Физика низких температур, 1997, т. 23, № 4, с. 389–398

Взаимодействие электромагнитных волн в пластине жесткого сверхпроводника при одностороннем возбуждении

И. О. Любимова

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

И. В. Балтага, А. А. Кац, В. А. Ямпольский

Институт радиофизики и электроники НАН Украины, Украина, 310085, г. Харьков, , ул. Акад. Проскуры, 12

Ф. Перес-Родригес

Instituto de Fisica «Luis Rivera Terrazas» Universidad Autonoma de Puebla, Apdo. Post. J-48, Puebla, Pue 72570, Mexico

Статья поступила в редакцию 16 октября 1996 г.

Теоретически исследовано нелинейное взаимодействие радиоволн с отличающимися частотами в сверхпроводящей пластине при ее одностороннем облучении. Анализ взаимодействия волн проведен в рамках модели критического состояния. Показано, что специфическая нелинейность этой модели приводит к необычному эффекту во взаимодействии волн — к скачкам во временной зависимости электрического поля на границе образца. Сформулированы необходимые условия возникновения скачков, а также проанализирована роль диэлектрических свойств подложки в предсказанном явлении.

Теоретично досліджено нелінійну взаємодію радіохвиль з різними частотами в надпровідниковій пластині при однобічному збудженні. Аналіз взаємодії хвиль проведено у межах моделі критичного стану. Виявлено, що специфічна нелінійність цієї моделі приводить до незвичайного ефекту во взаємодії хвиль — до стрибків у часовій залежності електричного поля на межі зразка. Сформульовано необхідні умови для виникнення стрибків, а також проаналізовано роль діелектричних властивостей підкладки у передбаченому явищі.

PACS: 74.60 Jg, 74.25.Nf

1. Введение

Нелинейность материального уравнения, связывающего плотность тока в проводнике с электромагнитным полем, приводит к нарушению принципа суперпозиции и, как следствие, к нелинейному взаимодействию радиоволн. Ясно, что в таком взаимодействии проявляются специфические особенности конкретного механизма нелинейности среды. Например, в чистых металлах при низких температурах наиболее эффективной является магнитодинамическая нелинейность, связанная с воздействием магнитного поля радиоволны на движение электронов проводимости (см., например, обзор [1] и цитированную там литературу). Этот своеобразный механизм нелинейности приводит к довольно необычному эффекту и во взаимодействии радиоволн. Оказывается, что низкочастотный поверхностный импеданс металла испытывает гистерезисные скачки в функции амплитуды высокочастотного сигнала [2,3].

С этой точки зрения представляет интерес изучение нелинейного взаимодействия радиоволн в жестких сверхпроводниках. Наиболее важным фактором, определяющим нелинейные свойства этих сред, является пиннинг абрикосовских вихрей, проникающих в образец в магнитных полях выше первого критического поля H_{c1}. В этом случае пространственное распределение магнитной индукции **B** в образце хорошо описывается моделью критического состояния [4,5]. Согласно этой модели, абсолютная величина плотности тока j не зависит от величины электрического поля E, а направление вектора **j** совпадает с направлением **E**. Эта сингулярность материального уравнения приводит к хорошо известному разрыву в распределении плотности тока **j** и к излому в распределении магнитной индукции **B** в точке, в которой

© И. О. Любимова, И. В. Балтага, А. А. Кац, В. А. Ямпольский, Ф. Перес-Родригес, 1997

электрическое поле E обращается в нуль. Оказывается, что описанные особенности распределений плотности тока и магнитной индукции обеспечивают необычный отклик жесткого сверхпроводника на электромагнитный сигнал в условиях взаимодействия двух радиоволн с отличающимися частотами. В работах [6,7] предсказаны, экспериментально обнаружены и исследованы скачки во временной зависимости электрического поля $E(t)$ на поверхности образца, возникающие в результате такого взаимодействия.

Как теоретические расчеты, так и условия экспериментального наблюдения скачков $E(t)$ в [6,7] относятся к случаю двустороннего, симметричного по магнитному полю электромагнитного возбуждения жесткого сверхпроводника. Однако в экспериментальных исследованиях иногда оказывается более удобным другой способ возбуждения, когда образец в виде пленки на подложке облучается лишь с одной его стороны (см., например, [8,9]). При таком возбуждении важную роль в электромагнитном отклике образца играют размерный эффект и диэлектрические свойства подложки [9,10]. В ряде случаев свойства подложки оказывают принципиальное влияние на изучаемые эффекты, приводя к новым особенностям в поведении системы. Поэтому представляется важным исследование нелинейного взаимодействия радиоволн в пластине жесткого сверхпроводника при ее одностороннем возбуждении. Теоретическому анализу данной проблемы и посвящена настоящая работа.

2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечную плоскопараллельную пластину жесткого сверхпроводника толщиной d, находящуюся на подложке с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon > 1$. Ось x направлена по нормали к граням пластины. Свободная граница сверхпроводника совпадает с плоскостью $x = 0$, а граница раздела сверхпроводник–подложка — с плоскостью $x = d$. Поверхность $x = 0$ облучается внешним электромагнитным полем. Переменное магнитное поле направлено вдоль поверхности пластины (вдоль оси z) и на границе $x = 0$ зависит от времени следующим образом:

$$H(t) = H_1 \cos(\omega_1 t) + H_2 \cos(\omega_2 t + \chi). \quad (1)$$

Для простоты будем считать, что частоты ω_1 и ω_2 двух волн в (1) соизмеримы. Для определенности полагаем $\omega_2 > \omega_1$. В рассматриваемой геометрии индукция B и электрическое поле E зависят от одной пространственной координаты x. При этом вектор B направлен вдоль оси z, а вектор E — вдоль оси y:

$$\mathbf{B}(x, t) = \{0, 0, B(x, t)\}; \quad \mathbf{E}(x, t) = \{0, E(x, t), 0\}. \quad (2)$$

Наша цель состоит в вычислении электрического поля на поверхности $x = 0$,

$$E(t) = E(0, t). \quad (3)$$

Электродинамические свойства жесткого сверхпроводника мы будем рассматривать в рамках модели критического состояния [4,5], которая, как известно, хорошо применима в довольно широком интервале изменений амплитуд и частот волны (см., например, [11]). В этой модели в выбранной нами геометрии уравнения Максвелла записываются в форме

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \qquad \frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{4\pi}{c} j_c \operatorname{sgn} E. \quad (4)$$

Здесь j_c — критическая плотность тока, которую для простоты считаем не зависящей от магнитной индукции; c — скорость света.

Вопрос о знаке плотности тока в областях, где электрическое поле E равно нулю, решается следующим образом. В модели критического состояния предполагается, что в таких областях плотность тока остается такой же, какой она была в последний момент предыстории при $E \neq 0$, т.е. распределение магнитной индукции оказывается «замороженным».

Граничные условия к уравнениям (4) имеют вид

$$B(0, t) = H(t); \quad B(d, t) = \varepsilon^{1/2} E(d, t). \quad (5)$$

Для анализа системы (4), (5) удобно ввести безразмерные переменные:

$$\begin{gathered} h_1 = H_1/H_p, \; h_2 = H_2/H_p, \; \tau = \omega_1 t, \; \xi = x/d, \\ H_p = 4\pi j_c d/c, \qquad b(\xi, \tau) = B(x, t)/H_p, \\ F(\xi, \tau) = (c/\omega_1 d H_p) E(x, t), \; k = \omega_2/\omega_1, \\ b_s(\tau) = h_1 \cos(\tau) + h_2 \cos(k\tau + \chi). \end{gathered} \quad (6)$$

Здесь H_p представляет собой характерное значение внешнего магнитного поля, при котором оно проникает в весь объем пластины, т.е. достигает границы $x = d$ ($\xi = 1$). В новых обозначениях уравнения (4), (5) принимают форму

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -\frac{\partial b}{\partial \tau}, \; \frac{\partial b}{\partial \xi} = -\operatorname{sgn} F, \quad (7)$$

$$b(0, \tau) = b_s(\tau), \; b(1, \tau) = \alpha F(1, \tau), \; \alpha = \omega_1 \varepsilon^{1/2} d/c.$$

Решение поставленной проблемы в существенной мере зависит от того, проникает ли внешнее переменное поле полностью в образец (т.е. от того, существует ли промежуток времени, когда $|H(t)| > H_p$) или нет. Поэтому в дальнейшем отдельно рассмотрим эти случаи.

3. Малые амплитуды радиоволн

Если амплитуды h_1 и h_2 малы настолько, что во все времена

$$\left|b_s(\tau)\right| < 1 \text{, или } \left|H(t)\right| < H_p \text{,} \qquad (8)$$

то распределение электромагнитного поля в образце не чувствительно к диэлектрическим свойствам подложки. Поэтому анализ взаимодействия радиоволн в этом случае оказывается более простым. Тем не менее даже в такой ситуации взаимодействие волн, как правило, приводит к необычному явлению — скачкам во временной зависимости электрического поля $F(\tau) = F(0, \tau)$ на поверхности образца. Для того чтобы продемонстрировать природу возникающих скачков $F(\tau)$, проследим эволюцию распределения индукции $b(\xi, \tau)$. В этом анализе мы будем отдельно рассматривать интервалы монотонного изменения внешнего магнитного поля $b_s(\tau)$. Пусть в моменты времени $\tau^{(0)}, \tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \ldots$ функция $b_s(\tau)$ принимает последовательно экстремальные значения $b_s^{(0)}, b_s^{(1)}, b_s^{(2)}, \ldots$ Предположим, что $b_s(\tau)$ в момент $\tau^{(0)}$ достигает абсолютного максимума. Подбором параметров h_1, h_2, k и χ в (6) нетрудно добиться, чтобы экстремальные значения $b_s^{(0)}, b_s^{(1)}, b_s^{(2)}$ и $b_s^{(3)}$ удовлетворяли следующим неравенствам:

$$b_s^{(0)} \geq b_s^{(2)}, -b_s^{(1)}; \qquad b_s^{(3)} < b_s^{(1)}. \qquad (9)$$

Следует подчеркнуть, что эти условия выбраны нами лишь в качестве примера и они вовсе не обязательны для возникновения скачков $F(\tau)$. Более того, как показывает анализ, скачки $F(\tau)$ не возникают лишь при специальном подборе параметров h_1, h_2, k и χ (например, при $k = 2$, $\chi = 0$).

В начальный момент времени $\tau = \tau^{(0)}$ магнитная индукция $b(\xi, \tau)$ как функция τ достигает своего абсолютно максимального значения не только на границе $\xi = 0$, но и в любой другой точке образца. Величина этого максимума $b(\xi, \tau^{(0)})$ в каждой точке ξ различна:

$$b(\xi, \tau^{(0)}) = \begin{cases} b_s^{(0)} - \xi, & 0 < \xi < \bar{\xi} \\ 0 & \bar{\xi} < \xi < 1. \end{cases} \qquad (10)$$

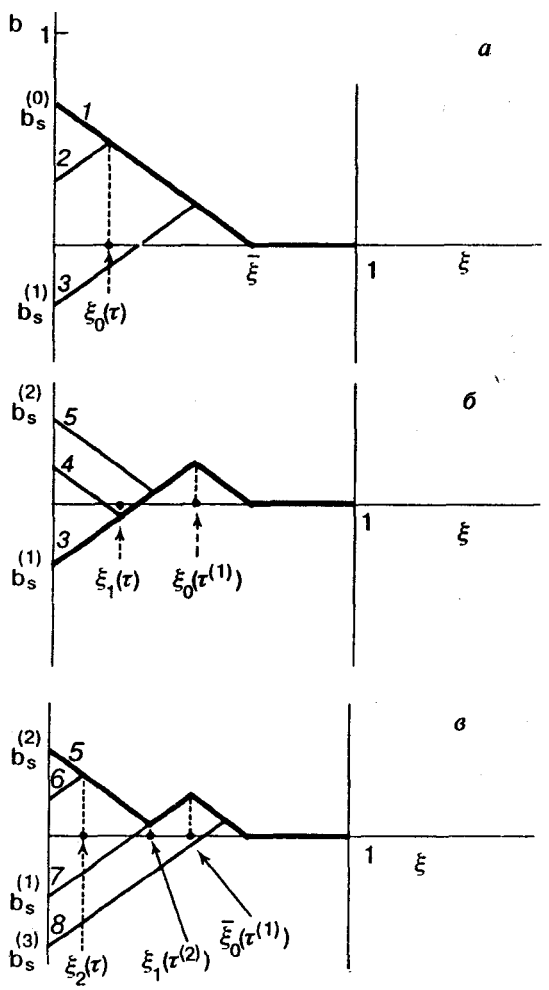

Рис. 1. Эволюция пространственного распределения магнитной индукции $b(\xi, \tau)$ на различных интервалах монотонности внешнего поля $b_s(\tau)$: $\tau^{(0)} < \tau < \tau^{(1)}$ (*а*); $\tau^{(1)} < \tau < \tau^{(2)}$ (*б*); $\tau^{(2)} < \tau < \tau^{(3)}$ (*в*).

Глубина проникновения поля $\bar{\xi}$ находится из требования непрерывности $b(\xi, \tau^{(0)})$: $\bar{\xi} = b_s^{(0)}$. В момент времени $\tau = \tau^{(0)}$ производная $\partial b(\xi, \tau)/\partial\tau$ всюду равна нулю. Поэтому из (7) следует, что функция $F(\xi, \tau)$также равна нулю во всем объеме образца. Распределение(10) схематически изображено жирной линией на рис. 1,*а*.

При $\tau^{(0)} < \tau < \tau^{(1)}$ внешнее поле $b_s(\tau)$ уменьшается и в образец начинает проникать электрическое поле. В результате пластина оказывается разделенной на две области. В приповерхностном слое $0 < \xi < \xi_0(\tau)$ электрическое поле отлично от нуля. Здесь магнитное поле уменьшается и, согласно системе уравнений (7), знак производной $\partial b/\partial\xi$ оказывается положительным. В области $\xi_0(\tau) < \xi < 1$ электрическое поле равно нулю и распределение

$b(\xi, \tau)$ остается замороженным, т.е. сохраняет тот же вид, что и в момент $\tau = \tau^{(0)}$. Таким образом, на первом интервале монотонности функции $b_s(\tau)$ распределение индукции $b(\xi, \tau)$ описывается выражениями

$$b(\xi,\tau) = \begin{cases} b_s(\tau) + \xi\,, & 0 < \xi < \xi_0(\tau) \\ b_s^{(0)} - \xi\,, & \xi_0(\tau) < \xi < \overline{\xi} \\ 0\,, & \overline{\xi} < \xi < 1\,. \end{cases} \qquad (11)$$

Точка излома $\xi_0(\tau)$ функции $b(\xi, \tau)$ (11) задается формулой

$$\xi_0(\tau) = \frac{1}{2}\left[b_s^{(0)} - b_s(\tau)\right]. \qquad (12)$$

Отметим, что из (9) и (12) следует неравенство $\xi_0(\tau) < \overline{\xi}$. Последовательность зависимостей, демонстрирующих изменение со временем распределения $b(\xi, \tau)$ на первом интервале монотонности функции $b_s(\tau)$, показана ломаными линиями *1–3* на рис. 1,*а*.

В момент времени $\tau = \tau^{(1)}$ электрическое поле опять повсюду в образце обращается в нуль. Соответствующий график $b(\xi,\tau^{(1)})$ является стартовым для анализа поведения $b(\xi, \tau)$ на втором интервале монотонного изменения $b_s(\tau)$ (жирная ломаная линия на рис. 1,*б*). Обратим внимание на характерный «зубец» на графике $b(\xi, \tau^{(1)})$ в окрестности $\xi = \xi_0(\tau^{(1)})$, который, как будет видно ниже, играет принципиальную роль в эффекте возникновения скачков $F(\tau)$.

Линии *3–5* на рис. 1,*б* демонстрируют эволюцию распределения $b(\xi, \tau)$ на втором интервале монотонности функции $b_s(\tau)$. Образец опять оказывается разделенным на две области. В слое $0 < \xi < \xi_1(\tau)$ электрическое поле отлично от нуля, $F(\xi, \tau) > 0$. Здесь $b(\xi, \tau) = b_s(\tau) - \xi$. В интервале $\xi_1(\tau) < \xi < 1$ поле $F(\xi, \tau) = 0$, а индукция $b(\xi, \tau)$ остается замороженной, т.е. совпадает с $b(\xi, \tau^{(1)})$. Точка $\xi_1(\tau)$ определяется формулой

$$\xi_1(\tau) = \frac{1}{2}\left[b_s(\tau) - b_s^{(1)}\right]. \qquad (13)$$

В конце второго интервала монотонности функции $b_s(\tau)$, т.е. при $\tau = \tau^{(2)}$, на графике $b(\xi, \tau)$ формируется зигзагообразная особенность (линия *5* на рис. 1,*б*). Этот график является опорным для анализа динамики $b(\xi, \tau)$ на самом важном, третьем интервале монотонности $b_s(\tau)$.

В интервале $\tau^{(2)} < \tau < \tau^{(3)}$ распределение $b(\xi, \tau)$ меняется от линии *5* до линии *8* на рис. 1,*в*. Очень важно, что, согласно (9), поле $b_s(\tau)$ в процессе изменения проходит через свое предыдущее минимальное значение $b_s(\tau^{(1)}) = b_s^{(1)}$. Благодаря этому факту существует момент времени $\tau = \tau_j$, когда распределение $b(\xi, \tau_j)$ в точности совпадает с $b(\xi, \tau^{(1)})$ (ср. ломаные *7* на рис. 1,*в* и *3* на рис. 1,*б*). В этот момент времени плоскость $\xi = \xi_2(\tau)$, разделяющая образец на две области $\partial b/\partial\tau < 0$ и $\partial b/\partial\tau = 0$, скачком меняет свое положение. Действительно, при $\tau < \tau_j$

$$\xi_2(\tau) = \frac{1}{2}\left[b_s^{(2)} - b_s(\tau)\right], \qquad (14)$$

а при $\tau > \tau_j$ формула для $\xi_2(\tau)$ совпадает с выражением (12) для ξ_0 (см. рис. 1,*в*). Скачок положения плоскости $\xi = \xi_2(\tau)$ приводит к скачку производной магнитного потока

$$\Phi(\tau) = \int_0^1 b(\xi, \tau)d\xi$$

по времени. В свою очередь, скачок производной магнитного потока по времени, согласно закону Фарадея (см. первое уравнение в (7)), означает скачок поля $F(\tau)$.

Обратим внимание, что такие скачки величины $F(\tau)$ полностью аналогичны скачкам электрического поля на поверхности сверхпроводящей пластины толщиной $2d$, облучаемой в условиях (8) полем (1) с обеих ее сторон. Действительно, в условиях (8) поля, проникающие в образец с двух сторон, не перекрываются и не взаимодействуют друг с другом. Поэтому распределение электромагнитного поля в одной из половин пластины толщиной $2d$ при ее двустороннем возбуждении в точности совпадает с распределением $B(x, t)$ в пластине толщиной d при одностороннем возбуждении.

Поведение электрического поля $F(\tau)$ в пластине при двустороннем возбуждении изучено в работе [7]. Здесь мы приведем результат вычисления $F(\tau)$:

$$F(\tau) = \left|\frac{db_s(\tau)}{d\tau}\right| \left[-\overline{b}(\tau) + b_s(\tau)\right], \qquad (15)$$

$\overline{b}(\tau)$ представляет собой значение безразмерной индукции $b(\xi, \tau)$ в ближайшей к поверхности $\xi = 0$ точке излома графика $b(\xi, \tau)$. Процедура получения выражения для $\overline{b}(\tau)$ подробно изложена в [7]. На рис. 2 в качестве примера приведен результат расчета $F(\tau)$ для случая $h_1 = 0{,}4$, $h_2 = 0{,}4$, $k = 3, \chi = 0$.

4. Большие амплитуды радиоволн

Перейдем к анализу ситуации, когда амплитуды радиоволн h_1 и h_2 велики настолько, что переменное магнитное поле присутствует во всем объеме сверхпроводника. Для этого достаточно, чтобы значение абсолютного максимума $b_s(\tau)$ превышало единицу,

$$b_s^{(0)} > 1 . \qquad (16)$$

Как и в разд. 3, анализ распределения электромагнитного поля мы будем проводить отдельно для каждого интервала монотонного изменения внешнего поля $b_s(\tau)$. В рассматриваемом случае закон Фарадея в (7) удобно представить в интегральной форме:

$$F(\xi, \tau) = F(1, \tau) + \int_{\xi}^{1} d\xi' \dot{b}(\xi', \tau) , \qquad (17)$$

где точка означает частную производную по τ. Формула (17) демонстрирует принципиальное отличие случаев больших и малых амплитуд. В рассмотренной в разд. 3 ситуации малых амплитуд электромагнитный сигнал не достигал границы сверхпроводник–подложка, и величина $F(1, \tau)$ при всех значениях τ была равна нулю. В условиях (16) благодаря полной прозрачности образца $F(1,\tau) \neq 0$. Как будет показано ниже, этот факт принципиально меняет динамику изменения распределения поля волны с течением времени.

Как и в случае малых амплитуд, в начальный момент $\tau = \tau^{(0)}$ магнитная индукция $b(\xi, \tau^{(0)})$ в каждой точке образца достигает максимального значения. Однако в условиях (16) в образце отсутствует область с $b(\xi, \tau) \equiv 0$. В отличие от распределения (10), индукция $b(\xi, \tau^{(0)})$ всюду описывается формулой

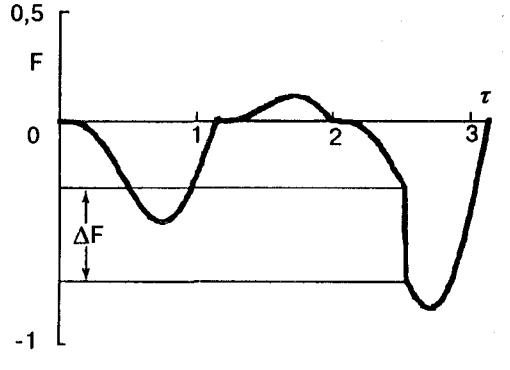

Рис. 2. Функция $F(\tau)$ при $h_1 = h_2 = 0{,}4$, $\omega_2/\omega_1 = 3, \chi = 0$.

$$b(\xi, \tau^{(0)}) = b_s^{(0)} - \xi . \qquad (18)$$

В момент времени $\tau^{(0)}$ величина $\dot{b}(\xi, \tau)$ всюду равна нулю. Поэтому в формуле (17) отличным от нуля оказывается лишь первое слагаемое, т.е. электрическое поле однородно. Из (7), (17) и (18) следует, что

$$F(\xi, \tau^{(0)}) = (b_s^{(0)} - 1)/\alpha > 0 . \qquad (19)$$

С течением времени величина первого слагаемого в (17) начинает уменьшаться. Кроме того, начинает расти по абсолютной величине отрицательное интегральное слагаемое в (17). Однако существует промежуток времени, в течение которого электрическое поле $F(\xi, \tau)$ остается всюду положительным. Из системы (7) нетрудно определить, что на этом временном интервале электромагнитное поле описывается формулами

$$b(\xi, \tau) = b_s(\tau) - \xi , \qquad (20)$$

$$F(\xi, \tau) = \dot{b}_s(\tau)(1 - \xi) + [b_s(\tau) - 1]/\alpha . \qquad (21)$$

Распределения полей сохраняют вид (20), (21) вплоть до момента времени $\tau = \tau_k$, когда электрическое поле $F(\xi, \tau)$ впервые обращается в нуль. Это обращение происходит в точке $\xi = 0$. Поэтому из (21) получается следующее уравнение для нахождения τ_k:

$$\alpha \dot{b}_s(\tau_k) + b_s(\tau_k) - 1 = 0 . \qquad (22)$$

Момент τ_k представляет собой ближайший к $\tau^{(0)}$ корень уравнения (22). Обратим внимание на то, что, в отличие от случая малых амплитуд, только при $\tau > \tau_k$ на графике $b(\xi, \tau)$ появляется характерный для модели критического состояния излом. Действительно, при $\tau > \tau_k$ образец оказывается разделенным на две области. В слое $\xi < \xi_0$ электрическое поле $F(\xi, \tau) < 0$ и, согласно уравнению критического состояния в (7), $\partial b(\xi, \tau)/\partial \xi > 0$. В оставшейся области $\xi_0 < \xi < 1$ поле $F(\xi, \tau)$ остается положительным. Здесь $\partial b(\xi, \tau)/\partial \xi$ сохраняет отрицательный знак. Распределение магнитной индукции может быть записано в виде

$$b(\xi, \tau) =$$

$$= \begin{cases} b_s(\tau) + \xi , & 0 < \xi < \xi_0 \\ b_s(\tau) + 2\xi_0(\tau) - \xi = b(1, \tau) + 1 - \xi , & \xi_0 < \xi < 1 . \end{cases} \qquad (23)$$

Мы использовали две формы записи для $b(\xi, \tau)$ в области $\xi_0 < \xi < 1$. Одна из них явно выражает не-

прерывность $b(\xi, \tau)$ в точке $\xi = \xi_0$, а другая «привязывает» распределение $b(\xi, \tau)$ к значению индукции в точке $\xi = 1$. Из (17) с учетом обращения $F(\xi, \tau)$ в нуль в точке $\xi = \xi_0$ нетрудно получить распределение электрического поля

$$F(\xi, \tau) = \begin{cases} \dot{b}_s(\tau)(\xi_0 - \xi), & 0 < \xi < \xi_0 \\ b(1, \tau)/\alpha + (1 - \xi)\dot{b}(1, \tau), & \xi_0 < \xi < 1. \end{cases} \quad (24)$$

Связь положения точки излома $\xi = \xi_0(\tau)$ с индукцией $b(1, \tau)$ находим с помощью (23):

$$\xi_0(\tau) = \frac{1}{2}[1 + b(1, \tau) - b_s(\tau)]. \quad (25)$$

Условие непрерывности электрического поля $F(\xi, \tau)$ в точке $\xi = \xi_0(\tau)$ дает уравнение для нахождения $b(1, \tau)$:

$$2b(1, \tau) + \alpha[1 + b_s(\tau) - b(1, \tau)]\dot{b}(1, \tau) = 0. \quad (26)$$

Начальное условие к этому уравнению устанавливаем, полагая в (20) $\tau = \tau_k$, $\xi = 1$:

$$b(1, \tau) = b_s(\tau_k) - 1. \quad (27)$$

Таким образом, формулы (23)–(27) задают распределения электрического и магнитного полей при $\tau > \tau_k$. Обратим внимание на то, что в отличие от случая малых амплитуд, в условиях (16) существование излома на графике $b(\xi, \tau)$ вовсе не означает наличие пространственных областей с замороженным распределением магнитной индукции. Действительно, магнитная индукция (23) убывает с течением времени не только в области $0 < \xi < \xi_0$, но и при $\xi_0 < \xi < 1$. Анализ уравнения (26) с начальным условием (27) показывает, что до тех пор, пока на графике $b(\xi, \tau)$ существует один и только один излом, значение $b_s(1, \tau)$ монотонно убывает, оставаясь положительным. Это можно легко увидеть, если переписать уравнение (26) с учетом (25) и (27) в виде

$$b(1, \tau) = b(1, \tau_k) \exp\left[-\frac{1}{\alpha}\int_{\tau_k}^{\tau} \frac{d\tau'}{1 - \xi_0(\tau')}\right]. \quad (28)$$

Как и в случае малых амплитуд, излом в распределении магнитной индукции (23) играет важную роль в формировании скачка функции $F(\tau)$. Поэтому ниже мы подробно обсудим условия возникновения такого излома и возможные сценарии дальнейшего изменения в распределениях магнитного и электрического полей.

1. Если значение $b_s^{(1)}$ ближайшего к моменту $\tau^{(0)}$ минимума внешнего поля $b_s(\tau)$ удовлетворяет неравенству

$$b_s^{(1)} < -1, \quad (29)$$

то в течение интервала времени $\tau^{(0)} < \tau < \tau^{(1)}$ неизбежно возникает излом поля $b(\xi, \tau)$. Точка излома $\xi = \xi_0$, появившись в момент времени τ_k на границе $\xi = 0$, движется к другой границе $\xi = 1$ и обязательно достигает ее. Эта ситуация напоминает рассмотренную в [10] задачу о распределении поля в сверхпроводящей пластине в условиях ее одностороннего возбуждения гармоническим сигналом. Точка ξ_0 исчезает на границе $\xi = 1$ в момент времени, когда $b_s(\tau) = -1$ и $b(1, \tau) = 0$. Такой сценарий не представляет особого интереса, поскольку после исчезновения излома график $b(\xi, \tau)$ приобретает форму, аналогичную (20) (отличие лишь в знаке наклона прямой). Скачки электрического поля могут возникнуть лишь после того, как на графике $b(\xi, \tau)$ опять появится излом.

2. Если

$$-1 < b_s^{(1)} < 1, \quad (30)$$

то, как и в предыдущем случае, в течение интервала времени $\tau^{(0)} < \tau < \tau^{(1)}$ на графике $b(\xi, \tau)$ обязательно появляется излом. Однако теперь точка $\xi_0(\tau)$, двигаясь направо, не доходит до границы $\xi = 1$, а останавливается. Действительно, из (25) следует, что направление движения точки ξ_0 зависит от соотношения между $\dot{b}_s(\tau)$ и $\dot{b}(1, \tau)$. Оказывается, что вначале, после момента $\tau = \tau_k$, справедливо неравенство $\dot{b}_s < \dot{b}(1, \tau)$, и точка ξ_0 движется направо. Однако затем наступает момент, когда $|\dot{b}_s|$ уменьшается настолько, что точка $\xi = \xi_0$ останавливается, а при $\tau = \tau^{(1)}$ величина $\dot{b}_s$ обращается в нуль и скорость движения точки $\xi = \xi_0$ полностью определяется величиной $\dot{b}(1, \tau)$. Благодаря условию (30) точка $\xi = \xi_0$ при своем обратном движении к границе $\xi = 0$ не успевает ее достигнуть, поскольку в момент времени $\tau = \tau^{(1)}$ на графике $b(\xi, \tau)$ появляется новый излом. Как и в случае малых амплитуд, при $\tau > \tau^{(1)}$ график $b(\xi, \tau)$ содержит две точки излома:

$$b(\xi, \tau) = \begin{cases} b_s(\tau) - \xi & 0 < \xi < \xi_1(\tau) \\ b_s(\tau^{(1)}) + \xi & \xi_1(\tau) < \xi < \xi_0(\tau) \\ b_s(1, \tau) + 1 - \xi & \xi_0(\tau) < \xi < 1. \end{cases} \quad (31)$$

Здесь $\xi_1(\tau)$ и $\xi_0(\tau)$ задаются равенствами

$$\xi_1(\tau) = \frac{1}{2}\left[b_s(\tau) - b_s(\tau^{(1)})\right], \qquad (32)$$

$$\xi_0(\tau) = \frac{1}{2}\left[b(1,\tau) + 1 - b_s(\tau^{(1)})\right]. \qquad (33)$$

Распределение магнитной индукции $b(\xi, \tau)$ (31) между точками излома $\xi_1(\tau)$ и $\xi_0(\tau)$ оказывается замороженным. Поэтому выражение для $\xi_0(\tau)$ (33) отличается от аналогичного выражения (25), описывающего случай $\tau_k < \tau < \tau^{(1)}$. Формулы (32) и (33) показывают, что точки излома двигаются навстречу друг другу, поскольку $b_s(\tau)$ при $\tau > \tau^{(1)}$ — растущая функция, а $b(1,\tau)$ продолжает убывать. Закон убывания $b(1,\tau)$ по-прежнему описывается равенством (28), однако при $\tau' > \tau^{(1)}$ в качестве $\xi_0(\tau')$ следует брать (33) вместо (25). Формулы (28), (33) эквивалентны следующему дифференциальному уравнению:

$$2b(1,\tau) + \alpha[1 + b_s^{(1)} - b(1,\tau)]\dot{b}(1,\tau) = 0. \qquad (34)$$

Оно отличается от (26) заменой $b_s(\tau)$ на $b_s^{(1)}$. В качестве начального условия следует использовать требование непрерывности функции $b(1,\tau)$ при $\tau = \tau^{(1)}$.

Электрическое поле $F(\xi, \tau)$ при $\tau > \tau^{(1)}$ описывается выражениями

$$F(\xi,\tau) = \begin{cases} \dot{b}_s(\tau)[\xi_1(\tau) - \xi], & 0 < \xi < \xi_1(\tau) \\ 0, & \xi_1(\tau) < \xi < \xi_0(\tau) \\ \dot{b}(1,\tau)[\xi_0(\tau) - \xi], & \xi_0(\tau) < \xi < 1. \end{cases} \qquad (35)$$

Точки излома $\xi = \xi_0(\tau)$ и $\xi = \xi_1(\tau)$, двигаясь навстречу друг другу, могут встретиться. В этот момент времени $\tau = \tau_j$ оба излома на графике $b(\xi, \tau)$ исчезают (аналогично тому, как это происходит в случае малых амплитуд). Поэтому графики индукции $b(\xi, \tau)$ и поля $F(\xi, \tau)$ при $\tau > \tau_j$ приобретают вид прямых линий (20) и (21), как и при $\tau < \tau_k$. Из формул (21), (35) следует, что в момент $\tau = \tau_j$ происходит скачок поля $F(\xi)$. Величина скачка $\Delta F(\tau) = F(\tau_j + 0) - F(\tau_j - 0)$ описывается выражением

$$\Delta F(\tau) = \left[1 - \xi_1(\tau_j)\right]\left[\dot{b}_s(\tau_j) - \dot{b}(1,\tau_j)\right] > 0. \qquad (36)$$

При получении (36) использовано, что в момент времени $\tau = \tau_j$ справедливо равенство

$$b_s(\tau_j) - 1 = b(1,\tau_j). \qquad (37)$$

В качестве иллюстрации на рис. 3 приведены результаты численного анализа поля $F(\tau)$ при

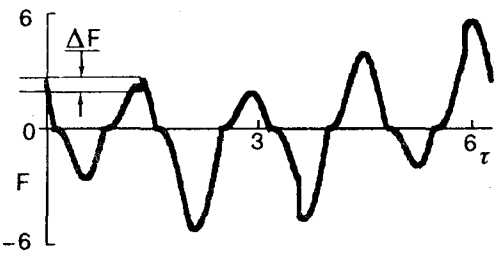

Рис. 3. Функция $F(\tau)$ при $h_1 = 1, h_2 = 1{,}2, \omega_2/\omega_1 = 4$, $\chi = 0$, $\alpha = 0{,}5$.

$h_1 = 1$, $h_2 = 1,2$, $\omega_2/\omega_1 = 4$, $\chi = 0$, $\alpha = 0{,}5$. Ближайший к $\tau = 0$ скачок $F(\tau)$ соответствует выражению (36).

Обратим внимание на то, что, до того как точки $\xi_0(\tau)$ и $\xi_1(\tau)$ при своем движении навстречу друг другу сольются, внешнее поле $b_s(\tau)$ может достигнуть своего нового экстремального значения (максимума) $b_s^{(2)}$. Иными словами, момент времени $\tau^{(2)}$ может наступить прежде, чем удовлетворится равенство (37). Тогда в момент $\tau = \tau^{(2)}$ на границе $\xi = 0$ зародится новая, третья точка излома $\xi = \xi_2(\tau)$. В этот миг точка $\xi = \xi_1(\tau)$ останавливается и затем остается неподвижной ($\xi_1(\tau) \equiv \equiv \xi_1(\tau^{(2)})$). Магнитная индукция $b(\xi, \tau)$ на отрезке $\xi_2(\tau) < \xi < \xi_0(\tau)$ при $\tau > \tau^{(2)}$ оказывается замороженной. Точки $\xi_2(\tau)$ и $\xi_0(\tau)$ будут двигаться навстречу друг другу к неподвижной точке $\xi_1(\tau^{(2)})$. Для возникновения скачка поля $F(\tau)$ важно, которая из точек, $\xi_2(\tau)$ или $\xi_0(\tau)$, первой достигнет точки $\xi_1(\tau^{(2)})$. Если произойдет слияние точек $\xi_0(\tau)$ и $\xi_1(\tau^{(2)})$, то исчезновение двух точек излома $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_1$ не сопровождается скачком поля $F(\tau)$, и мы возвращаемся к картине распределения полей (23)–(27), где роль точки $\xi_0(\tau)$ играет $\xi_2(\tau)$. Если же точка $\xi_2(\tau)$ первой достигнет точки $\xi_1(\tau^{(2)})$ и если в этот момент $\dot{b}_s \neq 0$, то исчезновение двух изломов приводит к скачку $F(\tau)$.

В общем случае поведение функции $b_s(\tau)$ может оказаться таким, что на графике $b(\xi, \tau)$ последовательно возникнет произвольное число n изломов. При этом подвижными оказываются лишь ближайшие к границам $\xi = 0$ и $\xi = 1$ точки излома $\xi = \xi_{n-1}(\tau)$ и $\xi = \xi_0(\tau)$. Скачки $F(\tau)$ будут возникать только при достижении левой подвижной точкой $\xi = \xi_{n-1}(\tau)$ ближайшей к ней неподвижной точки $\xi = \xi_{n-2}(\tau^{(n-1)})$.

Такое множественное появление изломов индукции $b(\xi, \tau)$ возможно и в случае малых амплитуд. Однако в ситуации (16) не всякое исчезновение пары изломов приводит к скачкам $F(\tau)$, а за счет подвижности точки $\xi_0(\tau)$ изломы могут исчезать и без скачков.

3. Очень интересным оказывается случай, когда минимум $b_s^{(1)}$ поля $b_s(\tau)$ расположен выше единицы,

$$b_s^{(1)} > 1 . \tag{38}$$

В такой ситуации эволюция распределения индукции $b(\xi, \tau)$ оказывается принципиально зависящей от свойств подложки, т.е. от величины параметра α. Для изучения поведения индукции $b(\xi, \tau)$ чрезвычайно полезно проанализировать функцию

$$f(\tau) = \dot{b}_s(\tau) + \frac{b_s(\tau) - 1}{\alpha} \tag{39}$$

на временном интервале $\tau^{(0)} < \tau < \tau^{(1)}$. Эта функция принимает положительные значения $(b_s^{(0)} - 1)/\alpha$ и $(b_s^{(1)} - 1)/\alpha$ на концах этого интервала, причем $\dot{f}(\tau^{(0)}) < 0$, а $\dot{f}(\tau^{(1)}) > 0$. Это означает, что $f(\tau)$ имеет минимум $f_{\min}$, значение которого зависит от величины α. Если α не превышает некоторого критического значения α_{cr1}, то $f_{\min} > 0$. Согласно (22), это означает, что при

$$\alpha < \alpha_{cr1} \tag{40}$$

во всем интервале $\tau^{(0)} < \tau < \tau^{(1)}$ не содержится момент $\tau = \tau_k$ появления излома в распределении $b(\xi, \tau)$, т.е. график $b(\xi, \tau)$ является прямой линией (20). Граничное значение α_{cr1} находится из условия касания графика функции $f(\tau)$ оси абсцисс:

$$\begin{cases} \dot{b}_s(\tau_{cr}) + [b_s(\tau_{cr}) - 1]/\alpha_{cr1} = 0 , \\ \ddot{b}(\tau_{cr}) + \dot{b}_s(\tau_{cr})/\alpha_{cr1} = 0 . \end{cases} \tag{41}$$

Если $\alpha > \alpha_{cr1}$, то внутри интервала $\tau^{(0)} < \tau < \tau^{(1)}$ существует момент времени $\tau = \tau_k$ (22), когда появляется излом функции $b(\xi, \tau)$. Этот момент соответствует меньшему из двух корней уравнения $f(\tau) = 0$. В том случае, когда параметр α лишь слегка превышает α_{cr1},

$$\frac{\alpha - \alpha_{cr1}}{\alpha_{cr1}} \ll 1 , \tag{42}$$

точка $\xi = \xi_0(\tau)$, зародившись при $\tau = \tau_k$, с течением времени продвигается на незначительную глубину внутрь образца, а затем возвращается на поверхность $\xi = 0$. В этом нетрудно убедиться, проанализировав уравнение для $\xi_0(\tau)$, которое непосредственно следует из (25), (26):

$$2\alpha\dot{\xi}_0 (1 - \xi_0) + \alpha\dot{b}_s (1 - \xi_0) + 2\xi_0 - 1 - b_s = 0 \tag{43}$$

с $\xi_0(\tau_k) = 0$. Решение этого уравнения при малых ξ_0 есть:

$$\xi_0(\tau) = -\frac{1}{2}\int_{\tau_k}^{\tau} f(\tau')d\tau' . \tag{44}$$

В условиях (42) подынтегральная функция в (44) имеет два близких корня: $\tau = \tau_k$ и момент $\tau = \tilde{\tau}$ обращения скорости $\dot{\xi}_0(\tau)$ в нуль. При этом в интервале $\tau_k < \tau' < \tilde{\tau}$ функция $f(\tau') < 0$, а в области $\tau' > \tilde{\tau}$ имеем $f(\tau') > 0$. Ясно, что существует близкий к $\tilde{\tau}$ момент времени $\tau = \tau_j$, когда интеграл (44) обращается в нуль, т.е. точка $\xi_0(\tau)$ возвращается на поверхность $\xi = 0$.

Можно показать, что существует интервал значений параметра α

$$\alpha_{cr1} < \alpha < \alpha_{cr2} , \tag{45}$$

при которых точка $\xi_0(\tau)$ возвращается на поверхность $\xi = 0$ прежде, чем наступит момент $\tau = \tau^{(1)}$. Верхняя граница интервала (45) определяется из того, что решение уравнения (43) обращается в нуль при $\tau = \tau^{(1)}$:

$$\xi_0(\tau^{(1)})\Big|_{\alpha=\alpha_{cr2}} = 0 . \tag{46}$$

Интервал значений параметра α (45) интересен потому, что в момент $\tau = \tau_j$ возврата точки $\xi_0(\tau)$ на границу $\xi = 0$ происходит скачок электрического поля $F(\tau)$ нового типа. В самом деле, непосредственно перед моментом $\tau = \tau_j$ поле $F(\tau_j - 0) = 0$, а после скачка $F(\tau_j + 0) = f(\tau_j)$. Поэтому

$$\Delta F = f(\tau_j) = \dot{b}_s(\tau_j) + \frac{b_s(\tau_j) - 1}{\alpha} > 0 . \tag{47}$$

Наконец, если параметр α превышает второе критическое значение,

$$\alpha > \alpha_{cr2} , \tag{48}$$

то точка $\xi_0(\tau)$ не успевает вернуться на границу $\xi = 0$ до того, как поле $b_s(\tau)$ достигнет экстремального значения $b_s(\tau^{(1)}) = b_s^{(1)}$. В этом случае эволюция распределения $b(\xi, \tau)$ и поля $F(\tau)$ протекает по тому же сценарию, что и в ситуации (30).

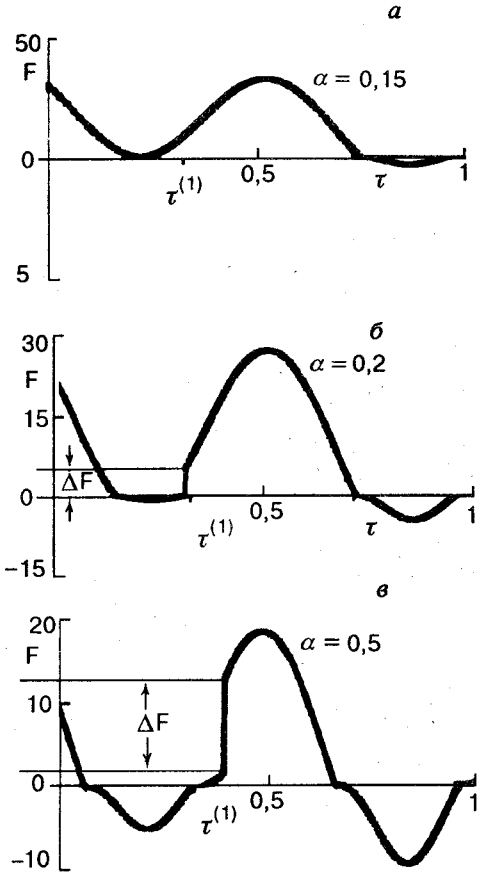

Рис. 4. Функция $F(\tau)$ при $h_1 = 4$, $h_2 = 1{,}5$, $\omega_2/\omega_1 = 10$, $\chi = 0$, вычисленная при различных значениях параметра α.

Для иллюстрации поведения электрического поля в условиях (38) приведем графики рис. 4, которые представляют результат расчета функции $F(\tau)$ для внешнего поля $b_s(\tau) = 4\cos(\tau) + 1{,}5\cos(10\tau)$ при трех различных значениях параметра α, выбранных в интервалах (40), (45) и (48) соответственно. Значения α_{cr1} и α_{cr2} при выбранном $b_s(\tau)$ составляют 0,155 и 0,214.

Заключение

Итак, мы показали, что нелинейное взаимодействие радиоволн в пластине жесткого сверхпроводника сопровождается довольно необычным явлением — скачками во временной зависимости электрического поля на поверхности образца. При одностороннем возбуждении динамика изменения распределения магнитной индукции принципиально отличается от поведения $B(x, t)$ в условиях двустороннего возбуждения. Поэтому положение и амплитуда скачков $E(t)$ и даже сам факт существования скачков оказываются чувствительными к условиям возбуждения и к диэлектрическим свой-

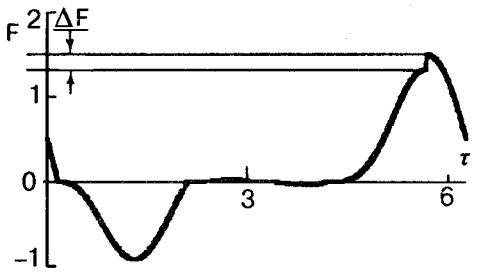

Рис. 5. Функция $F(\tau)$ при $h_1 = 1$, $h_2 = 0{,}5$, $\omega_2/\omega_1 = 2$, $\chi = 0$, $\alpha = 1$.

ствам подложки. Например, при двустороннем возбуждении с $\omega_2/\omega_1 = 2$ и $\chi = 0$ скачки $E(t)$ не возникают [7], в отличие от случая одностороннего возбуждения (см. рис. 5). Кроме того, в условиях одностороннего возбуждения возникают скачки нового типа (47), связанные с возвратом точки $\xi = \xi_0(\tau)$ излома распределения поля $b(\xi, \tau)$ на границу $\xi = 0$.

Обратим внимание на то, что нелинейность материального уравнения в модели критического состояния проявляется в отклике образца и на одноволновое возбуждение: поле $E(t)$ содержит все нечетные гармоники возбуждающего сигнала (см., например, [10,12–14]). Однако нелинейность модели критического состояния содержит сингулярность — скачок в распределении плотности тока от $+j_c$ до $-j_c$. В нелинейном взаимодействии волн проявляется эта особенность модели критического состояния — возникают скачки поля $E(t)$. При этом вовсе не обязательно, чтобы во взаимодействии участвовали именно две волны. Скачки $E(t)$ могут возникать при довольно произвольной зависимости внешнего поля от времени: необходимо лишь выполнение описанных в работе требований на экстремальные значения функции $b_s(\tau)$.

Настоящая работа частично поддержана Грантом 3004 E 9306 Мексиканского национального комитета по науке и технологиям (CONACyt) и Украинской национальной программой по высокотемпературной сверхпроводимости (проект «Коллапс»).

1. Н. М. Макаров, В. А. Ямпольский, *ФНТ* **17**, 547 (1991).
2. Н. М. Макаров, И. В. Юркевич, В. А. Ямпольский, *ЖЭТФ* **89**, 209 (1985).
3. L. M. Fisher, I. F. Voloshin, N. M. Makarov, V. A. Yampol'skii, *J. Phys. Cond. Matter* **5**, 8741 (1993).
4. C. P. Bean, *Phys. Rev. Lett.* **8**, 250 (1962).
5. H. London, *Phys. Lett.* **6**, 162 (1963).
6. I. V. Baltaga, K. V. Il'enko, N. M. Makarov, V. A. Yampol'skii, L. M. Fisher, A. V. Kalinov, and I. F. Voloshin, *Solid State Commun.* **93**, 697 1995).

7. F. Perez Rodriguez, I. V. Baltaga, K. V. Il'enko, N. M. Makarov, V. A. Yampol'skii, L. M. Fisher, A. V. Kalinov, and I. F. Voloshin, *Physica* C251, 50 (1995).
8. V. A. Gasparov, *Physica* C178, 449 (1991).
9. J. M. Philips, *J. Appl. Phys.* 79, 1829 (1996).
10. F. Perez Rodriguez, O. I. Lyubimov, I. O. Lyubimova, N. M. Makarov, and V. A. Yampol'skii, *Appl. Phys. Lett.* 67, 419 (1995).
11. L. M. Fisher, N. V. Il'in, I. F. Voloshin, N. M. Makarov, V. A. Yampol'skii, F. Perez-Rodriguez, and R. L. Snyder, *Physica* C206, 195 (1993).
12. H. A. Ulmaier, *Phys. Status. Solidi* 17, 631 (1966).
13. L. M. Fisher, N. V. Il'in, N. M. Makarov, I. F. Voloshin, and V. A. Yampol'skii, *Solid State Commun.* 73, 691 (1990).
14. И. В. Балтага, К. В. Ильенко, Г. В. Голубничая, А. Я. Кириченко, И. Г. Максимчук, *ФНТ* 19, 987 (1993).

Interaction between electromagnetic waves in a hard superconductor plate on its unilateral excitation

I. O. Lyubimova, I. V. Baltaga, A. A. Kats, V. A. Yampol'skii, and F. Perez-Rodriguez

The nonlinear interaction of radiowaves with different frequencies is studied theoretically in a superconducting plate on its unilateral excitation. The analysis of the wave interaction is carried out within the framework of the critical state model. It is shown that the nonlinearity characteristic for this model leads to an unusual phenomenon in the wave interaction, namely, to jumps in the temporal dependence of the electric field at the sample surface. Necessary conditions for interaction of these jumps are formulated. Besides, the role of the dielectric properties of a substrate in the predicted phenomenon is discussed.