетическое уравнение в следующем виде:

$$\overline{N}_p\left(\overline{N}_p + 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{g}\nabla\right) z_p =$$

$$= \nu_0^{(3)} L_p^{(3)}\{\psi\} + \nu_0^{(4)} L_p^{(4)}\{\psi\}\,, \qquad (46)$$

где

$$\nu_0^{(3)} L_p^{(3)}\{\psi\} \equiv \left(\dot{N}_p^{(3)}\right)_N\,;\quad \nu_0^{(4)} L_p^{(4)}\{\psi\} \equiv \left(\dot{N}_p^{(4)}\right)_N$$

— линеаризованные относительно ψ_p интегралы столкновений (1.8), (1.9) для нормальных процессов; $\overline{N}_p = (e^{\omega_p/T} - 1)^{-1}$ — термодинамически равновесная функция распределения; $\nu_0^{(3,4)}$ — характерные частоты столкновений для квазичастиц, z_p определено (1.23). Поскольку нас интересуют процессы, в которых величины слабо неоднородны и медленно изменяются во времени по сравнению с характерным временем установления локально статистического равновесия, в левой части уравнения (46) мы пренебрегаем производными от ψ_p. Следуя методу Энского—Чепмена, исключим производные по времени от θ, $\mathbf{u}$ и μ_{j*} в левой части уравнения (46), воспользовавшись уравнениями переноса (1.67)–(1.69) для идеальной газодинамики квазичастиц.

Решение полученного уравнения относительно ψ_p позволяет вычислить необратимые потоки (1.35) и кинетические коэффициенты теплопроводности и вязкости.

Переходя в кинетическом уравнении (1) от переменной $\mathbf{k}$ к угловым переменным и переменной x, связанной с энергией квазичастиц, получаем кинетическое уравнение, которое будем решать с использованием специально построенных ортогональных полиномов относительно x. Эти полиномы получаются на основе весовой функции $w^{(\alpha)}(x)$, характерной для статистики Бозе—Эйнштейна, удачный выбор которой позволяет ограничиться конечным числом первых полиномов при расчете кинетических коэффициентов в газе квазичастиц.

Система ортогональных многочленов (полиномов) строится путем ортогонализации последовательности неотрицательных степеней x: $1, x, x^2, \ldots$. В качестве весовой функции $w^{(\alpha)}(x)$ выбирается положительная и ограниченная на вещественной полуоси $[0, \infty)$ функция, определяющая с точностью до постоянного множителя каждый многочлен, выбор которой для конкретных газов квазичастиц будет приведен ниже.

Соответствующие ей моменты имеют вид

$$C_n^{(\alpha)} = \int_0^\infty w^{\alpha}(x)\, x^n\, dx\,. \qquad (47)$$

Зная их, ортогональные многочлены можно представить в виде определителя

$$\Phi_n^{(\alpha)}(x) = \frac{K_n^{(\alpha)}}{G_{n-1}^{(\alpha)}} \begin{vmatrix} C_0^{(\alpha)} & C_1^{(\alpha)} & \ldots & C_n^{(\alpha)} \\ C_1^{(\alpha)} & C_2^{(\alpha)} & \ldots & C_{n+1}^{(\alpha)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ C_{n-1}^{(\alpha)} & C_n^{(\alpha)} & \ldots & C_{2n-1}^{(\alpha)} \\ 1 & x & \ldots & x^n \end{vmatrix}\,, \qquad (48)$$

где $G_n^{(\alpha)}$ — определитель Грама:

$$G_n^{(\alpha)} = \begin{vmatrix} C_0^{(\alpha)} & C_1^{(\alpha)} & \ldots & C_n^{(\alpha)} \\ C_1^{(\alpha)} & C_2^{(\alpha)} & \ldots & C_{n+1}^{(\alpha)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ C_n^{(\alpha)} & C_{n+1}^{(\alpha)} & \ldots & C_{2n}^{(\alpha)} \end{vmatrix}\,;$$

$K_n^{(\alpha)}$ — коэффициент полинома при x^n, от выбора которого зависит стандартизация полинома. Мы будем пользоваться стандартизацией, положив $K_n^{(\alpha)} = (-1)^n$.

Полученная последовательность многочленов с выбранной нами весовой функцией будет единственной, замкнутой и ортогональной:

$$\int_0^\infty w^{(\alpha)}(x)\, \Phi_m^{(\alpha)}(x)\, \Phi_n^{(\alpha)}(x)\, dx = h_n^{(\alpha)}\, \delta_{nm}\,,$$

где $h_n^{(\alpha)} = G_n^{(\alpha)}/G_{n-1}^{(\alpha)}$. Ортогональные многочлены $\Phi_n^{(\alpha)}(x)$ обладают рядом общих свойств, присущих ортогональным полиномам.

Приведем выражение для используемых нами полиномов $\Phi_n^{(\alpha)}(x)$ и $h_n^{(\alpha)}$:

$$\Phi_0^{(\alpha)}(x) = 1\,;\ \Phi_1^{(\alpha)}(x) = C_1^{(\alpha)}/C_0^{(\alpha)} - x\,;$$

$$\Phi_2^{(\alpha)}(x) = \frac{C_1^{(\alpha)}C_3^{(\alpha)} - (C_2^{\alpha})^2}{G_1^{(\alpha)}} - \qquad (49)$$

$$- \frac{C_0^{(\alpha)}C_3^{(\alpha)} - C_1^{(\alpha)}C_2^{(\alpha)}}{G_1^{(\alpha)}}\, x + x^2;$$

$$h_o^{(\alpha)} = C_0^{(\alpha)}\,;\ h_1^{(\alpha)} = C_2^{(\alpha)} - \left(C_1^{(\alpha)}\right)^2/C_0^{(\alpha)}\,.$$

В дальнейшем необходимо вычисление интегралов вида

$$\int_0^\infty w^{(\alpha)}(x)\, f(x)\, dx\,,$$

для вычисления которых можно воспользоваться формулами типа формул Гаусса [4]:

$$\int_0^\infty w^{(\alpha)}x)\, f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_{n_i}^{(\alpha)} f\left(x_{n_i}^{(\alpha)}\right)\,, \qquad (50)$$

где $x_{n_i}^{(\alpha)}$ — корни ортогональных полиномов $\Phi_n^{(\alpha)}(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), а весовые множители $A_{n_i}^{(\alpha)}$ вычисляются по формулам

$$A_{n_i}^{(\alpha)} = \left(\frac{d\Phi_n^{(\alpha)}(x)}{dx}\right)^{-1}_{x=x_{n_i}^{(\alpha)}} \int_0^\infty w^{(\alpha)}(x)\Phi_n^{(\alpha)}(x)\, \frac{dx}{x - x_{n_i}^{(\alpha)}}\,. \qquad (51)$$

4. Кинетические коэффициенты газа фононов в кристаллических диэлектриках

Рассмотрим газ длинноволновых акустических фононов, основные характеристики которых приведены в первой части обзора в разд. 2.1 для модели приведенного изотропного кристалла.

Линеаризованное кинетическое уравнение (46) для функции распределения фононов сорта j имеет вид

$$x\left[\left(\kappa_i\kappa_l - \frac{1}{3}\delta_{il}\right)\nabla_l u_i + v_j\left(1 - \frac{v_t^2}{v_j^2}\frac{2+\beta^2}{2+\beta^5}\right)(\vec{\kappa}\nabla\theta)\right]\overline{N}^{(j)}\left(\overline{N}^{(j)} + 1\right) = \nu_0 L_j^{(3)}\{\psi\}\,, \qquad (52)$$

где $\nu_0 = T^5/(32\pi\rho v_l^5)$; $\vec{\kappa} = \mathbf{k}/k$; $x = \omega/T$; v_j — фазовая скорость фононов сорта j;

$$L_j^{(3)}\{\psi\} = (2\pi)^2\frac{v_l^9}{T^3}\sum_{1,2,3}\frac{x_1x_2x_3}{v_{j_1}^2v_{j_2}^2v_{j_3}^2}\delta\left(x_1 + x_2 - x_3\right)\Delta\left(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3\right)\left(\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}\delta_{jj_1} + \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}_2}\delta_{jj_2} - \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}_3}\delta_{jj_3}\right)\times$$
$$\times\left|M(1,2,3)\right|^2\left(\overline{N}_1 + 1\right)\left(\overline{N}_2 + 1\right)\overline{N}_3\left(\psi_1 + \psi_2 - \psi_3\right)\,. \qquad (53)$$

Видно, что в силу линейности кинетического уравнения (52) относительно $\psi^{(j)}(x)$ его решение можно представить в виде

$$\psi^{(j)}(x) = \psi_+^{(j)}(x) + \psi_-^{(j)}(x)\,, \qquad (54)$$

где $\psi_+^{(j)}(x)$ и $\psi_-^{(j)}(x)$ — соответственно четная и нечетная (относительно замены $\mathbf{k}$ на $-\mathbf{k}$) части функции $\psi^{(j)}(x)$, которые можно записать следующим образом:

$$\psi_+^{(j)}(x) = \frac{x^2}{\nu_0}\left(\kappa_i\kappa_p - \frac{1}{3}\delta_{ip}\right)\nabla_p u_i A^{(j)}(x)\,;$$
$$\psi_-^{(j)}(x) = -\frac{x}{\nu_0}v_j(\vec{\kappa}\nabla\theta)B^{(j)}(x)\,. \qquad (55)$$

Здесь $A^{(j)}(x)$ и $B^{(j)}(x)$ — скалярные функции, подлежащие определению. При этом дополнительные условия (1.18) для функции $\psi_+^{(j)}(x)$ удовлетворяются автоматически, для $\psi_-^{(j)}(x)$ первое условие также удовлетворяется автоматически, а второе сводится к виду

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^4\,e^x}{(e^x-1)^2}\left(B^{(l)}(x) + \frac{2}{\beta^3}B^{(t)}(x)\right) = 0\,. \qquad (56)$$

Функции $A^{(j)}(x)$ и $B^{(j)}(x)$ ищем в виде разложения по полной системе ортогональных полиномов $\Phi_n^{(4)}(x)$ и $\Phi_n^{(5)}(x)$, которые строятся на основе весовой функции

$$w^{(\alpha)}(x) = \frac{x^\alpha\,e^x}{(e^x-1)^2}\,; \quad (\alpha = 4; 5) \qquad (57)$$

с моментами $C_n^{(\alpha)} = \Gamma(1 + \alpha + n)\,\zeta(\alpha + n)$;

$$A^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(j)}\Phi_n^{(5)}(x);\;\; B^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(j)}\Phi_n^{(4)}(x)\,. \qquad (58)$$

Разложением (58) можно пользоваться, если $A^{(j)}(x)$ и $B^{(j)}(x)$ являются интегрируемыми с соответствующими весовыми функциями. Подставляя (55) в (1.35), используя условия ортогональности полиномов и суммируя по поляризациям поперечных фононов с учетом (56), из которого следует, что $B_0^{(t)} = (-\beta^3/2)B_0^{(l)}$, получаем

$$\mathbf{q} = -\tilde{\kappa}\nabla T\,;$$
$$\pi_{ip} = -\tilde{\eta}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_p} + \frac{\partial u_p}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ip}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\right)\,, \qquad (59)$$

где

$$\tilde{\kappa} = \alpha_{\tilde{\kappa}}\, \rho\, v_l^4/T^2\,, \tag{60}$$

$$\tilde{\eta} = \alpha_{\tilde{\eta}}\, \rho\, v_l^2/T \tag{61}$$

— кинетические коэффициенты теплопроводности и вязкости газа фононов, в которых

$$\alpha_{\tilde{\eta}} = \frac{16}{15\pi}\, C_0^{(5)}\left(-A_0^{(l)} - \frac{2}{\beta^3}\, A_0^{(t)}\right);$$

$$\alpha_{\tilde{\kappa}} = \frac{16}{3\pi}\left(\beta^2 - 1\right) C_0^{(4)} B_0^{(l)} \tag{62}$$

— численные коэффициенты, зависящие от β и модулей упругости.

После подстановки в (52) решения в виде (54) получим две независимые системы уравнений для определения $A^{(J)}(x)$ и $B^{(J)}(x)$:

$$x\left(\kappa_i \kappa_p - \frac{1}{3}\,\delta_{ip}\right)\frac{e^x}{(e^x-1)^2} = L_j^{(3)}\left\{x^2\left(\kappa_i \kappa_p - \frac{1}{3}\,\delta_{ip}\right)\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(J)}\Phi_n^{(5)}(x)\right\}; \tag{63}$$

$$v_j\left(1 - \frac{v_t^2}{v_j^2}\,\frac{2+\beta^2}{2+\beta^5}\right) x\,\vec{\kappa}\,\frac{e^x}{(e^x-1)^2} = L_j^{(3)}\left\{v_j\, x\,\vec{\kappa}\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(J)}\Phi_n^{(4)}(x)\right\}. \tag{64}$$

Умножив (63) и (64) соответственно на $K_{ip}^{(m)}(x) = x^2(\kappa_i\kappa_p - 1/3\delta_{ip})\Phi_m^{(5)}(x)$ и $T_{(x)}^{(m)} = x\,\vec{\kappa}\Phi_n^{(4)}(x)$, проинтегрировав по импульсам и просуммировав по поляризациям поперечных фононов, получим две бесконечные линейные алгебраические системы уравнений:

$$\begin{cases} C_0^{(5)}\delta_{m0} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\alpha_{mn}^{(ll)}A_n^{(l)} + \alpha_{mn}^{(l,t)}A_n^{(t)}\right), \\ \dfrac{2}{\beta^3}\, C_0^{(5)}\delta_{m0} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\alpha_{mn}^{(tl)}A_n^{(l)} + \alpha_{mn}^{(tt)}A_n^{(t)}\right). \end{cases} \tag{65}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2(1-\beta^2)}{2+\beta^5}\, C_0^{(4)}\delta_{m0} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\beta_{mn}^{(ll)}B_n^{(l)} + \beta_{mn}^{(lt)}B_n^{(t)}\right); \\ -\dfrac{2(1-\beta^2)}{2+\beta^5}\, C_0^{(4)}\delta_{m0} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\beta_{mn}^{(tl)}B_n^{(l)} + \beta_{mn}^{(tt)}B_n^{(t)}\right). \end{cases} \tag{66}$$

Строгими законами сохранения энергии и импульса в изотропном кристалле разрешены следующие трехфононные процессы взаимодействия: $l \Leftrightarrow l + t$; $l \Leftrightarrow t + t$. Можно показать, что при учете только этих процессов функции $A^{(l)}(x)$ и $B^{(l)}(x)$ будут неинтегрируемыми. Действительно, использовав обобщенную H-теорему Больцмана (1.66), можно получить следующие нижние оценки коэффициентов $\tilde{\eta}$ и $\tilde{\kappa}$:

$$\tilde{\eta}_{\min} = \frac{1}{90\pi^2}\,\frac{T^4}{v_l^3}\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{x^4\,e^x}{(e^x-1)^2}\left[\frac{1}{\nu_l(x)} + \frac{2}{\beta^3\nu_t(x)}\right]dx\,; \tag{67}$$

$$\tilde{\kappa}_{\min} = \frac{1}{9\pi^2}\left(\frac{1-\beta^2}{2+\beta^5}\right)^2\frac{T^3}{v_l}\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{x^4\,e^x}{(e^x-1)^2}\left[\frac{2}{\nu_l(x)} + \frac{\beta^6}{\nu_t(x)}\right]dx\,;$$

где $\nu_{l,t}(x)$ — частоты столкновений поперечных и продольных фононов. В области значений $x << 1$ частота столкновений $\nu_l(x) \sim x^4$ [5], подставляя ее в (67), легко видеть, что $\tilde{\kappa}_{\min}$ и $\tilde{\eta}_{\min}$ стремятся к бесконечности, откуда следует неинтегрируемость функций $A^{(l)}(x)$ и $B^{(l)}(x)$.

Особенности, возникающие в (67), имеют ту же природу, что и в «проблеме длинноволновых продольных фононов» Помсранчука. Как и при решении этой проблемы, существует ряд способов устранения расходимостей [5–9].

В результате вычислений можно убедиться, что основной вклад в $\tilde{\kappa}$ и $\tilde{\eta}$ вносит область значений $x \sim 1$, поэтому способы устранения особенностей [5–9], которые возникают при $x \to 0$, слабо влияют на численный порядок величин $\tilde{\kappa}$ и $\tilde{\eta}$ и потому не существенны. Далее будем учитывать конечность времени жизни тепловых фононов τ_{th}.

С учетом основных процессов взаимодействия фононов $l \Leftrightarrow l + l$; $l \Leftrightarrow l + t$; $l \Leftrightarrow t + t$ коэффициенты β_{mn} и α_{mn} определяются следующими выражениями:

$$\beta_{mn}^{(lt)} = \beta^2\beta_{mn}^{(tl)} = -2\hat{S}_1\left[\beta \mathrm{T}_n(x_2)\left(\mathrm{T}_m(x_1) - \mathrm{T}_m(x_3)\right)\right] + \hat{S}_2\left[\beta \mathrm{T}_m(x_3)\left(\mathrm{T}_n(x_2) + \mathrm{T}_n(x_1)\right)\right];$$

$$\beta_{mn}^{(ll)} = \beta_{nm}^{(ll)} = -\hat{S}_0\left[\left(\mathrm{T}_m(x_3) - \mathrm{T}_m(x_2) - \mathrm{T}_m(x_1)\right)\left(\mathrm{T}_n(x_3) - \mathrm{T}_n(x_2) - \mathrm{T}_n(x_1)\right)\right] -$$

$$- 2\hat{S}_1\left[\left(\mathrm{T}_m(x_1) - \mathrm{T}_m(x_3)\right)\left(\mathrm{T}_n(x_1) - \mathrm{T}_n(x_3)\right)\right] - \hat{S}_2\left[\mathrm{T}_m(x_3)\,\mathrm{T}_n(x_3)\right]; \qquad (68)$$

$$\beta_{mn}^{(tt)} = \beta_{nm}^{(tt)} = -2\hat{S}_1\left[\mathrm{T}_m(x_2)\,\mathrm{T}_n(x_2)\right] + \hat{S}_2\left[\left(\mathrm{T}_m(x_1) + \mathrm{T}_m(x_2)\right)\left(\mathrm{T}_n(x_1) + \mathrm{T}_n(x_2)\right)\right].$$

Интегральные операторы $\hat{S}_0$, $\hat{S}_1$, $\hat{S}_2$ имеют вид

$$\hat{S}_0 = \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 \frac{x_1^2x_2^2x_3^2\,e^{x_3}}{(e^{x_3}-1)(e^{x_2}-1)(e^{x_1}-1)} M_0^2\left(x_1, x_2\right);$$

$$\hat{S}_1 = \beta^{-4}\int_0^\infty dx_1 \int_0^{2\beta x_1/(1-\beta^2)} dx_2 \frac{x_1^2x_2^2x_3^2\,e^{x_3}}{(e^{x_3}-1)(e^{x_2}-1)(e^{x_1}-1)} M_1^2\left(x_1, x_2\right); \qquad (69)$$

$$\hat{S}_2 = \beta^{-8}\int_0^\infty dx_1 \int_{x_1(1-\beta)/(1+\beta)}^{x_1(1+\beta)/(1-\beta)} dx_2 \frac{x_1^2x_2^2x_3^2\,e^{x_3}}{(e^{x_3}-1)(e^{x_2}-1)(e^{x_1}-1)} M_2^2\left(x_1, x_2\right).$$

Здесь $M_1^2(x_1, x_2)$, $M_2^0(x_1, x_2)$ — функции, полученные в результате суммирования $|M(1, 2, 3)|^2$ по векторам поляризаций поперечных фононов, согласно формуле $\overline{e_i e_p} = \delta_{ip} - \kappa_i\kappa_p$, и усреднения по телесному углу

$$\frac{1}{8\pi^2}\int dO_1 \int dO_2 \left|M(1, 2, 3)\right|^2 \delta\left(\cos\theta - (\vec{\kappa}_1\vec{\kappa}_2)\right) \qquad (70)$$

соответственно для процессов $l_3 \Leftrightarrow l_1 + t_2$ и $l_3 \Leftrightarrow t_2 + t_1$. Скалярные произведения $(\vec{\kappa}_1, \vec{\kappa}_2)$, $(\vec{\kappa}_1, \vec{\kappa}_3)$, $(\vec{\kappa}_2, \vec{\kappa}_3)$, стоящие под знаком интеграла в коэффициентах в (68), выражаются через x_1 и x_2 из законов сохранения энергии $x_3 = x_1 + x_2$ и импульса следующим образом:

для процессов $l_3 \Leftrightarrow l_1 + t_2$

$$(\vec{\kappa}_1\vec{\kappa}_2) = \beta\left(1 - \frac{x_2}{2x_1}\,\frac{1-\beta^2}{\beta^2}\right);$$

$$(\vec{\kappa}_2\vec{\kappa}_3) = \beta\left(1 + \frac{x_2}{2x_3}\,\frac{1-\beta^2}{\beta^2}\right);$$

$$(\vec{\kappa}_1\vec{\kappa}_3) = \left(1 - \frac{x_2^2}{2x_1x_3}\,\frac{1-\beta^2}{\beta^2}\right);$$

для процессов $l_3 \Leftrightarrow t_2 + t_1$

$$(\vec{\kappa}_1\vec{\kappa}_3) = \beta^{-1}\left(1 - \frac{x_3}{2x_1}\left(1-\beta^2\right)\right);$$

$$(\vec{\kappa}_2\vec{\kappa}_3) = \beta^{-1}\left(1 - \frac{x_3}{2x_2}\left(1-\beta^2\right)\right);$$

$$(\vec{\kappa}_2\vec{\kappa}_1) = 1 - \frac{x_3^2}{2x_1x_2}\left(1-\beta^2\right);$$

для процессов $l_3 \Leftrightarrow l_2 + l_1$ при выполнении условия $\omega_l\tau_{\mathrm{th}} \to \infty$

$$(\vec{\kappa}_1\vec{\kappa}_2) \approx (\vec{\kappa}_1\vec{\kappa}_3) \approx (\vec{\kappa}_2\vec{\kappa}_3) \approx 1.$$

Коэффициенты α_{mn} имеют структуру аналогичную β_{mn} (68) с заменой векторов $\mathrm{T}_m(x)$ тензорами $K_{ip}^{(m)}(x)$.

Для определения коэффициентов $A_0^{(l)}$, $A_0^{(t)}$ и $B_0^{(l)}$ в системах уравнений (65), (66) можно ограничиться учетом небольшого числа первых полиномов $\Phi_m^{(\alpha)}(x)$. Учет полиномов более высокого порядка, как показано ниже, не изменит порядок численных коэффициентов $\alpha_{\tilde{\kappa}}$ и $\alpha_{\tilde{\eta}}$. Если ограничиться учетом только нулевых полиномов, то

$$B_0^{(l)} = 4\,\frac{1-\beta^2}{(2+\beta^5)^2}\,\frac{C_0^{(4)}}{\beta_{00}^{(ll)}}\,, \qquad (71)$$

$$A_0^{(t)} = \frac{2\beta^{-3}\alpha_{00}^{(ll)} - \alpha_{00}^{(lt)}}{\alpha_{00}^{(ll)}\alpha_{00}^{(tt)} - (\alpha_{00}^{(lt)})^2}\,C_0^{(5)}\,,$$

$$A_0^{(l)} = \frac{\alpha_{00}^{(tt)} - 2\beta^{-3}\alpha_{00}^{(lt)}}{\alpha_{00}^{(ll)}\alpha_{00}^{(tt)} - (\alpha_{00}^{(lt)})^2}\,C_0^{(5)}\,. \qquad (72)$$

Для дальнейшего упрощения вычислений используем модель приведенного изотропного кристалла относительно модулей упругости третьего порядка, которая существенно не изменит порядок численных коэффициентов $\alpha_{\tilde{\kappa}}$ и $\alpha_{\tilde{\eta}}$. В этом убедимся далее на примере кристаллов кубической сингонии.

В приведенном изотропном кристалле функции $M(1, 2, 3)$ для рассматриваемых процессов имеют вид (2.14). После суммирования по поляризациям поперечных фононов и усреднения по углам, согласно (70), получим

$$M_0^2 = \left(3 + \bar{a} + 6\bar{b}\right)^2,$$

$$M_1^2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\beta^2\left(\mu_1 + \mu_2\right)^2(\vec{\kappa}_1\vec{\kappa}_3)^2 \times$$

$$\times \left(1 - (\vec{\kappa}_1\vec{\kappa}_2)^2\right)\left(2 + x_1/x_2\right)^2, \qquad (73)$$

$$M_2^2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(\mu_2^2 + \mu_3^2\right) + \mu_3\left(\mu_1 + \mu_3\right)(\vec{\kappa}_1\vec{\kappa}_2) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\mu_1 + \mu_3\right)^2 - 2\mu_2\left(\mu_1 + \mu_2\right)\right](\vec{\kappa}_1\vec{\kappa}_2)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\mu_1 + \mu_2\right)^2(\vec{\kappa}_1\vec{\kappa}_2)^4.$$

Подставляя (73) в (69), вычисляем коэффициенты $\beta_{00}^{(ll)}$, $\alpha_{00}^{(ll)}$, $\alpha_{00}^{(lt)}$, $\alpha_{00}^{(tt)}$, которые запишем в следующем виде:

$$\alpha_{00}^{(ll)} = \sum_{i=0}^{4} a_i I_i^{(ll)}\,;\quad \alpha_{00}^{(lt)} = \sum_{i=1}^{4} a_i I_i^{(lt)}\,;$$

$$\alpha_{00}^{(tt)} = \sum_{i=1}^{4} a_i I_i^{(tt)}\,;\quad \beta_{00}^{(ll)} = \sum_{i=1}^{4} a_i G_i^{(ll)}\,,$$

где

$$a_0 = \left(3 + \bar{a} + 6\bar{b}\right)^2;\quad a_1 = \left(\mu_1 + \mu_2\right)^2;$$

$$a_2 = \mu_2^2 + \mu_3^2;\quad a_3 = 2\mu_3\left(\mu_1 + \mu_3\right);$$

$$a_4 = \left[\left(\mu_1 + \mu_3\right)^2 - 2\mu_1\mu_2 - \mu_2^2\right],$$

Таблица 3

Значения величин $I_i^{(ll)}$, $I_i^{(lt)}$, $I_i^{(tt)}$, $G_i^{(ll)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ для разных значений β

β	0,3	0,4	0,5	$1/\sqrt{3}$	0,6	0,7
$G_1^{(ll)}\cdot 10^{-6}$	−64,32	−5,067	−0,619	−0,128	−0,086	−0,027
$G_2^{(ll)}\cdot 10^{-6}$	−105,01	−13,08	−2,65	−0,91	−0,684	−0,217
$G_3^{(ll)}\cdot 10^{-6}$	92,305	10,09	1,68	0,443	0,3	0,044
$G_4^{(ll)}\cdot 10^{-6}$	−81,47	−7,88	−1,12	−0,242	−0,154	−0,02
$I_1^{(ll)}\cdot 10^{-7}$	−660,9	−52,75	−6,51	−1,56	−1,106	−0,439
$I_2^{(ll)}\cdot 10^{-7}$	−1098,6	−138,44	−28,03	−9,69	−7,27	−2,297
$I_3^{(ll)}\cdot 10^{-7}$	961,896	106,32	17,676	4,71	3,18	0,447
$I_4^{(ll)}\cdot 10^{-7}$	−845,25	−82,68	−11,68	−2,57	−1,62	−0,198
$I_1^{(lt)}\cdot 10^{-7}$	69,98	9,29	2,03	0,54	0,375	0,124
$I_2^{(lt)}\cdot 10^{-7}$	55,95	11,23	3,96	1,79	1,45	0,63
$I_3^{(lt)}\cdot 10^{-7}$	−61,44	−10,99	−3,26	−1,17	−0,834	−0,205
$I_4^{(lt)}\cdot 10^{-7}$	65,45	10,51	2,72	0,824	0,573	0,113
$I_1^{(tt)}\cdot 10^{-7}$	−152,7	−11,95	−1,61	−0,366	−0,242	−0,065
$I_2^{(tt)}\cdot 10^{-7}$	−245,1	−28,25	−5,35	−1,74	−1,29	−0,41
$I_3^{(tt)}\cdot 10^{-7}$	216,46	22,31	3,68	1,01	0,698	0,143
$I_4^{(tt)}\cdot 10^{-7}$	−191,92	−17,87	−2,66	−0,649	−0,43	−0,081

а численные значения $I_i^{(ll)}$, $I_i^{(lt)}$, $I_i^{(tt)}$, $G_i^{(ll)}$ как функции β приведены в табл. 3. Заметим, что $I_{00}^{(ll)}$ не зависит от β и равно $I_{00}^{(ll)} = -263847$.

Результаты вычислений коэффициентов $\alpha_{\tilde{\kappa}}^{(0)}$ и $\alpha_{\tilde{\eta}}^{(0)}$ с использованием модели приведенного изотропного кристалла для некоторых кристаллов, принадлежащих к кубической сингонии, и кварца, который принадлежит к тригональной сингонии, приведены в табл. 1 в первой части обзора. При этом использовались значения модулей упругости C_{mn} и C_{mnk} из [10].

Проанализируем приближения по полиномам на примере кристалла NaCl, у которого $\beta \approx 1/\sqrt{3}$. Расчеты показывают, что при учете нулевых, затем первых, вторых полиномов увеличиваются численные коэффициенты $\alpha_{\tilde{\eta}}$ и $\alpha_{\tilde{\kappa}}$

$$\alpha_{\tilde{\eta}} = \alpha_{\tilde{\eta}}^{(0)}\left(1 + 0{,}3 + 0{,}12 + \ldots\right),$$
$$\alpha_{\tilde{\kappa}} = \alpha_{\tilde{\kappa}}^{(0)}\left(1 + 0{,}24 + \ldots\right). \qquad (74)$$

Из численного анализа можно заключить, что учет полиномов более высокого порядка не изменит порядок численных значений $\alpha_{\tilde{\eta}}^{(0)}$ и $\alpha_{\tilde{\kappa}}^{(0)}$. Можно проверить, что аналогичная ситуация имеет место и для других кристаллов.

Убедимся в справедливости неравенств $\tilde{\kappa} > \tilde{\kappa}_{\min}$ и $\tilde{\eta} > \tilde{\eta}_{\min}$. Использовав выражения для $\nu_l(x)$, $\nu_t(x)$ и (67), вычислим интегралы в $\tilde{\kappa}_{\min}$ и $\tilde{\eta}_{\min}$ (67) с помощью квадратурных правил наивысшей алгебраической степени точности [4], воспользовавшись (50) и табл. 4. Соответствующие значения для $(\alpha_{\tilde{\eta}})_{\min}$ и $(\alpha_{\tilde{\kappa}})_{\min}$ имеют вид

$$(\alpha_{\tilde{\eta}})_{\min} = 1{,}72\cdot 10^{-2};\ (\alpha_{\tilde{\kappa}})_{\min} = 5{,}82\cdot 10^{-5} \qquad (75)$$

и соответственно в 1,5 и 4,4 раза меньше значений, приведенных в первой части обзора в табл. 1. Отсюда можно сделать вывод, что формулы (75) дают хорошие оценки порядка значений численных коэффициентов.

Для выяснения эффективности используемой модели приведенного изотропного кристалла проведем расчет коэффициентов $\alpha_{\tilde{\kappa}}$ и $\alpha_{\tilde{\eta}}$ реальных кристаллов кубической сингонии NaCl, NaF, KCl, у которых $\beta \approx 1/\sqrt{3}$. При этом можно не учитывать анизотропию кристалла по отношению к модулям упругости второго порядка и рассматривать взаимодействие продольных и поперечных фононов с учетом анизотропии ангармонизмов. Энергия упругой решеточной нелинейности для кристаллов кубической сингонии определяется шестью независимыми модулями упругости третьего порядка C_{nmp} и имеет вид

Таблица 4

Значения корней и весовых множителей полиномов $\Phi_n^{(4)}(x)$, $\Phi_n^{(5)}(x)$ (n = 1, 2, ..., 6) квадратурных формул

n	i	$x_{ni}^{(4)}$	$A_{ni}^{(4)}$	$x_{ni}^{(5)}$	$A_{ni}^{(5)}$
1	1	4,79027	25,9758	5,88668	124,431
2	1	3,27507	49,4516	4,18905	84,899
	2	8,25673	3,13491	9,53255	39,532
3	1	2,48507	11,0724	3,27398	50,3243
	2	6,09293	13,5081	7,17945	68,062
	3	11,688	1,11443	13,0801	$6{,}047\cdot 10^{-3}$
4	1	1,99072	6,90057	2,68326	29,5332
	2	4,8816	14,95199	5,83513	73,0059
	3	8,97817	4,01358	10,1991	21,2693
	4	15,1658	0,10969	16,6188	0,619023
5	1	1,64985	4,37723	2,28235	18,2284
	2	4,07064	13,80908	4,96613	65,4977
	3	7,41073	7,07941	8,50985	36,8307
	4	11,9325	0,701305	13,3963	3,8407
	5	18,6457	$7{,}249\cdot 10^{-3}$	20,2004	$3{,}819\cdot 10^{-2}$
6	1	1,33311	2,44391	2,12082	14,9111
	2	3,35315	11,7264	4,61482	57,2767
	3	6,17456	9,25938	7,66829	44,7562
	4	9,42505	2,42915	12,4896	7,56745
	5	15,7096	0,12041	17,2636	$9{,}1991\cdot 10^{-2}$
	6	21,0599	$4{,}978\cdot 10^{-3}$	24,9863	1,9351·10–2

$$E_3 = \frac{1}{6}C_{111}\left(u_{11}^2 + u_{22}^2 + u_{33}^2\right) + \frac{1}{2}C_{112}\left[u_{11}^2\left(u_{22}+u_{33}\right) + u_{22}^2\left(u_{11}+u_{33}\right) + u_{33}^2\left(u_{11}+u_{22}\right)\right] +$$
$$+ 2C_{144}\left(u_{11}u_{23}^2 + u_{22}u_{13}^2 + u_{33}u_{12}^2\right) + C_{123}u_{11}u_{22}u_{33} + \qquad (76)$$
$$+ 2C_{166}\left[u_{12}^2\left(u_{11}+u_{22}\right) + u_{13}^2\left(u_{11}+u_{33}\right) + u_{23}^2\left(u_{22}+u_{33}\right)\right] + 8C_{456}u_{12}u_{23}u_{31}.$$

Матричные элементы $\Phi(1, 2, 3)$ (2.11) возможных процессов взаимодействия фононов имеют громоздкий вид, поэтому мы их здесь не приводим. Производя суммирование в $|M(1, 2, 3)|^2$ по векторам поляризаций поперечных фононов, получаем выражение, состоящее из слагаемых, содержащих только произведение компонент векторов $\vec{\kappa}_i$. Процедура последующего усреднения по телесным углам, согласно формуле (70), приводит к необходимости вычисления интегралов вида

$$\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi\ F(\vec{\kappa}_1, \vec{\kappa}_2, \vec{\kappa}_3)$$

с фиксированным косинусом угла между векторами $\vec{\kappa}_1$ и $\vec{\kappa}_2$, задаваемым δ-функцией (70), в которых функция F является полиномом по степеням компонент векторов $\vec{\kappa}_1$, $\vec{\kappa}_2$, $\vec{\kappa}_3$. Методика вычислений подобных интегралов развита в работе [1].

В результате вычислений получим выражения M_0^2, M_1^2 и M_2^2 для реальных кристаллов, после чего выполним изложенную выше процедуру расчета коэффициентов $\alpha_{\tilde{\kappa}}$ и $\alpha_{\tilde{\eta}}$. Численные расчеты показывают, что значения $\alpha_{\tilde{\kappa}}$ и $\alpha_{\tilde{\eta}}$ для кристаллов NaCl, NaF, KCl отличаются от соответствующих значений $\alpha_{\tilde{\kappa}}^{(0)}$ и $\alpha_{\tilde{\eta}}^{(0)}$ в 4–7 раз [1]. Следовательно, модель приведенного изотропного кристалла дает правильный порядок величин $\tilde{\kappa}$ и $\tilde{\eta}$.

Изложенные методы вычислений позволяют получать численные значения коэффициентов $\tilde{\kappa}$ и $\tilde{\eta}$ для кристаллов, принадлежащих любой сингонии, если известны модули упругости. При проведении численных оценок коэффициентов $\tilde{\kappa}$ и $\tilde{\eta}$ мы использовали известные значения для модулей упругости C_{nmp}, которые в основном определялись в области комнатных температур [10], в то время как областью применимости фононной гидродинамики являются низкие температуры. Мы полагаем, что учет температурной зависимости модулей упругости существенно не изменит порядков численных значений $\alpha_{\tilde{\kappa}}$ и $\alpha_{\tilde{\eta}}$.

5. Кинетические коэффициенты газа магнонов в ферродиэлектриках

Рассмотрим ферродиэлектрик в области низких температур, когда не существенны магнитоупругие взаимодействия. Основные характеристики газа магнонов в модели изотропного ферродиэлектрика с квадратичным законом дисперсии магнонов $\omega = \omega_a + (ak)^2\Theta_C$ приведены в разд. 2.4 первой части обзора.

Переходя к безразмерным переменным $x_a = \omega_a/T$; $y = (\Theta_C/T)^{1/2}ak$; $x = y^2$ в кинетическом уравнении (1) для магнонов и заменяя производные по времени от T и u через ∇T и $\partial u_i/\partial x_l$ из уравнений идеальной магнонной газодинамики с несохраняющимся числом частиц (1.72), получаем

$$2\overline{N}_1\left(\overline{N}_1+1\right)\left\{a\left(\frac{\Theta_C}{T}\right)^{1/2}\left[x_1-\frac{\langle x^2\rangle}{\langle x\rangle}\right](y\nabla T)+x_1\left(\kappa_{1i}\kappa_{1j}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\nabla_j u_i+\right.$$
$$\left.+\frac{x_a}{3}\left[\frac{\langle x+x_a\rangle}{\langle (x+x_a)^2\rangle}x_1-1\right]\operatorname{div}\mathbf{u}\right\}=\nu_0^{(3)}L^{(3)}\{\psi\}+\nu_0^{(4)}L^{(4)}\{\psi\}\,, \tag{77}$$

где

$$L^{(3)}\{\psi\}=-\int dy_2\int dy_3\left[\left(\overline{N}_1+1\right)\overline{N}_2\overline{N}_3\left(\psi_1-\psi_2-\psi_3\right)\delta\left(y_1-y_2-y_3\right)\delta\left(x_1-x_2-x_3-x_a\right)+\right.$$
$$\left.+2\left(\overline{N}_1+1\right)\left(\overline{N}_2+1\right)\overline{N}_3\left(\psi_1+\psi_2-\psi_3\right)\delta\left(y_1+y_2-y_3\right)\delta\left(x_1+x_2-x_3+x_a\right)\right]; \tag{78}$$

$$L^{(4)}\{\psi\}=-\int dy_2\int dy_3\int dy_4\left(\overline{N}_1+1\right)\left(\overline{N}_2+1\right)\overline{N}_3\overline{N}_3\left(y_1\,y_2\right)\times$$
$$\times\left(\psi_1+\psi_2-\psi_3-\psi_4\right)\delta\left(y_1+y_2-y_3-y_4\right)\delta\left(x_1+x_2-x_3-x_4\right); \tag{79}$$

$$\nu_0^{(3)}=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\mu_0M_0}{T}\right)^2\left(\frac{T}{\Theta_C}\right)^{3/2};\quad \nu_0^{(4)}=\frac{T}{16\pi^5}\left(\frac{T}{\Theta_C}\right)^3.$$

Здесь мы воспользовались матричными элементами (2.112), в которых для простоты функцию, зависящую от углов, в $M(1_s\,,\,2_s\,;\,3_s)$ положим равной единице. Первое слагаемое в левой части уравнения (77) ответственно за явление теплопроводности, второе и третье — за первую и вторую магнонные вязкости.

Исследуем теплопроводность ферромагнетиков. Для этого в левой части уравнения (77) оставим только слагаемое, содержащее ∇T. Поскольку это уравнение линейно относительно ψ, решение будем искать в виде

$$\psi(x)=-\frac{4\pi}{\nu_0^{(4)}}\left(\frac{\Theta_C}{T}\right)^{1/2}a(y\nabla T)\,A(x)\,. \tag{80}$$

При этом $\psi(x)$ тождественно удовлетворяет первому дополнительному условию (1.18), а второе принимает вид

$$\int_0^\infty \frac{\exp(x + x_a)}{[\exp(x + x_a) - 1]^2} x^{3/2} A(x) dx = 0 . \quad (81)$$

Функция $A(x)$ находится из уравнения

$$\bar{N}_1 \left(\bar{N}_1 + 1\right) y_1 \left[x_1 - \frac{\langle x^2 \rangle}{\langle x \rangle}\right] =$$

$$= -\frac{2\pi}{\nu_0^{(4)}} \left[\nu_0^{(3)} L^{(3)}\{yA(x)\} + \nu_0^{(4)} L\{yA(x)\}\right] . \quad (82)$$

Подставляя (80) в выражение (1.35) для теплового потока, получаем следующую формулу для коэффициента теплопроводности:

$$\kappa = \frac{2}{3\pi} \frac{T^2}{\nu_0^{(4)} a} \left(\frac{T}{\Theta_C}\right)^{1/2} \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{\exp(x + x_a)}{[\exp(x + x_a) - 1]^2} x^{3/2} A(x) dx . \quad (83)$$

Для нахождения неизвестной функции $A(x)$ воспользуемся разложением ее по полному набору ортогональных полиномов $\Phi_m^{(\alpha)}(x)$ [11], построенному на основе весовой функции

$$w^{(\alpha)}(x) = \frac{x^\alpha \exp(x + x_a)}{[\exp(x + x_a) - 1]^2} \quad (\alpha \geq 1, x_a \geq 0)$$

с моментами $C_n^{(\alpha)} = \Gamma(\alpha + n + 1) F(x_a, \alpha + n)$:

$$A(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \Phi_m^{(3/2)}(x) . \quad (84)$$

Подставим (84) в уравнение (82), умножим его на $y_1 \Phi_n^{(3/2)}(x_1)$ и проинтегрируем по y_1. В результате получим бесконечную линейную систему для определения коэффициентов разложения

$$h_1^{(3/2)} \delta_{n1} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \alpha_{mn} , \quad (85)$$

где $\alpha_{mn} = \alpha_{mn}^{(4)} + (\nu_0^{(3)}/\nu_0^{(4)}) \alpha_{mn}^{(3)}$. Если воспользоваться свойствами симметрии интегралов столкновений, то можно показать, что коэффициенты α_{nm} симметричны, т.е. $\alpha_{mn} = \alpha_{nm}$ и равны

$$\alpha_{mn}^{(3)} = \frac{1}{3} \int dy_1 \int dy_2 \int dy_3 \left(\bar{N}_1 + 1\right) \left(\bar{N}_2 + 1\right) \bar{N}_3 \left(T_m, T_n\right) \delta\left(y_1 + y_2 - y_3\right) \delta\left(x_1 + x_2 - x_3 - x_a\right) ;$$

$$\alpha_{mn}^{(4)} = \frac{1}{4} \int dy_1 \int dy_2 \int dy_3 \int dy_4 \left(\bar{N}_1 + 1\right) \left(\bar{N}_2 + 1\right) \bar{N}_3 \bar{N}_4 \delta\left(y_1 + y_2 - y_3 - y_4\right) \times \quad (86)$$

$$\times \delta\left(x_1 + x_2 - x_3 - x_4\right) \left(K_m K_n\right) ,$$

где

$$T_m = y_1 \Phi_m^{(3/2)}(x_1) + y_2 \Phi_m^{(3/2)}(x_2) - y_3 \Phi_m^{(3/2)}(x_3) ;$$

$$K_m = y_1 \Phi_m^{(3/2)}(x_1) + y_2 \Phi_m^{(3/2)}(x_2) - y_3 \Phi_m^{(3/2)}(x_3) - y_4 \Phi_m^{(3/2)}(x_4) . \quad (87)$$

Вычисление коэффициентов $\alpha_{mn}^{(4)}$ удобно проводить, переходя к новым переменным $y_1 = \vec{\xi}_1 + \vec{\xi}_2$; $y_2 = \vec{\xi}_1 - \vec{\xi}_2$; $y_3 = \vec{\xi}_3 + \vec{\xi}_4$; $y_4 = \vec{\xi}_3 - \vec{\xi}_4$. В новых переменных

$$\alpha_{mn}^{(4)} = \int d\vec{\xi}_1 \int d\vec{\xi}_2 \int d\vec{\xi}_3 \int d\vec{\xi}_4 \left(\xi_1^2 - \xi_2^2\right)^2 \left(K_m K_n\right) \left(\bar{N}_1 + 1\right) \left(\bar{N}_2 + 1\right) \bar{N}_3 \bar{N}_4 \delta\left(\xi_4^2 - \xi_2^2\right) \delta\left(\vec{\xi}_1 - \vec{\xi}_2\right) .$$

Коэффициенты α_{m0} равны нулю вследствие законов сохранения импульса, поэтому из системы (85) нельзя определить A_0. Из дополнительного условия (81) следует, что $A_0 = 0$.

Подставляя (84) в (83) и используя свойство ортогональности полиномов $\Phi_m^{(3/2)}(x)$, получаем

$$\tilde{\kappa} = \frac{(4\pi)^4}{3} \frac{\Theta_C}{a} \left(\frac{\Theta_C}{T}\right)^{3/2} A_1 h_1^{(3/2)} . \quad (88)$$

Приближенные решения бесконечной системы (85) относительно A_1 можно получить, ограничившись в разложении (84) несколькими полиномами. В результате вычислений можно показать, что учет следующих членов разложения дает малые

поправки ввиду быстрой сходимости числового ряда. Если ограничиться двумя первыми полиномами $\Phi_1^{(3/2)}(x)$ и $\Phi_2^{(3/2)}(x)$, то из (85) следует, что

$$A_1 = \frac{h_1^{(3/2)}}{\alpha_{11}} \left(1 + \Delta_\alpha\right) ,$$

где $\Delta_\alpha = \alpha_{11}^2/(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)$ — поправка, связанная с учетом второго полинома $\Phi_2^{(3/2)}(x)$ в зависимости от x_a, приведенная в табл. 5, которая в среднем порядка 0,15. Проведя вычисления, получим

$$\tilde{\kappa} = 200\alpha_1(x_a)\frac{\Theta_C}{a}\left(\frac{\Theta_C}{T}\right)^{3/2} \times$$

$$\times \frac{1}{1 + 200\alpha_2(x_a)\left(\mu_0 M_0/T\right)^2\left(\Theta_C/T\right)^{3/2}} . \qquad (89)$$

Числовые коэффициенты $\alpha_1(x_a)$ и $\alpha_2(x_a)$ — порядка единицы и приведены в табл. 5.

Для вычисления коэффициента первой вязкости в левой части уравнения (77) ограничимся слагаемыми с $(\kappa_{1i}\kappa_{1j} - \frac{1}{3}\delta_{ij})\nabla_j u_i$. Решение уравнения ищем в виде

$$\psi(x) = -\frac{8\pi}{3}\frac{xB(x)}{\nu_0^{(4)}}\nabla_j u_i\left(\kappa_i\kappa_j - \tfrac{1}{3}\delta_{ij}\right) . \qquad (90)$$

Легко проверить, что дополнительные условия (1.18) выполняются автоматически. Функция $B(x)$ находится из уравнения

$$\overline{N}_1\left(\overline{N}_1 + 1\right)\left(\kappa_{1i}\kappa_{1j} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)x_1 = -\frac{4\pi}{3\nu_0^{(4)}}\left[\frac{\nu_o^{(3)}}{\nu_0^{(4)}}L^{(3)}\left\{\left(\kappa_i\kappa_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)xB(x)\right\} + L^{(4)}\left\{\left(\kappa_i\kappa_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)xB(x)\right\}\right] . \qquad (91)$$

Подставляя $\psi(x)$ (90) в выражение для потока импульса (1.35), находим коэффициент первой вязкости

$$\tilde{\eta} = \frac{4}{45\pi}\frac{\Theta_C}{\nu_0^{(4)}a^3}\left(\frac{T}{\Theta_C}\right)^{5/2} \times$$

$$\times \int_0^\infty dx \frac{x^{5/2}\exp(x + x_a)}{[\exp(x + x_a) - 1]^2} B(x) . \qquad (92)$$

Как и в случае теплопроводности, разложим функцию $B(x)$ в ряд по полному набору ортогональных полиномов $\Phi_m^{(5/2)}(x)$:

$$B(x) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \Phi_m^{(5/2)}(x) . \qquad (93)$$

Коэффициент первой вязкости $\tilde{\eta}$ вследствие ортогональности полиномов $\Phi_m^{(5/2)}(x)$ будет определяться только коэффициентом разложения B_0:

$$\tilde{\eta} = \frac{4}{45\pi}\frac{\Theta_C}{\nu_0^{(4)}a^3}\left(\frac{T}{\Theta_C}\right)^{5/2} B_0 h_0^{(5/2)} .$$

Таблица 5

Значения коэффициентов $\alpha_i(x_a)$; $\beta_i(x_a)$ и поправок Δ_α, Δ_β как функции x_a

x_a	$\alpha_1(x_a)$	$\alpha_2(x_a)$	$\beta_1(x_a)$	$\beta_2(x_a)$	Δ_β	Δ_α
0	0,93	0,7	1,22	0,93	0,31	0,06
1	0,38	1,77	1,13	0,82	0,26	0,15
3	0,343	3,03	1,19	0,78	0,25	0,17
7	0,342	0,67	1,11	0,11	0,25	0,17
∞	0,338	$0{,}8\cdot x_a^{7/2}\,e^{-x_a}$	0,92	$0{,}7\cdot x_a^{5/2}\,e^{-x_a}$	0,25	0,17

Подставляя $B(x)$ (93) в уравнение (91), умножая его на $(\kappa_{1i}\kappa_{1j} - \frac{1}{3}\delta_{ij})x_1\Phi_n^{(5/2)}(x_1)$ и интегрируя по y_1, получаем бесконечную систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов

$$h_0^{(5/2)}\delta_{n0} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \beta_{mn} , \qquad (94)$$

где $\beta_{mn} = \beta_{mn}^{(4)} + \beta_{mn}^{(3)}\nu_0^{(3)}/\nu_0^{(4)}$, а симметричные коэффициенты $\beta_{mn}^{(4)}$ и $\beta_{mn}^{(3)}$ находятся из тех же выражений, что и $\alpha_{mn}^{(4)}$, $\alpha_{mn}^{(3)}$ (86), если в (87) заменить все $y\Phi_m^{(3/2)}(x)$ на $(\kappa_i\kappa_j - \frac{1}{3}\delta_{ij})x\Phi_m^{(5/2)}(x)$.

Ограничиваясь в разложении (93) двумя полиномами $\Phi_0^{(5/2)}(x)$ и $\Phi_1^{(5/2)}(x)$, находим

$$B_0 = \frac{h_0^{(5/2)}}{\beta_{00}}\left(1 + \Delta_\beta\right) ,$$

где $\Delta_\beta = \beta_{10}^2/(\beta_{00}\beta_{11} - \beta_{12}^2)$ — поправка (в среднем порядке 0,25), связанная с учетом второго полинома $\Phi_1^{(5/2)}(x)$, в зависимости от x_a, приведенная в табл. 5.

После вычислений получаем

$$\tilde{\eta} = 6\beta_1(x_a)\left(\frac{\Theta_C}{T}\right)^{3/2} \times$$

$$\times \frac{1}{a^3}\,\frac{1}{1 + 10^2\beta_2(x_a)\left(\mu_0 M_0/T\right)^2\left(\Theta_C/T\right)^{3/2}}, \qquad (95)$$

где $\beta_1(x_a)$, $\beta_2(x_a)$ — численные коэффициенты порядка единицы (табл. 5).

При вычислении коэффициента второй вязкости в левой части уравнения (77) оставляем последнее слагаемое. Для простоты вычислений рассмотрим случай, когда учитываются четырехмагнонные взаимодействия. Решение уравнения (77) ищем в виде

$$\psi(x) = -\frac{4\pi}{3}\,x_a\,\frac{\langle x + x_a\rangle}{\langle (x + x_a)^2\rangle}\,\frac{\operatorname{div}\mathbf{u}}{\nu_0^{(4)}}\left(C_\zeta + D(x)\,x^2\right). \qquad (96)$$

При этом первое дополнительное условие в (1.18) выполняется автоматически, а второе можно записать следующим образом:

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^{1/2}(x+x_a)\exp(x+x_a)}{[\exp(x+x_a)-1]^2}\left(C_\zeta + D(x)\,x^2\right) = 0. \qquad (97)$$

Функция $D(x)$ находится из уравнения, которое получается при подстановке (96) в (77), (79)

$$\left[x_1 - \frac{\langle x(x+x_a)^2\rangle}{\langle x+x_a\rangle}\right]\overline{N}_1\left(\overline{N}_1 + 1\right) = -2\pi L^{(4)}\left\{D(x)\,x^2\right\}, \qquad (98)$$

а константа C_ζ — из дополнительного условия (97). Подставляя $\psi(x)$ (96) в выражение для потока импульса (1.35), находим коэффициент второй вязкости

$$\tilde{\zeta} = -\frac{2}{3\pi}\,\frac{x_a}{\nu_0^{(4)}}\,\frac{\langle x+x_a\rangle}{\langle (x+x_a)^2\rangle}\,\frac{T}{a^3}\left(\frac{T}{\Theta_C}\right)^{3/2} \times$$

$$\times \int_0^\infty dx\,\frac{x^{3/2}\exp(x+x_a)}{[\exp(x+x_a)-1]^2}\left(C_\zeta + D(x)x^2\right). \qquad (99)$$

Функцию $D(x)$ ищем в виде разложения по полному набору ортогональных полиномов $\Phi_m^{(5/2)}(x)$:

$$D(x) = \sum_{m=0}^{\infty} D_m\,\Phi_m^{(5/2)}(x). \qquad (100)$$

Подставим (100) в уравнение (98), умножим его на $x_1\Phi_m^{(5/2)}(x_1)$ и проинтегрируем по y_1. В результате получим

$$-h_1^{(5/2)}\delta_{1m} + \left(\frac{C_1^{(5/2)}}{C_0^{(5/2)}} - \frac{\langle x+x_a\rangle}{\langle (x+x_a)^2\rangle}\right)h_0^{(5/2)}\delta_{0m} = \sum_{m=0}^{\infty} D_m\,\gamma_{mn}, \qquad (101)$$

где γ_{mn} вычисляется так же, как и $\alpha_{mn}^{(4)}$ (86), с заменой в K_m (87) слагаемых $y\Phi_n^{(3/2)}(x)$ на $x^2\Phi_m^{(5/2)}(x)$. Из дополнительного условия следует, что постоянная C_ζ выражается через коэффициенты D_0 и D_1. С учетом этого и свойства ортогональности полиномов $\Phi_m^{(5/2)}(x)$ коэффициент второй вязкости $\tilde{\zeta}$ (99) будет определяться только коэффициентами разложения D_0 и D_1.

Учитывая в разложении (100) только два полинома $\Phi_0^{(5/2)}(x)$ и $\Phi_1^{(5/2)}(x)$, находим решение системы (101). Мы не будем приводить подробные вычисления, а запишем лишь окончательный результат для (99) в двух предельных случаях:

при $x_a \ll 1$

$$\tilde{\zeta} = 276\,\frac{x_a^{3/2}}{a^3}\left(\frac{\Theta_C}{T}\right)^{3/2}; \qquad (102)$$

при $x_a \gg 1$

$$\tilde{\zeta} = 112\,\frac{1}{a^3}\left(\frac{\Theta_C}{T}\right)^{3/2}. \qquad (103)$$

Из сравнения (102), (103) с (95) следует, что в большом диапазоне значений параметра x_a коэффициент второй вязкости $\tilde{\zeta}$ сравним с коэффициентом первой вязкости $\tilde{\eta}$.

Воспользовавшись обобщенной H-теоремой Больцмана (1.66), можно получить следующие неравенства для коэффициентов вязкости и теплопроводности в газе магнонов:

$$\tilde{\eta} \geq \frac{1}{15T}\left\langle \frac{k^2 g^2}{\nu_k}\right\rangle;\quad \tilde{\zeta} \geq \frac{1}{9T}\left\langle \frac{1}{\nu_k}\left(kg - \omega\,\frac{\langle kg\omega\rangle}{\langle\omega^2\rangle}\right)^2\right\rangle;$$

$$\tilde{\kappa} \geq \frac{1}{3T^2}\left\langle \frac{g^2\omega^2}{\nu_k}\left(1 - \frac{k\langle kg\omega\rangle}{\langle k^2\rangle g\omega}\right)^2\right\rangle, \qquad (104)$$

где ν_k — частота столкновений магнонов [12]. Оценки коэффициентов переноса по нижней границе неравенств (104) дают правильные численные порядки величин. Убедимся в этом, например, в случае $x_a \gg 1$, для которого

$$\tilde{\eta} \geq 10\,\frac{1}{a^3}\left(\Theta_C/T\right)^{3/2},$$

$$\tilde{\zeta} \geq 4\pi^{5/2}\frac{1}{a^3}\left(\Theta_C/T\right)^{3/2},$$
$$\tilde{\kappa} \geq 18\pi^{3/2}\frac{\Theta_C}{a}\left(\Theta_C/T\right)^{3/2}, \qquad (105)$$

сравнив (105) со значениями (95), (103), (89).

6. Кинетические коэффициенты газа магнонов в антиферромагнетиках

Рассмотрим газ магнонов в двухподрешеточном АФМ «ЛП», основные характеристики которого приведены в первой части обзора.

Линеаризованное кинетическое уравнение (46) для магнонной функции распределения имеет вид

$$\frac{\overline{N}_p(\overline{N}_p+1)}{(x_p^2+x_{jp}^2)^{1/2}}\left[\frac{\alpha_{im}\kappa_m\kappa_l}{\kappa_t\alpha_{tn}\kappa_n}x_p^2-\frac{1}{3}\left(x_p^2+x_{jp}^2\right)\frac{\sum\limits_{j=a,b}\langle x^2\rangle_j}{\sum\limits_{j=a,b}\langle x^2+x_j^2\rangle_j}\delta_{li}\right]\frac{\partial u_l}{\partial x_i}=\left(\dot{N}_p\right)_c, \qquad (106)$$

где

$$x^2=\frac{\alpha_{il}k^2}{T^2}\kappa_i\kappa_l;\quad \vec{\kappa}=\mathbf{k}/k\ .$$

Слагаемое, пропорциональное градиенту температуры, в левой части кинетического уравнения содержит выражение $(\omega_1 g_{1i}-k_{1l}\alpha_{il})$, которое обращается в нуль, если воспользоваться приближенным законом дисперсии магнонов (2.128). Это означает, что для магнонов с таким законом дисперсии коэффициент магнонной теплопроводности обращается в нуль.

Коэффициент магнонной теплопроводности может быть отличен от нуля, если учесть следующие малые члены в разложении обменных интегралов по k в энергии магнонов либо учесть вклад фононов в уравнениях переноса магнонов и т.п.

Далее рассмотрим модель АФМ «ЛП» с изотропным законом дисперсии магнонов, для которого $\alpha_{il}=v_s^2\delta_{il}$, где v_s — скорость спиновых волн. В этом случае уравнение (106) можно записать в виде

$$\frac{\overline{N}_p(\overline{N}_p+1)}{(x_p^2+x_{jp}^2)^{1/2}}\left\{x_p^2\left[(\kappa_p)_i(\kappa_p)_l-\frac{1}{3}\delta_{il}\right]\nabla_l u_i-\frac{1}{3}\left[\left(x_p^2+x_{jp}^2\right)\frac{\sum\limits_{j=a,b}\langle x^2\rangle_j}{\sum\limits_{j=a,b}\langle x^2+x_j^2\rangle_j}-x_p^2\right]\operatorname{div}\mathbf{u}\right\}=\left(\dot{N}_p\right)_c, \qquad (107)$$

где в левой части (107) представлены слагаемые, ответственные за первую и вторую магнонные вязкости.

Линеаризованные интегралы столкновений представим в виде

$$\hat{I}_p\{\psi\}=\nu_0\left[\frac{\nu_0^{(3)}}{\nu_0}L_p^{(3)}\{\psi\}+\frac{\nu_0^{(4)}}{\nu_0}L^{(4)}\{\psi\}\right], \qquad (108)$$

где

$$\nu_0=\nu_0^{(3)}+\nu_0^{(4)};\ \nu_0^{(3)}=\frac{\mu_0 H_E}{\pi s}\left(\frac{T}{\Theta_N}\right)^3;$$

$$\nu_0^{(4)}=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\mu_0^2H_E^2}{s^2T}\left(\frac{T}{\Theta_N}\right)^6;$$

$L_p^{(3)}\{\psi\}$ и $L_p^{(4)}\{\psi\}$ описывают трех- и четырехмагнонные процессы взаимодействия и имеют вид, аналогичный (1.8), (1.9), в которых Ф (1, 2; 3, 4), Ф (1, 2; 3) — матричные элементы взаимодействия трех и четырех магнонов в безразмерной форме.

Для вычисления коэффициента первой вязкости в левой части уравнения (107) ограничимся первым слагаемым. Решение уравнения ищем в виде

$$\psi_1(x)=\frac{1}{\nu_0}\left(\kappa_{1i}\kappa_{1l}-\frac{1}{3}\delta_{il}\right)A^{(1)}(x)\frac{\partial u_i}{\partial x_l}. \qquad (109)$$

Подставляя (109) в (1.35), после интегрирования по углам получаем

$$\pi_{il}=-\tilde{\eta}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{il}\operatorname{div}\mathbf{u}\right). \qquad (110)$$

Легко проверить, что дополнительные условия (1.18) выполняются автоматически. Функция $A^{(1)}(x)$ находится из уравнения

$$\frac{\overline{N}_p(\overline{N}_p+1)}{(x_p^2+x_{jp}^2)^{1/2}}\,x_p^2\left[(\kappa_p)_i\,(\kappa_p)_l-\frac{1}{3}\,\delta_{il}\right]=\nu_0^{-1}\hat{I}_p\left\{\left(\kappa_i\kappa_l-\frac{1}{3}\,\delta_{il}\right)A^{(j)}(x)\right\}. \tag{111}$$

Разложим функцию $A^{(j)}(x)$ в ряд по полному набору ортогональных полиномов $\Phi_n^{(4)}(x^2, j)$, которые строятся на основе весовой функции

$$w^{(4)}(x, j)=\frac{x^4\exp\left((x^2+x_j^2)^{1/2}\right)}{(x^2+x_j^2)^{1/2}\left[\exp\left((x^2+x_j^2)^{1/2}\right)-1\right]^2}$$

с моментами

$$C_n^{(4)}(x_j)=\frac{(2n+3)!}{2^{n+1}(n+1)!}\,x_j^{n+2}\,S\left(n+1,\,n+2;\,x_j\right),$$

$$A^{(j)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(j)}\,\Phi_n^{(4)}(x^2, j). \tag{112}$$

Коэффициент первой магнонной вязкости $\tilde{\eta}$ вследствие ортогональности полиномов $\Phi_n^{(4)}(x^2, j)$ будет определяться только коэффициентами разложения $A_0^{(j)}$:

$$\tilde{\eta}=\frac{T^4}{30\pi^2\nu_0 v_s^3}\left(A_0^{(a)}\left\langle\frac{x^2}{(x^2+x_a^2)^{1/2}}\right\rangle_a+A_0^{(b)}\left\langle\frac{x^2}{(x^2+x_b^2)^{1/2}}\right\rangle_b\right). \tag{113}$$

Подставив $A^{(j)}(x)$ (112) в уравнение (111), умножив его на $[(\kappa_p)_i\,(\kappa_p)_l-1/3\,\delta_{il}]x_p^2\Phi_m^{(4)}(x^2, j)$ и проинтегрировав, получим бесконечную систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов

$$h_0^{(4)}(a)\,\delta_{m0}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{A_n^{(a)}\alpha_{mn}(a, a)+A_n^{(b)}\alpha_{mn}(a, b)\right\}; \tag{114}$$

$$h_0^{(4)}(b)\,\delta_{m0}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{A_n^{(a)}\alpha_{mn}(b, a)+A_n^{(b)}\alpha_{mn}(b, b)\right\},$$

где

$$\alpha_{mn}(j_1, j_2)=\frac{\nu_0^{(3)}}{\nu_0}\,\alpha_{mn}^{(3)}(j_1, j_2)+\frac{\nu_0^{(4)}}{\nu_0}\,\alpha_{mn}^{(4)}(j_1, j_2), \tag{115}$$

а $\alpha_{mn}^{(3)}(j_1, j_2)$ и $\alpha_{mn}^{(4)}(j_1, j_2)$ учитывают вклад от трех- и четырехмагнонных взаимодействий, выражения которых для конкретных процессов и численные расчеты будут приведены ниже.

При вычислении второй вязкости в левой части уравнения (107) оставляем последнее слагаемое, преобразовав которое, запишем это уравнение в следующем виде:

$$-\frac{1}{3}\,\frac{\overline{N}_p(\overline{N}_p+1)}{(x_p^2+x_{jp}^2)^{1/2}}\,C(a, b)\left[\frac{\langle x^2\rangle_{jp}}{\langle 1\rangle_{jp}}-x^2+\frac{D(a, b)}{\langle 1\rangle_{jp}}\right]\operatorname{div}\mathbf{u}=\hat{I}_p\{\psi\}, \tag{116}$$

где

$$C(a, b)=\frac{\sum\limits_{j=a,b}x_j^2\,\langle 1\rangle_j}{\sum\limits_{j=a,b}\langle x^2+x_j^2\rangle_j}, \tag{117}$$

$$D(a, b)=\frac{x_a^2\langle 1\rangle_a\langle x^2\rangle_b-x_b^2\langle 1\rangle_b\langle x^2\rangle_a}{x_a^2\langle 1\rangle_a+x_b^2\langle 1\rangle_b}, \tag{118}$$

причем $D(a, b)=-D(b, a)$.

Решение уравнения (116) ищем в виде

$$\psi^{(j)}=\frac{1}{3\nu_0}\left(x^2+x_j^2\right)^{1/2}C(a, b)\,B^{(j)}(x)\operatorname{div}\mathbf{u}. \tag{119}$$

Подставляя (119) в (1.35), получаем

$$\pi_{il}=-\tilde{\xi}\operatorname{div}\mathbf{u}\,\delta_{il}, \tag{120}$$

где коэффициент второй вязкости $\tilde{\xi}$ с учетом дополнительных условий (1.18) равен

$$\tilde{\xi}=\frac{1}{18\pi^2}\,\frac{T^4}{\nu_0 v_s^3}\,C(a, b)\sum_{j=a,b}\left\langle x_j^2\,B^{(j)}(x)\right\rangle_j. \tag{121}$$

Подставляя (119) в (116), получаем интегральное уравнение для нахождения функции $B^{(j)}(x)$:

$$\frac{\overline{N}_p(\overline{N}_p+1)}{(x_p^2+x_{jp}^2)^{1/2}}\left[\frac{\langle x^2\rangle_{jp}}{\langle 1\rangle_{jp}}-x_p^2+\frac{D(a, b)}{\langle 1\rangle_{jp}}\right]=\frac{1}{\nu_0}\,\hat{I}_p\left\{\left(x^2+x_j^2\right)^{1/2}B^{(j)}(x)\right\}. \tag{122}$$

Разложим функцию $B^{(j)}(x)$ в ряд по полному набору ортогональных полиномов $\Phi_n^{(2)}(x^2, j)$, которые построены на основе весовой функции

$$w^{(2)}(x, j)=\frac{x^2\exp\left((x^2+x_j^2)^{1/2}\right)}{\left[\exp\left((x^2+x_j^2)^{1/2}\right)-1\right]^2} \tag{123}$$

с моментами

$$C_n^{(2)}(j) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}\, x_j^{n+2}\, S\left(n,\, n+2;\, x_j\right).$$

$$B^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(j)}\, \Phi_n^{(2)}(x^2, j)\,. \qquad (124)$$

Коэффициент второй вязкости в силу ортогональности и соотношения, которое получается из дополнительного условия

$$\sum_{j=a,b}\left(x_j^2 C_1^2(j)\, B_0^{(j)} - h_1^{(2)}(j)\, B_1^{(j)}\right) = 0\,, \qquad (125)$$

будет определяться коэффициентами $B_0^{(j)}$:

$$\tilde{\zeta} = \frac{1}{18\pi^2}\frac{T}{\nu_0 a^3}\left(\frac{T}{\Theta_N}\right)^3 C(a,b)\sum_{j=a,b} x_j^2\, B_0^{(j)} C_0^{(2)}(j)\,. \qquad (126)$$

Умножая (122) на $(x_p^2 + x_{jp}^2)^{1/2}\Phi_m^2(x_p^2, j_\rho)$ и суммируя по $\mathbf{k}_p$, получаем бесконечную систему линейных уравнений для определения коэффициентов $B_0^{(j)}$, которые могут быть найдены из этой системы с учетом дополнительного условия (125):

$$\begin{cases} D(a,b) = \beta_{00}(a,a)\left(B_0^{(a)} - B_0^{(b)}\right) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\beta_{0n}(a,a)\, B_n^{(a)} + \beta_{0n}(a,b)\, B_n^{(b)}\right), \\ h_1^{(2)}(a)\,\delta_{m1} = \beta_{m0}(a,a)\left(B_0^{(a)} - B_0^{(b)}\right) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\beta_{mn}(a,a)\, B_n^{(a)} + \beta_{mn}(a,b)\, B_n^{(b)}\right), \\ h_1^{(2)}(b)\,\delta_{m1} = \beta_{m0}(b,a)\left(B_0^{(a)} - B_0^{(b)}\right) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\beta_{mn}(b,a)\, B_n^{(a)} + \beta_{mn}(b,b)\, B_n^{(b)}\right). \end{cases} \qquad (127)$$

где

$$\beta_{mn}(j_1, j_2) = \frac{\nu_0^{(3)}}{\nu_0}\beta_{mn}^{(3)}(j_1, j_2) + \beta_{mn}^{(4)}(j_1, j_2)\frac{\nu_0^{(4)}}{\nu_0},$$

а $\beta_{mn}^{(3)}(j_1, j_2)$ и $\beta_{mn}^{(4)}(j_1, j_2)$ учитывают вклад от трех- и четырехмагнонных процессов.

Далее, для простоты, учтем трехмагнонные процессы взаимодействия, которые существенны в области низких температур $T \sim 1$ К и внешних полей $H \gtrsim 100$ Э. Законами сохранения энергии и импульса разрешены процессы $a + a \Leftrightarrow b$, для которых матричный элемент взаимодействия имеет вид [13–14]

$$\Phi\left(1_a, 2_a; 3_b\right) = \frac{i}{2\sqrt{2s}}\, T a^{3/2}\sqrt{x_E}\, M\left(1_a, 2_a; 3_b\right), \qquad (128)$$

где

$$M\left(1_a, 2_a; 3_b\right) = \left(\frac{x_3^2 + x_b^2}{(x_1^2 + x_a^2)(x_2^2 + x_a^2)}\right)^{1/2}\left\{x_H + \frac{1}{4}\frac{x_H + x_D}{x_E^2}\left[\sqrt{(x_1^2 + x_a^2)(x_2^2 + x_a^2)} - x_b^2 - 3x_a^2\right]\right\}.$$

$$x_H = 2\mu_0 H/T\,;\quad x_D = 2\mu_0 H_D/T\,;\quad x_E = 2\mu_0 H_E/T\,;\quad x_{a,b} = \Delta_{a,b}/T\,.$$

Используя (128), коэффициенты $\alpha_{mn}^{(3)}(j_1, j_2)$, определяющие коэффициент первой вязкости $\tilde{\eta}$, запишем в виде

$$\begin{aligned} \alpha_{mn}^{(3)}(a,a) &= \hat{S}\left\{\Phi_m^{(4)}(x_1^2, a)\left[2\Phi_n^{(4)}(x_1^2, a) + \left(3(\vec{\kappa}_1\vec{\kappa}_3)^2 - 1\right)\Phi_n^{(4)}(x_2^2, a)\right]\right\}; \\ \alpha_{mn}^{(3)}(a,b) &= \alpha_{nm}^{(3)}(b,a) = -\hat{S}\left\{\Phi_m^{(4)}(x_1^2, a)\left[3(\vec{\kappa}_1\vec{\kappa}_3)^2 - 1\right]\Phi_n^{(4)}(x_3^2, a)\right\}; \\ \alpha_{mn}^{(3)}(b,b) &= \hat{S}\left\{\Phi_m^{(4)}(x_3^2, b)\,\Phi_n^{(4)}(x_3^2, b)\right\}, \end{aligned} \qquad (129)$$

где $\hat{S}$ — интегральный оператор вида

$$\hat{S} = \int_0^{\infty} dx_1 \int_{y_1}^{y_2} dx_2 \frac{x_1 x_2 (x_3^2 + x_b^2)^{1/2} \left| M(1_a, 2_a; 3_b) \right|^2}{\left[\exp\left((x_1^2 + x_a^2)^{1/2}\right) - 1\right] \left[\exp\left((x_2^2 + x_a^2)^{1/2}\right) - 1\right] \left[1 - \exp\left(-(x_3^2 + x_b^2)^{1/2}\right)\right]} \quad (130)$$

$$(\vec{\kappa}_1 \vec{\kappa}_2) = \frac{\left(x_a^2 - x_b^2/2\right) + \left[\left(x_1^2 + x_a^2\right)\left(x_2^2 + x_a^2\right)\right]^{1/2}}{x_1 x_2}; \quad (\vec{\kappa}_1 \vec{\kappa}_3) = \frac{x_1 + x_2(\vec{\kappa}_1 \vec{\kappa}_2)}{x_3};$$

$$x_3 = x_1 + x_2; \quad y_1 = \frac{x_b^2 \left[(x_1^2 + x_a^2)^{1/2} - x_1\right]}{2x_a}; \quad y_2 = \frac{x_b^2 \left[(x_1^2 + x_a^2)^{1/2} + x_1\right]}{2x_a}.$$

Если в разложении (112) ограничиться полиномами нулевого порядка $\Phi_0^{(4)}(x^2, j)$, то, решив систему (114) относительно $A_0^{(a)}$ и $A_0^{(b)}$, получим

$$\tilde{\eta} = \frac{1}{30\pi^2} \frac{T}{a^3 \nu_0^{(3)}} \left(\frac{T}{\Theta_N}\right)^3 \frac{\left[\left(C_0^{(4)}(a)\right)^2 \alpha_{00}^{(3)}(b, b) + \left(C_0^{(4)}(b)\right)^2 \alpha_{00}^{(3)}(a, a) - 2C_0^{(4)}(a) C_0^{(4)}(b)\, \alpha_{00}^{(3)}(a, b)\right]}{\alpha_{00}^{(3)}(a, a)\, \alpha_{00}^{(3)}(b, b) - \left(\alpha_{00}^{(3)}(a, b)\right)^2}. \quad (131)$$

В общем случае величина коэффициента $\tilde{\eta}$ зависит от многих характеристик антиферромагнетика, и для каждого конкретного антиферромагнетика при соответствующих значениях температуры и внешнего магнитного поля значения этого коэффициента могут быть вычислены по общей схеме. В наиболее интересном случае температур $\Delta_a \ll T \ll \Delta_b$ и внешних магнитных полей $H \gtrsim (H_A H_D)/H_E$ численные значения коэффициента $\tilde{\eta}$ можно найти, воспользовавшись следующей экстраполяционной формулой, дающей правильный порядок величины:

$$\tilde{\eta} = 7 \cdot 10^{-3} \frac{s\hbar}{a^3} \left(\frac{T}{\mu_0 H_E}\right) \left(\frac{T}{\mu_0 H}\right)^2 \times \left(1 + \frac{T^2}{2\Delta_b^2}\right) \exp\left(\Delta_b / 2T\right). \quad (132)$$

Для хорошо изученного экспериментально антиферромагнетика $MnCO_3$ с параметрами $H_E = 320$ кЭ; $H_A = 3{,}04$ кЭ; $H_D = 4{,}4$ кЭ; $\Theta_N = 15{,}2$ K; $\Delta_b \simeq 5{,}74$ K; $a = 5{,}83$ Å; $s = 5/2$ вычисления коэффициента $\tilde{\eta}$ по формуле (131) дают при $T = 1$ K и $T = 5$ K соответственно следующие значения:
при $H = 10^2$ Э

$$\tilde{\eta} = 4{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ г/см·с}; \quad \tilde{\eta} = 4{,}41 \cdot 10^{-2} \text{ г/см·с};$$

при $H = 10^3$ Э

$$\tilde{\eta} = 3{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ г/см·с}; \quad \tilde{\eta} = 4{,}51 \cdot 10^{-4} \text{ г/см·с}.$$

Эти значения отличаются от полученных по экстраполяционной формуле (132) менее чем на 20%.

Коэффициенты $\beta_{mn}^{(3)}(j_1, j_2)$, необходимые при вычислении коэффициента второй вязкости $\tilde{\zeta}$, определяются следующим образом:

$$\beta_{mn}^{(3)}(a, a) = \hat{S}\left\{\left(x_1^2 + x_a^2\right)^{1/2} \Phi_m^{(2)}(x_1^2, a) \left[\left(x_1^2 + x_a^2\right)^{1/2} \Phi_n^{(2)}(x_1^2, a) + \left(x_2^2 + x_a^2\right)^{1/2} \Phi^{(2)}(x_2^2, a)\right]\right\};$$

$$\beta_{mn}^{(3)}(a, b) = \beta_{nm}^{(3)}(b, a) = -\hat{S}\left\{\left(x_1^2 + x_a^2\right)^{1/2} \Phi_m^{(2)}(x_1^2, a) \left(x_3^2 + x_b^2\right)^{1/2} \Phi_n^{(2)}(x_3^2, b)\right\}; \quad (133)$$

$$\beta_{mn}^{(3)}(b, b) = \hat{S}\left\{\left(x_3^2 + x_b^2\right) \Phi_m^{(2)}(x_3^2, b)\, \Phi_n^{(2)}(x_3^2, b)\right\}.$$

Ограничившись в разложении (124) первыми двумя полиномами $\Phi_n^{(2)}(x^2, j)$ и решив систему (127) относительно $B_0^{(a)}$ и $B_0^{(b)}$, найдем коэффициент $\tilde{\zeta}$, зависимость которого от коэффициентов $\beta_{mn}^{(3)}$ имеет громоздкий вид, поэтому мы его здесь не приводим. Коэффициент второй вязкости $\tilde{\zeta}$ для $MnCO_3$

при температурах $T = 1$ K и $T = 5$ K равен соответственно
при $H = 10^2$ Э

$$\tilde{\xi} = 2{,}15 \cdot 10^{-4} \text{ г/см·с}; \quad \tilde{\xi} = 5{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ г/см·с},$$

при $H = 10^3$ Э

$$\tilde{\xi} = 1{,}9 \cdot 10^{-4} \text{ г/см·с}; \quad \tilde{\xi} = 5{,}8 \cdot 10^{-6} \text{ г/см·с}.$$

Заключение

В обзоре не рассматривались явления, связанные с взаимодействием квазичастиц с примесями, дефектами, дислокациями, основное внимание уделялось чистым монокристаллам, для которых эти эффекты не существенны. Их можно учесть в общей теории, введя соответствующие интегралы столкновений.

С помощью общей теории газодинамики квазичастиц можно рассмотреть также коллективные возбуждения в электрон-фононных подсистемах в металлах и полупроводниках, в частности колебания типа вторичных волн, вопрос о существовании которых рассматривался в работах [15–17].

Обилие литературы, посвященной теоретическому и экспериментальному изучению рассмотренных в обзоре вопросов, заставило нас ограничиться лишь самыми необходимыми ссылками. Мы не претендуем на полноту приведенной библиографии и приносим извинения авторам работ, которые не цитировались.

Авторы выражают благодарность Н. Р. Беляеву за помощь в проведении численных расчетов.

Эта работа была частично поддержана Международной соросовской программой поддержки образования в области точных наук (ISSEP).

1. В. Ф. Алексин, Н. Р. Беляев, В. Д. Ходусов, в сб.: *Проблемы теоретической физики*, Наукова думка, Киев (1991) с. 16-31.
2. Erdelyi A. et. al., *Higher trancedental functions* , Mc Graw-Hill Book Co., New York (1953) v. 1, p. 29.
3. С. Чепмен, Г. Каулинг, *Математическая теория неоднородных газов*, Изд-во иностр. лит., Москва (1960).
4. В. И. Крылов, *Приближенные вычисления интегралов*, Наука, Москва (1967).
5. Л. Д. Ландау, Ю. Б. Румер, *Phys. Z. Sow.* **11**, 18 (1937).
6. И. Я. Померанчук, *ЖЭТФ* **11**, 246 (1941).
7. И. Я. Померанчук, *ЖЭТФ* **11**, 455 (1941).
8. И. Я. Померанчук, *ЖЭТФ* **12**, 419 (1942).
9. А. И. Ахиезер, В. Ф. Алексин, В. Д. Ходусов, *ЖЭТФ* **88**, 866 (1985).
10. *Акустические кристаллы*, Справочник под ред. М. Шаскольского, Наука, Москва (1967).
11. А. И. Ахиезер, В. Ф. Алексин, В. Д. Ходусов, в сб.: *Проблемы физической кинетики и физики твердого тела*, Наукова думка, Киев, (1990) с. 15–29.
12. В. Ф. Алексин, В. Д. Ходусов, *ФТТ* **28**, 242 (1986).
13. В. Г. Барьяхтар, В. Л. Соболев, А. Г. Квирикадзе, *ЖЭТФ* 65, 790 (1973).
14. В. Г. Барьяхтар, В. П. Краснов, В. Л. Соболев, *ФТТ* **15**, 3039 (1968).
15. Р. Н. Гуржи, В. М. Конторович, *ЖЭТФ*, **55** 1105 (1968).
16. Р. Н. Гуржи, В. М. Конторович, *ФТТ* **11**, 3109 (1969).
17. В. М. Конторович, *УФН* **142**, 265 (1984).

Gas dynamics of quasi-particles. II. Kinetic coefficients in the equations of quasi-particle transfer

A. I. Akhieser, V. F. Aleksin, and V. D. Khodusov

Kinetic coefficients in the hydrodynamic equations for phonons, magnons and their mixtures have been calculated. The special functions and systems of orthogonal polynomials derived on the basis of the weighting function typical for the Bose—Einstein statistics have been used.