Физика низких температур, 1996, т. 22, № 10, с. 1154–1165

Нелинейные низкочастотные структуры электромагнитного поля в компенсированном металле

В. Е. Векслерчик, И. Б. Снапиро*

Институт радиофизики и электроники НАН Украины, Украина, 310085, г. Харьков, ул. акад. Проскуры, 12

Г. Б. Ткачев

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 2 февраля 1996 г., после переработки 16 апреля 1996 г.

Теоретически изучена возможность возникновения собственных существенно нелинейных низкочастотных состояний электромагнитного поля в компенсированном металле. Показано, что в безграничной металлической среде формируются структуры типа солитонов и кинков, имеющие характер распространяющихся поперечных волн стационарного профиля. Обнаруженные нелинейные волны существуют вследствие воздействия собственного сильного неоднородного магнитного поля на динамику носителей заряда.

Теоретично досліджено можливість виникнення власних суттєво нелінійних низькочастотних станів електромагнітного поля в компенсованому металі. Встановлено, що в необмеженому металевому середовищі формуються структури типу солітонів та кінків, які мають характер поперечних хвиль стаціонарного профілю, що поширюються. Винайдені нелінійні хвилі існують завдяки дії їх власного сильного неоднорідного магнітного поля на динаміку носіїв заряду.

1. Введение

Нелинейные электромагнитные явления в чистых металлах исследуются в течение достаточно длительного периода времени. Специфическим для этих объектов источником нелинейности является воздействие магнитной компоненты электромагнитного возбуждения в металле на динамику электронного движения и, следовательно, на проводимость носителей заряда. Такой магнитодинамический механизм нелинейности оказывается наиболее эффективным при низких температурах, когда другие причины нелинейности, связанные, например, с перегревом электронной системы, еще отсутствуют.

В статическом случае магнитодинамическая нелинейность приводит, например, к отклонению вольт-амперных характеристик (ВАХ) тонких образцов от закона Ома [1,2], появлению падающих участков на ВАХ [3], пинч-эффекту [4]. В низкочастотной ситуации, когда частота электромагнитного поля в металле ω много меньше частоты столкновений электронов ν:

$$\omega \ll \nu \,, \tag{1.1}$$

отметим эффект возбуждения токовых состояний [5,6] и обусловленное этим явлением взаимодействие радиоволн в металлах [7], появление диссипативных структур [8], нелинейное затухание геликонов [9]. В области высоких частот, когда справедливо неравенство, противоположное (1.1), исследованы нелинейный циклотронный резонанс [10], возбуждение ударных магнитоплазменных волн [11].

Одним из проявлений магнитодинамического механизма нелинейности является существование в металлах низкочастотных волновых процессов, не имеющих аналогов в линейной ситуации. Так, например, в работе [12] наблюдалось недиффузионное проникновение электромагнитного поля с достаточно сильной магнитной компонентой в толщу компенсированного металла в условиях нор-

* Настоящий адрес автора: Tel Aviv University, Ramat Aviv 69978 (Israel)

© В. Е. Векслерчик, И. Б. Снапиро, Г. Б. Ткачев, 1996

мального скин-эффекта. Было обнаружено, что в объеме образца распространяется нелинейная волна с резким фронтом, которая без заметного затухания пробегает расстояния, значительно превышающие глубину проникновения поля в линейном режиме. Авторы работы [12] отметили, что в формировании распространяющегося импульса существенную роль играют эффекты пространственной дисперсии, связанные с влиянием сильного неоднородного магнитного поля волны на динамику носителей заряда. Представляет интерес теоретически исследовать возможность образования низкочастотных нелинейных волновых структур с учетом эффектов пространственной дисперсии.

В настоящей работе показано, что эффекты пространственной дисперсии в нелинейном режиме приводят к возникновению специфических собственных низкочастотных состояний электромагнитного поля в компенсированном металле. Установлено, что в безграничной металлической среде могут формироваться структуры, имеющие характер распространяющихся поперечных волн стационарного профиля типа солитонов и кинков. Обнаруженные нелинейные волны обладают достаточно сильной магнитной компонентой: характерный радиус кривизны электронных траекторий R, формируемых собственным магнитным полем волны, значительно меньше длины свободного пробега электронов l:

$$R \ll l \ , \quad R = \frac{cp_F}{e\tilde{H}} \ . \tag{1.2}$$

Здесь $\tilde{H}$ — амплитуда магнитного поля волны; p_F — фермиевский импульс; $-e$ — заряд электрона; c — скорость света в вакууме. В то же время пространственный масштаб δ изменения электромагнитного поля обнаруженных структур много больше величины R:

$$R \ll \delta \ . \tag{1.3}$$

В сильном слабонеоднородном магнитном поле волны электроны движутся по почти круговым ларморовским орбитам радиусом порядка R. Проводимость носителей заряда определяется двумя независимыми механизмами. Один из них обусловлен эффектом магнитосопротивления в собственном магнитном поле волны. Проводимость компенсированного металла, связанная с этим явлением, пропорциональна малому параметру порядка $(R/l)^2$. Ее отличие от нуля вызвано рассеянием электронов, приводящим к диффузии ларморовских орбит в направлении электрического поля волны. Другим механизмом проводимости является дрейф электронных орбит вследствие слабой пространственной неоднородности магнитного и электрического полей в металле [4,12]. Такое дополнительное движение центров орбит приводит к тому, что в проводимости носителей заряда присутствуют «градиентные» слагаемые, пропорциональные по порядку величины малому отношению $(R/\delta)^2$. В настоящей работе показано, что конкуренция эффектов магнетосопротивления и слабой пространственной дисперсии в проводимости электронов является причиной возникновения собственных существенно нелинейных низкочастотных состояний электромагнитного поля в компенсированном металле.

2. Постановка задачи, основные уравнения и плотность тока

Нас интересует возможность возникновения собственных низкочастотных (1.1) состояний электромагнитного поля в компенсированном металле в условиях (1.2) и (1.3). Будем предполагать, что нестационарное поле в безграничной металлической среде зависит только от одной пространственной переменной x. При этом ось x ориентирована перпендикулярно векторам магнитного $\mathbf{H}(x, t)$ и электрического $\mathbf{E}(x, t)$ полей. Оси y и z направим коллинеарно векторам $\mathbf{E}(x, t)$ и $\mathbf{H}(x, t)$ соответственно (см. рис. 1):

$$\mathbf{E}(x, t) = (0, E(x, t), 0) \ , \ \mathbf{H}(x, t) = (0, 0, H(x, t)) \ . \tag{2.1}$$

В выбранной нами геометрии уравнения Максвелла для электрического и магнитного полей имеют вид

$$\frac{\partial H(x, t)}{\partial x} = -\frac{4\pi}{c} j(x, t) \ , \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H(x, t)}{\partial t} \ . \tag{2.3}$$

Здесь $j(x, t) \equiv j_y(x, t)$ — плотность тока в металле.

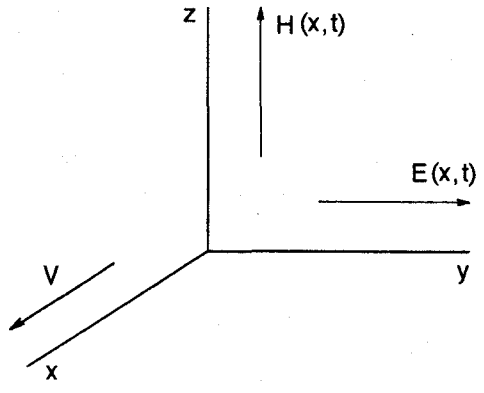

Рис. 1. Геометрия задачи.

Анализ пространственной и временной зависимостей плотности тока и полей проведем для случая изотропного компенсированного металла: электронную и дырочную поверхности Ферми будем считать одинаковыми сферами. Частоты столкновений электронов и дырок также будем предполагать одинаковыми. Необходимо отметить, что равенства радиусов фермиевских сфер p_F и частот столкновений ν электронов и дырок не означают, вообще говоря, равенство подвижностей носителей заряда. Тем не менее в ситуации сильных магнитных полей (1.2) и слабой пространственной дисперсии (1.3) эффектом Холла в проводимости компенсированного металла, как известно (см., например, [13]), можно пренебречь.

В низкочастотном случае (1.1) отклик компенсированного металла на слабонеоднородное электромагнитное поле с достаточно сильной магнитной компонентой имеет вид [4]

$$j(x, t) = \\ = \sigma_0 \left(\frac{cp_F}{e}\right)^2 \left[\frac{1}{l_e l_h} \frac{E(x, t)}{H^2(x, t)} - \frac{2}{5} \frac{1}{H(x, t)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{E(x, t)}{H(x, t)}\right)\right], \quad (2.4)$$

где σ_0 — статическая проводимость компенсированного металла:

$$\sigma_0 = \frac{ne^2(l_e + l_h)}{p_F}, \quad (2.5)$$

l_e и l_h — длины свободного пробега электронов и дырок соответственно:

$$l_e = \frac{p_F}{m_e \nu}, \quad l_h = \frac{p_F}{m_h \nu}. \quad (2.6)$$

В формулах (2.5),(2.6) n — концентрация электронов (дырок); m_e и m_h — массы электрона и дырки соответственно. Для определенности мы будем считать, что длины свободного пробега носителей заряда имеют одинаковый порядок величины: $l_e \sim l_h \sim l$. Таким образом, условие (1.2) предполагается выполненным одновременно для величин l_e и l_h.

Выражение (2.4) демонстрирует описанную во введении конкуренцию двух механизмов проводимости компенсированного металла. Первое слагаемое в формуле (2.4) обусловлено эффектом магнитосопротивления в собственном сильном магнитном поле искомых электромагнитных структур. Эффекты слабой пространственной дисперсии в проводимости носителей заряда учитываются вторым градиентным членом в (2.4). Необходимо отметить, что выражение для плотности тока (2.4) получено при произвольном соотношении между длиной свободного пробега частиц l и характерным пространственным масштабом изменения электромагнитного поля в металле δ. Вывод формулы (2.4) приведен в Приложении.

3. Автомодельные решения уравнений Максвелла

Будем искать решения системы уравнений Максвелла (2.2),(2.3) с плотностью тока (2.4) в виде распространяющихся вдоль оси x поперечных волн (см. рис. 1):

$$E(x, t) = E(x - Vt), \quad H(x, t) = H(x - Vt), \quad (3.1)$$

где V — скорость распространения волны. Для решений вида (3.1) из второго уравнения Максвелла (2.3) имеем

$$E(x - Vt) = \frac{V}{c} [H(x - Vt) - \tilde{H}_0]. \quad (3.2)$$

В этом выражении $\tilde{H}_0$ — некоторая постоянная размерности поля. Как мы убедимся ниже, эта постоянная играет роль максимальной амплитуды изменения магнитного поля искомых волновых структур. Для автомодельных решений (3.1), (3.2) в выражении для плотности тока (2.4) можно исключить электрическое поле. После чего плотность тока принимает вид

$$j(x - Vt) = \\ = \frac{V}{c} \sigma_0 \left(\frac{cp_F}{e}\right)^2 \left[\frac{2}{5} \frac{1}{H} \left(\frac{\tilde{H}_0}{H}\right)'' - \frac{1}{l_e l_h} \frac{\tilde{H}_0 - H}{H^2}\right]. \quad (3.3)$$

Штрих в формуле (3.3) означает производную по автомодельной переменной

$$\xi = x - Vt. \quad (3.4)$$

Подставив выражение (3.3) для плотности тока в первое уравнение Максвелла (2.2) и введя безразмерное магнитное поле

$$h(\xi) = \frac{H(\xi)}{\tilde{H}_0}, \quad (3.5)$$

получаем нелинейное уравнение для определения магнитной составляющей электромагнитного поля в металле

$$L^2 \left(\frac{1}{h}\right)'' - \frac{1 - h}{h} + \frac{V_0}{V} Lhh' = 0. \quad (3.6)$$

В этом уравнении V_0 — параметр размерности скорости, который определяется выражением

$$V_0 = v_F \left(\frac{V_A}{v_F}\right)^2 , \qquad (3.7)$$

где

$$V_A = \frac{\tilde{H}_0}{[4\pi n(m_e + m_h)]^{1/2}} \qquad (3.8)$$

— альфвеновская скорость, соответствующая характерному значению магнитного поля $\tilde{H}_0$,

$$v_F = \left(\frac{2}{5 m_e m_h}\right)^{1/2} p_F \qquad (3.9)$$

— эффективная фермиевская скорость носителей заряда. Величина L, фигурирующая в уравнении (3.6), имеет порядок длины свободного пробега носителей заряда:

$$L = \left(\frac{2 l_e l_h}{5}\right)^{1/2} = \frac{v_F}{\nu} . \qquad (3.10)$$

Нас будут интересовать ограниченные положительные при всех значениях ξ решения уравнения (3.6).

3.1. Качественный анализ уравнения (3.6)

При произвольном значении отношения V_0/V уравнение (3.6) проинтегрировать не удается. Однако характер его решений можно качественно установить из исследования фазового портрета. Фазовый портрет уравнения (3.6), построенный стандартными методами (см., например, [14]), схематически изображен на рис. 2.

На фазовой плоскости уравнения (3.6) выделяются две особые точки. Точка $(h = 0, h' = 0)$ представляет собой сложное состояние равновесия, имеющее характер «узла», а точка $(h = 1, h' = 0)$ является простой «седловой» особой точкой. В направлении, задаваемом прямой

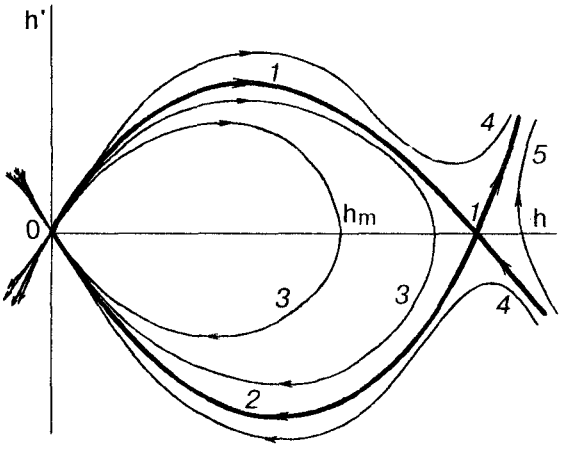

Рис. 2. Фазовый портрет уравнения (3.6).

$$h' = \frac{1}{L} h , \qquad (3.11)$$

«узел» является неустойчивым, так как в этом направлении фазовые траектории выходят из точки $(h = 0, h' = 0)$. При этом угол наклона относительно оси абсцисс для всех траекторий одинаков. В направлении прямой

$$h' = -\frac{1}{L} h , \qquad (3.12)$$

«узловая» особая точка устойчива. Действительно, вдоль прямой (3.12) фазовые траектории входят в точку $(h = 0, h' = 0)$. В достаточно малой окрестности «узла»

$$Lh' \ll 1 , \quad h \ll 1 , \qquad (3.13)$$

выходящие фазовые траектории описываются выражением (3.11), а входящие в точку $(h = 0, h' = 0)$ — формулой (3.12).

Через особые точки фазового портрета уравнения (3.6) проходят две сепаратрисы, обозначенные на рис. 2 цифрами *1* и *2*. В малой окрестности «седла» сепаратрисы *1* и *2* имеют вид прямых, определяемых соответственно формулами

$$h' = \frac{1}{\delta_1(V)}(1 - h) , \quad 1 - h \ll 1 , \qquad (3.14)$$

$$\delta_1(V) = L\left[\left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{V_0}{V}\right)^2\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\frac{V_0}{V}\right]^{-1} , \qquad (3.15)$$

$$h' = -\frac{1}{\delta_2(V)}(1 - h) , \quad 1 - h \ll 1 , \qquad (3.16)$$

$$\delta_2(V) = L\left[\left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{V_0}{V}\right)^2\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\frac{V_0}{V}\right]^{-1} . \qquad (3.17)$$

Отметим, что тангенсы углов наклона прямых (3.14), (3.16) зависят от величины скорости V искомых автомодельных решений. Из выражений (3.15), (3.17) следует, что при любом конечном значении параметра V_0/V справедливо следующее соотношение:

$$\delta_2 < \delta_1 . \qquad (3.18)$$

Отсюда следует, что наклон сепаратрисы *1* относительно оси абсцисс в «седле» меньше, чем наклон сепаратрисы *2*.

Сепаратрисы ограничивают область фазового пространства, в которой траектории имеют вид асимметричных относительно оси абсцисс замкнутых кривых *3*. Замкнутые фазовые траектории начинаются и заканчиваются в «узловой» особой точке. Охватывая одна другую, они заполняют все пространство, ограниченное сепаратрисами. Пересечение кривой *3* с осью h происходит под прямым углом. Обозначим абсциссу точки пересечения h_m. Как видно из рис. 2, величина h_m удовлетворяет неравенствам

$$0 < h_m < 1 \ . \qquad (3.19)$$

В достаточно малой окрестности точки ($h = h_m$, $h' = 0$) замкнутая траектория описывается выражением

$$Lh' = \pm \left[2h_m(1-h_m)(h_m-h)\right]^{1/2} - 2\frac{V_0}{V}(h_m-h) \ ,$$
$$0 < h_m - h << h_m \ . \qquad (3.20)$$

Здесь выписаны первые два члена разложения зависимости $h'(h)$ по малому отклонению $h_m - h$ от точки пересечения. Первое слагаемое в формуле (3.20) является симметричной относительно оси абсцисс функцией h и не зависит от параметра V_0/V. Зависимость от скорости содержится во втором линейном по отклонению $h_m - h$ члене, который учитывает асимметрию траектории *3* относительно оси h.

Вне области, занимаемой замкнутыми кривыми, существуют фазовые траектории типа *4* и *5*, движение по которым неограничено. Решения, описываемые такими фазовыми траекториями, не имеют физического смысла и в дальнейшем рассматриваться не будут. Из рис. 2 очевидно, что ограниченным решениям уравнения (3.6) отвечают замкнутые фазовые траектории, а также участки сепаратрис, соединяющие особые точки. Причем эти решения имеют принципиально различный характер.

Решения, соответствующие замкнутым фазовым кривым, обозначим $h_s(\xi)$. При изменении переменной ξ от $-\infty$ до $+\infty$ они вначале возрастают от нуля до некоторого максимального значения, которому на траектории *3* соответствует точка пересечения с осью абсцисс ($h = h_m$, $h' = 0$), а затем убывают до нуля. Эти решения имеют солитоноподобный характер. Форма солитонов $h_s(\xi)$ является асимметричной относительно максимума, а величины их амплитуд ограничены со стороны больших значений единицей (3.19). Интегрируя выражения (3.11), (3.12), справедливые для замкнутых траекторий вблизи «узла», находим, что к нулю солитонные решения стремятся по экспоненциальному закону с характерным масштабом L порядка длины свободного пробега носителей заряда (см. (3.10)):

$$h_s(\xi) \propto h_m \exp\left(-\frac{|\xi|}{L}\right) \ , \quad \xi \to \pm\infty \ . \qquad (3.21)$$

Поведение магнитного поля солитона вблизи максимума можно установить, интегрируя методом последовательных приближений выражение (3.20). В результате имеем

$$h_s(\xi) = h_m - \frac{h_m}{2}(1-h_m)\left[\left(\frac{\xi}{L}\right)^2 + \frac{V_0}{2V}h_m^3\left(\frac{\xi}{L}\right)^3\right] \ ,$$
$$\left|\frac{\xi}{L}\right| << 1 \ . \qquad (3.22)$$

Постоянная величина, возникающая при интегрировании формулы (3.20), выбрана таким образом, чтобы максимум солитона соответствовал значению переменной ξ, равному нулю. Присутствие кубического члена в выражении (3.22) отражает тот факт, что распределение магнитного поля солитона несимметрично относительно точки максимума. Из выражения (3.22) следует, что справа от точки $\xi = 0$, т. е. при положительном значении ξ, магнитное поле $h_s(\xi)$ убывает быстрее, чем слева. При этом такое несимметричное отклонение зависимости $h_s(\xi)$ от параболической возрастает по мере удаления от точки максимума. Степень асимметрии формы солитона зависит от величины параметра $V_0 h_m^3 / V$, стоящего перед кубическим членом в формуле (3.22). Величина этого параметра возрастает как с увеличением амплитуды солитона, так и с уменьшением скорости. Поэтому наиболее асимметричной формой относительно максимума обладают «медленные» солитоны, скорость которых

$$V << V_0 \ , \qquad (3.23)$$

с амплитудой близкой к единице:

$$1 - h_m << 1 \ . \qquad (3.24)$$

Если скорость солитона

$$V >> V_0 \ , \qquad (3.25)$$

то параметр $V_0 h_m^3 / V$ является малым при любом значении амплитуды h_m. Следовательно, в главном приближении по этому параметру зависимость $h_s(\xi)$, описываемая формулой (3.22), для «быстрого» (3.25) солитона является симметрич-

ной относительно максимума. Отметим еще одно любопытное следствие, вытекающее из выражения (3.22). Если амплитуда солитона приближается к единице, второе слагаемое в формуле (3.22) стремится к нулю по параметру $1 - h_m$. Это означает, что солитоны большой амплитуды (3.24) имеют практически плоскую вершину. Причем этот вывод справедлив независимо от величины скорости солитона.

Перейдем к качественному исследованию решений, которым на фазовом портрете уравнения (3.6) соответствуют участки сепаратрис, соединяющие особые точки. Фазовой траектории, идущей из «узла» в «седло», отвечает решение, монотонно возрастающее от нуля до единицы с увеличением переменной ξ от $-\infty$ до $+\infty$. Это решение имеет характер кинка. Введем для него обозначение $h_{k1}(\xi)$. Асимптотические выражения для кинка при бесконечно больших величинах ξ легко получить, интегрируя формулы (3.11), (3.14):

$$h_{k1}(\xi) \propto \exp\left(\frac{\xi}{L}\right), \quad \xi \to -\infty, \tag{3.26}$$

$$h_{k1}(\xi) - 1 \propto -\exp\left(-\frac{\xi}{\delta_1(V)}\right), \quad \xi \to +\infty. \tag{3.27}$$

Зависимость характерного масштаба δ_1, с которым решение типа кинка стремится к единице, от величины скорости дается выражением (3.15). Из него следует, что с уменьшением скорости кинка масштаб δ_1 увеличивается относительно длины свободного пробега носителей заряда. В предельном случае малых скоростей (3.23) величина δ_1 становится значительно больше L:

$$\delta_1 = \frac{V_0}{V} L >> L. \tag{3.28}$$

В области больших скоростей (3.25) масштаб δ_1 в основном приближении по малому параметру V_0/V не зависит от скорости кинка и по порядку величины совпадает с длиной свободного пробега частиц:

$$\delta_1 = L. \tag{3.29}$$

Фазовой траектории, лежащей на сепаратрисе 2 и идущей из «седла» в «узел», также соответствует решение типа кинка $h_{k2}(\xi)$. Однако в отличие от кинка $h_{k1}(\xi)$ данное решение монотонно убывает от единицы до нуля с увеличением ξ (антикинк). Интегрируя выражения (3.12), (3.16), получаем следующие асимптотики для кинка $h_{k2}(\xi)$ при бесконечно больших значениях ξ:

$$h_{k2}(\xi) - 1 \propto -\exp\left(\frac{\xi}{\delta_2(V)}\right), \quad \xi \to -\infty, \tag{3.30}$$

$$h_{k2}(\xi) \propto \exp\left(-\frac{\xi}{L}\right), \quad \xi \to +\infty. \tag{3.31}$$

Как следует из выражения (3.17), характерный масштаб $\delta_2(V)$, с которым решение $h_{k2}(\xi)$ стремится к единице, убывает относительно длины свободного пробега с уменьшением скорости. В области малых скоростей (3.23) масштаб δ_2 становится значительно меньше L:

$$\delta_2 = \frac{V}{V_0} L << L. \tag{3.32}$$

В случае больших скоростей выражение для величины $\delta_2(V)$ такое же, как и для масштаба $\delta_1(V)$:

$$\delta_2 = L. \tag{3.33}$$

Следует напомнить, что выражение для плотности тока (2.4), а также основное исследуемое уравнение (3.6) были выведены в предположении о том, что магнитное поле электромагнитного возбуждения в металле является достаточно сильным: $R << l, \delta$. Между тем фазовый портрет исследуемого уравнения содержит особую точку ($h = 0, h' = 0$). Как следствие, полученные нами решения имеют нулевые асимптотики, для которых условия $R << l, \delta$ не выполняются. Таким образом, предлагаемая теория не позволяет корректно описать поведение обнаруженных решений в области слабых магнитных полей, поскольку в этом случае реализуется линейный режим и, следовательно, выражение (2.4) для плотности тока неприменимо. Однако изучение автомодельных решений уравнений Максвелла, основанное на использовании существенно нелинейной асимптотики плотности тока (2.4), дает возможность установить сам факт локализации электромагнитного возбуждения и корректно описать структуру локализованных решений в области сильных магнитных полей. На наш взгляд, это обстоятельство является принципиальным в данной задаче, поскольку линейная теория в рассматриваемой нами ситуации предсказывает существование только неограниченных собственных решений уравнений Максвелла.

3.2. Асимптотически точные решения уравнения (3.6)

Оказывается, что в случае больших скоростей (3.25) решения уравнения (3.6) можно получить аналитически. Асимптотический анализ уравнения (3.6) в этом предельном случае полностью

подтверждает полученные выше качественные результаты, касающиеся «быстрых» нелинейных волн, и позволяет установить ряд новых свойств этих структур, которые невозможно обнаружить при качественном исследовании уравнения (3.6).

При выполнении условия (3.25) третий член в уравнении (3.6) является малым по сравнению с остальными по параметру V_0/V. Пренебрегая этим слагаемым, имеем

$$L^2\left(\frac{1}{h}\right)'' - \frac{1-h}{h} = 0 \ . \qquad (3.34)$$

Уравнение (3.34) является линейным относительно функции $1/h$. Легко убедиться, что оно имеет семейство решений солитонного типа:

$$h_s(\xi) = \frac{h_m}{h_m + (1-h_m)\,\mathrm{ch}\,(\xi/L)} \ . \qquad (3.35)$$

Из этого выражения следует, что магнитное поле в «быстром» солитоне распределено симметричным образом относительно точки максимума $\xi = 0$ и изменяется на величину порядка амплитуды на характерном масштабе L порядка длины свободного пробега электронов (см. (3.10)). На рис. 3 изображена зависимость $h_s(\xi)$, описываемая формулой (3.35), для различных значений амплитуды h_m .

Из рис. 3 видно, что форма солитона существенно зависит от величины его амплитуды: с ростом амплитуды вершина солитона становится все более плоской, а его ширина увеличивается. В центральной части солитона, амплитуда которого предельно близка к единице (кривая *3* на рис. 3), величина магнитного поля практически не меняется по мере удаления от максимума и приблизительно равна единице. Изменение магнитного поля на величину порядка амплитуды происходит в двух областях шириной L, удаленных от центра солитона. Величину характерного расстояния Δ между передним и задним фронтами солитона большой амплитуды можно оценить исходя из следующих соображений. Если значение h_m близко к

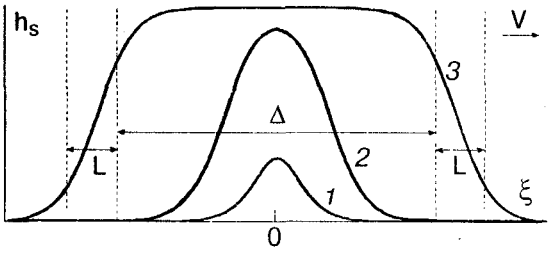

Рис. 3. Распределение магнитного поля в «быстром» солитоне при различных значениях его амплитуды h_m : 0,3 (*1*) 0,9 (*2*), 0,9999 (*3*).

единице (3.24), то второе слагаемое в знаменателе выражения (3.35) пропорционально малому параметру $1 - h_m$. Поэтому заметное уменьшение величины магнитного поля $h_s(\xi)$ относительно амплитуды начинается при тех значениях переменной ξ, при которых второе слагаемое в знаменателе выражения (3.35) сравнивается по порядку величины с первым. Очевидно, что именно такие значения ξ определяют расстояние между стенками солитона. Оценка показывает, что величина Δ существенно больше длины свободного пробега носителей заряда и логарифмически возрастает по мере приближения амплитуды солитона к единице:

$$\Delta = 2L \ln\left(\frac{1}{1-h_m}\right) >> L \ . \qquad (3.36)$$

Кроме солитонных решений, уравнение (3.34) имеет еще два ограниченных решения типа кинков с амплитудами равными единице:

$$h_{k1}(\xi) = \frac{1}{1+\exp\,(-\xi/L)} \ , \qquad (3.37)$$

$$h_{k2}(\xi) = \frac{1}{1+\exp\,(\xi/L)} \ . \qquad (3.38)$$

Как видно из формул (3.37), (3.38), переходные области «быстрых» кинков имеют размер порядка длины свободного пробега частиц.

Необходимо отметить, что величина скорости «быстрых» волн, кроме условия (3.25), должна удовлетворять требованию низких частот (1.1). Характерный частотный масштаб ω изменения решений (3.35), (3.37), (3.38) имеет порядок величины V/L. Поэтому условие низких частот (1.1) для «быстрых» волн с учетом выражения (3.10) принимает вид

$$V << v_F \ . \qquad (3.39)$$

Совместное выполнение неравенств (3.25), (3.39) возможно в том случае, если характерная альфвеновская скорость V_A , от которой зависит величина V_0 (см. (3.7)), значительно меньше фермиевской:

$$V_A << v_F \ . \qquad (3.40)$$

«Быстрые» нелинейные волны обладают весьма примечательной особенностью: они являются бестоковыми структурами. Действительно, подставляя поочередно выражения (3.35), (3.37), (3.38) в формулу (3.3), нетрудно убедиться, что плотность тока $j(\xi)$ обращается в нуль. Это означает, что в собственном электромагнитном поле «быстрой» волны имеет место сильная взаимная компенсация магнитопроводимости и проводимости, обуслов-

ленной дрейфом орбит носителей заряда. Возникает своеобразная самосогласованная картина: электромагнитное поле «быстрой» волны меняется в функции автомодельной переменной так, чтобы плотность тока была равной нулю; с другой стороны, малость плотности тока является необходимым условием существования структур (3.35), (3.37), (3.38). Отметим, что подобная самосогласованная картина имеет место и в линейной ситуации. Так, в работе [15] теоретически изучался скин-эффект в компенсированном металле в присутствии сильного внешнего постоянного и однородного магнитного поля. Было обнаружено, что распределение электромагнитного поля в металле является двухкомпонентным. Одновременно с обычной аномально скиновой составляющей в металле присутствует бестоковая длинноволновая компонента, проникающая в толщу образца на глубину порядка длины свободного пробега электронов l. Как показано в [15], возникновение бестоковой длинноволновой компоненты связано с взаимной компенсацией магнитопроводимости во внешнем магнитном поле и дрейфовой проводимости, обусловленной слабой пространственной неоднородностью электрического поля. Результаты настоящего исследования позволяют предположить, что длинноволновая компонента, изученная в работе [15], в нелинейном режиме может трансформироваться в низкочастотную бестоковую волну, аналогичную одной из обнаруженных нами «быстрых» волн. Для проверки этого предположения необходимо решить соответствующую нелинейную граничную задачу. Однако такое исследование выходит за круг вопросов, рассматриваемых в данной работе.

Конкуренция эффектов магнитосопротивления и слабой пространственной дисперсии в проводимости металла играет принципиальную роль в формировании не только «быстрых» нелинейных волн, но и волновых структур с произвольным значением скорости. Можно показать, что отсутствие

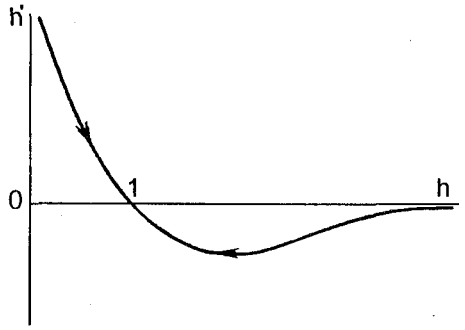

Рис. 4. Фазовый портрет уравнения (3.6), построенный без учета первого слагаемого, обусловленного пространственной дисперсией.

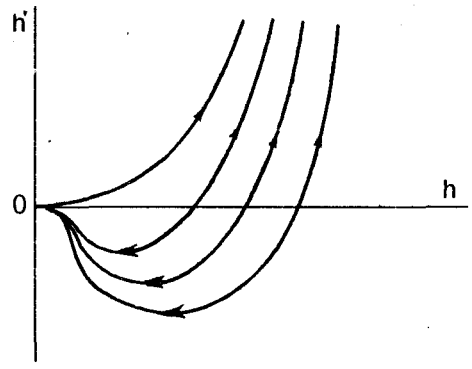

Рис. 5. Фазовый портрет уравнения (3.6), построенный без учета второго слагаемого, обусловленного эффектом магнитосопротивления.

в уравнении (3.6) хотя бы одного слагаемого из тех, которые обусловлены либо магнитопроводимостью, либо дрейфовой проводимостью, приводит к качественному изменению характера его решений. Действительно, на рис. 4 и 5 изображены фазовые траектории решений уравнения (3.6), построенные без учета первого или второго слагаемых соответственно. Видно, что эти фазовые портреты принципиально отличаются от изображенного на рис. 2.

4. Заключение

В данной работе показано, что в безграничном компенсированном металле существует принципиальная возможность для образования собственных низкочастотных электромагнитных структур типа солитонов и кинков. Эти существенно нелинейные объекты возникают в условиях слабой пространственной дисперсии благодаря специфическому для металлов магнитодинамическому механизму нелинейности. Локализация электромагнитного возбуждения в рассмотренном нами случае происходит в сильном собственном магнитном поле в результате конкуренции эффектов пространственной дисперсии и магнитосопротивления в проводимости компенсированного металла.

Исследование, проведенное в данной работе, не является исчерпывающим решением задачи о нелинейных собственных локализованных состояниях электромагнитного поля в низкочастотной ситуации (1.1). Как было указано в разд. 3, предложенная теория не позволяет корректно описать поведение обнаруженных решений в области слабых магнитных полей. Таким образом, остается актуальным вопрос о построении последовательной теории низкочастотных локализованных состояний во всей области изменения полей. Кроме того, представляет интерес задача о возбуждении

изученных в настоящей работе низкочастотных структур. Другим важным вопросом является исследование устойчивости рассмотренных локализованных объектов.

Авторы выражают благодарность Н. М. Макарову за постановку задачи и плодотворные дискуссии. Данная работа поддержана грантом PSU052125 Международного фонда «Відродження» (подпрограмма «Соросовские аспиранты»), Государственным комитетом Украины по вопросам науки и технологий (проект 2.3/19 «Металл»).

Приложение

Плотность тока электронов с квадратичным изотропным законом дисперсии вычисляется по формуле

$$j_e = -\frac{3}{4\pi}\frac{nem_e^3}{p_F^3}\int dv_x\, dv_y\, dv_z\, v_y f \ , \quad (\text{П}.1)$$

где v_x , v_y , v_z — проекции вектора скорости электрона на оси x, y, z соответственно; f — неравновесная добавка к фермиевской функции распределения. Интегрирование производится по всему пространству скоростей.

Функция f находится из решения кинетического уравнения Больцмана. Кинетическое уравнение линеаризуется по электрическому полю, а нелинейность целиком обусловлена магнитным полем в силе Лоренца:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{eH}{m_e c}v_y\frac{\partial f}{\partial v_x} + \frac{eH}{m_e c}v_x\frac{\partial f}{\partial v_y} + \nu f = $$

$$= ev_y E\frac{\partial f_F}{\partial \varepsilon} \ . \quad (\text{П}.2)$$

Здесь f_F — фермиевская функция распределения, зависящая только от энергии электрона

$$\varepsilon = \frac{m_e}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \ . \quad (\text{П}.3)$$

Воспользовавшись методом характеристик, решение уравнения (П.2) можно представить в виде

$$f = el_e\frac{\partial f_F}{\partial \varepsilon}\psi \ , \quad (\text{П}.4)$$

где функция ψ, имеющая размерность поля, определяется выражением

$$\psi = \frac{1}{l_e}\int_{-\infty}^{t} dt_1\, v_y(t_1)E(x(t_1), t_1)\exp(\nu(t_1 - t)) \ . \quad (\text{П}.5)$$

Уравнения характеристик линеаризованного кинетического уравнения (П.2) имеют вид

$$\dot{x}(t) = v_x(t) \ , \quad (\text{П}.6)$$

$$\dot{v}_x(t) = -\frac{v_{F,e}}{R(x(t), t)}v_y(t) \ , \quad (\text{П}.7)$$

$$\dot{v}_y(t) = \frac{v_{F,e}}{R(x(t), t)}v_x(t) \ . \quad (\text{П}.8)$$

Здесь

$$R(x, t) = \frac{cp_F}{eH(x, t)} \quad (\text{П}.9)$$

— радиус кривизны электронных траекторий, формируемых магнитным полем искомых электромагнитных структур;

$$v_{F,e} = p_F / m_e \quad (\text{П}.10)$$

— фермиевская скорость электронов. Точка в формулах (П.6)–(П.8) означает полную производную по времени.

Получим асимптотическое выражение для функции ψ в квазистатической ситуации (1.1), предполагая, что электромагнитное поле в металле обладает достаточно сильной знакопостоянной магнитной компонентой и практически не меняется на расстояниях порядка ларморовского радиуса:

$$R(x, t) << l_e , \delta \ . \quad (\text{П}.11)$$

Для этого удобно ввести вместо величин v_x и v_y новые независимые переменные $v_\perp$ и φ, которые связаны с v_x и v_y формулами

$$v_x = v_\perp \cos\varphi \ , \ v_y = v_\perp \sin\varphi \ . \quad (\text{П}.12)$$

Кроме того, введем безразмерное время τ движения электрона по траектории:

$$\tau = \nu t \ . \quad (\text{П}.13)$$

Уравнения характеристик (П.6)–(П.8) в терминах новых переменных $v_\perp$, φ и безразмерного времени τ записываются в следующем виде:

$$\dot{x} = \frac{v_\perp l_e}{v_{F,e}}\cos\varphi \ , \quad (\text{П}.14)$$

$$\dot{v}_\perp = 0 \ , \quad (\text{П}.15)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{l_e}{R(x, \tau)} \ . \quad (\text{П}.16)$$

Выражение для функции ψ в новых переменных имеет вид

$$\psi = \frac{v_\perp}{v_{F,e}} \int\limits_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 \, E(x(\tau_1), \tau_1) \exp(\tau_1 - \tau) \sin\varphi(\tau_1) \ . \tag{П.17}$$

Произведем разложение функции ψ по малым параметрам порядка R/l_e и R/δ методом интегрирования по частям выражения (П.17) с использованием уравнений характеристик (П.14)–(П.16). Для этого умножим и разделим подынтегральное выражение в (П.17) на $\dot{\varphi}$. При этом, в силу уравнения (П.16), имеем

$$\psi = \frac{v_\perp}{v_{F,e}} \int\limits_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 \, \dot{\varphi} \frac{R}{l_e} E \exp(\tau_1 - \tau) \sin\varphi \ . \tag{П.18}$$

Проинтегрируем по частям интеграл (П.18):

$$\psi = -\frac{v_\perp}{v_{F,e}} \frac{R}{l_e} E \cos\varphi + \frac{v_\perp}{v_{F,e}} \int\limits_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 \frac{R}{l_e} E \exp(\tau_1 - \tau) \cos\varphi + \frac{v_\perp^2}{v_{F,e}^2} \int\limits_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 \, (RE)_x \exp(\tau_1 - \tau) \cos^2\varphi \ . \tag{П.19}$$

Индекс x в третьем слагаемом формулы (П.19) означает частную производную по координате. Отметим, что в выражении (П.19), а также во всех последующих формулах мы опустили частные производные полей по времени, так как в низкочастотной ситуации (1.1) эффекты временной дисперсии проводимости несущественны.

Рассмотрим отдельно второе слагаемое в выражении (П.19):

$$I_1 = \frac{v_\perp}{v_{F,e}} \int\limits_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 \frac{R}{l_e} E \exp(\tau_1 - \tau) \cos\varphi \ . \tag{П.20}$$

Интегрируя (П.20) по частям способом, которым мы пользовались выше, получаем

$$I_1 = \frac{v_\perp}{v_{F,e}} \frac{R^2}{l_e^2} E \sin\varphi - \frac{v_\perp}{v_{F,e}} \int\limits_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 \, \dot{\varphi} \frac{R^3}{l_e^3} E \exp(\tau_1 - \tau) \sin\varphi - \frac{1}{2} \frac{v_\perp^2}{v_{F,e}^2} \int\limits_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 \, \dot{\varphi} R \left(\frac{R^2}{l_e^2} E \right)_x \exp(\tau_1 - \tau) \sin 2\varphi \ . \tag{П.21}$$

Как видно из выражения (П.21), главный член разложения интеграла I_1 является квадратичным по параметру R/l_e, а следующие члены асимптотического ряда будут иметь третий порядок малости по параметрам R/l_e и R/δ.

Рассмотрим третье слагаемое в выражении (П.19). Принимая во внимание тригонометрическое тождество $\cos^2\varphi = (1 + \cos 2\varphi)/2$, это слагаемое можно представить в виде

$$I_2 = \frac{1}{2} \frac{v_\perp^2}{v_{F,e}^2} \int\limits_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 (RE)_x \exp(\tau_1 - \tau) + \frac{1}{2} \frac{v_\perp^2}{v_{F,e}^2} \int\limits_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 \, (RE)_x \exp(\tau_1 - \tau) \cos 2\varphi \ . \tag{П.22}$$

Структура подынтегрального выражения первого члена в формуле (П.22) не позволяет произвести процедуру разложения этого интеграла методом, которым мы пользовались до сих пор. Поэтому преобразуем это слагаемое следующим образом:

$$\frac{1}{2} \frac{v_\perp^2}{v_{F,e}^2} \int\limits_{-\infty}^{\tau} d(\exp(\tau_1 - \tau))(RE)_x = \frac{1}{2} \frac{v_\perp^2}{v_{F,e}^2} (RE)_x - \frac{1}{2} \frac{v_\perp^3}{v_{F,e}^3} \int\limits_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 \, l_e \, (RE)_{xx} \exp(\tau_1 - \tau) \cos\varphi \ . \tag{П.23}$$

Подставив выражение (П.23) формулу (П.22) и сформировав производную φ в интегральных слагаемых, получаем следующее выражение для I_2:

$$I_2 = \frac{1}{2} \frac{v_\perp^2}{v_{F,e}^2} (RE)_x - \frac{1}{2} \frac{v_\perp^3}{v_{F,e}^3} \int\limits_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 \, \dot{\varphi} \, R(RE)_{xx} \exp(\tau_1 - \tau) \cos\varphi + \frac{1}{2} \frac{v_\perp^2}{v_{F,e}^2} \int\limits_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 \, \dot{\varphi} \frac{R}{l_e} (RE)_x \exp(\tau_1 - \tau) \cos 2\varphi \tag{П.24}$$

Главный член разложения интеграла I_2 , как видно из этого выражения, является линейным по параметру R/δ, а следующие члены разложения будут иметь второй порядок малости по параметрам R/l_e и R/δ. Действительно, интегрируя по частям второе и третье слагаемые в (П.24), имеем

$$I_2 = \frac{1}{2}\frac{v_\perp^2}{v_{F,e}^2}(RE)_x - \frac{1}{2}\frac{v_\perp^3}{v_{F,e}^3}R(RE)_{xx}\sin\varphi + \frac{1}{4}\frac{v_\perp^2}{v_{F,e}^2}\frac{R}{l_e}(RE)_x\sin 2\varphi + \frac{1}{2}\frac{v_\perp^3}{v_{F,e}^3}\int\limits_{-\infty}^{\tau} d\tau_1\,\dot\varphi\,\frac{R^2}{l_e}(RE)_{xx}\exp(\tau_1-\tau)\sin\varphi +$$
$$+\frac{1}{4}\frac{v_\perp^4}{v_{F,e}^4}\int\limits_{-\infty}^{\tau} d\tau_1\,\dot\varphi\,R(R(RE)_{xx})_x\exp(\tau_1-\tau)\sin 2\varphi - \frac{1}{4}\frac{v_\perp^2}{v_{F,e}^2}\int\limits_{-\infty}^{\tau} d\tau_1\,\dot\varphi\,\frac{R^2}{l_e^2}(RE)_x\exp(\tau_1-\tau)\sin 2\varphi -$$
$$-\frac{1}{8}\frac{v_\perp^3}{v_{F,e}^3}\int\limits_{-\infty}^{\tau} d\tau_1\,\dot\varphi\,(\sin 3\varphi+\sin\varphi)\frac{R}{l_e}(R(RE)_x)_x\exp(\tau_1-\tau)\,. \qquad (П.25)$$

Разложение интегральных слагаемых в формуле (П.25) начинается с членов третьего порядка малости по R/l_e и R/δ.

Подставив выражения (П.21), (П.25) в формулу (П.19) и опустив члены более высокого порядка малости, чем второй, для функции ψ получаем

$$\psi = -\frac{v_\perp}{v_{F,e}}\frac{R}{l_e}E\cos\varphi + \frac{1}{2}\frac{v_\perp^2}{v_{F,e}^2}(RE)_x +$$
$$+\frac{v_\perp}{v_{F,e}}\frac{R^2}{l_e^2}E\sin\varphi + \frac{1}{4}\frac{v_\perp^2}{v_{F,e}^2}\frac{R}{l_e}(RE)_x\sin 2\varphi -$$
$$-\frac{1}{2}\frac{v_\perp^3}{v_{F,e}^3}R(RE)_{xx}\sin\varphi\,. \qquad (П.26)$$

Принимая во внимание выражения (П.12) для скоростей v_x и v_y, формулу (5.26) для функции ψ можно переписать в виде

$$\psi = -\frac{v_x}{v_{F,e}}\frac{R}{l_e}E + \frac{1}{2}\frac{v_\perp^2}{v_{F,e}^2}(RE)_x + \frac{v_y}{v_{F,e}}\frac{R^2}{l_e^2}E +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{v_x v_y}{v_{F,e}^2}\frac{R}{l_e}(RE)_x - \frac{1}{2}\frac{v_\perp^2 v_y}{v_{F,e}^3}R(RE)_{xx}\,. \qquad (П.27)$$

Для вычисления асимптотики плотности тока функцию ψ, определяемую выражением (П.27), необходимо проинтегрировать совместно с $v_y\,\partial f_F/\partial\varepsilon$ по всему пространству скоростей. При этом очевидно, что в силу нечетности пределов интегрирования вклад в плотность тока (П.1) дают только те слагаемые в выражении (П.27), которые являются нечетными функциями v_y и либо вовсе не зависят от v_x , либо являются четными по этой компоненте скорости электрона. Таковыми в формуле (П.27) являются третье и пятое слагаемые, по порядку величины пропорциональные параметрам $(R/l_e)^2$ и $(R/\delta)^2$ соответственно. Интегрирование этих слагаемых совместно с функцией $v_y\,\partial f_F/\partial\varepsilon$ проводится элементарно и приводит к следующему результату:

$$j_e(x,t) = \frac{ne^2 l_e}{p_F}\times$$
$$\times\left[\frac{R^2(x,t)}{l_e^2}E(x,t) - \frac{2}{5}R(x,t)\frac{\partial^2(R(x,t)E(x,t))}{\partial x^2}\right]. \qquad (П.28)$$

Учитывая аналогичный вклад дырок в плотность тока, приходим к выражению (2.4).

В заключение необходимо отметить, что при получении формулы (П.27) мы не накладывали никаких ограничений на соотношение между длиной свободного пробега электронов l_e и характерным пространственным масштабом изменения поля δ. Поэтому для справедливости выражения (П.27) и, следовательно, асимптотики плотности тока (П.28) требуется лишь выполнение условий (П.11).

1. Э. А. Канер, Н. М. Макаров, И. Б. Снапиро, В. А. Ямпольский, *ЖЭТФ* **87**, 2166 (1984).
2. И. Ф. Волошин, С. В. Кравченко, Н. А. Подлевских, Л. М. Фишер, *ЖЭТФ* **89**, 233 (1985).
3. Э. А. Канер, Н. М. Макаров, И. Б. Снапиро, В. А. Ямпольский, *ЖЭТФ* **88**, 1310 (1985).
4. Э. А. Канер, Ю. Г. Леонов, Н. М. Макаров, В. А. Ямпольский, *ЖЭТФ* **93**, 2020 (1987).
5. G. I. Babkin and V. T. Dolgopolov, *Solid State Commun.* **18**, 713 (1976).
6. Н. М. Макаров, В. А. Ямпольский, *ЖЭТФ* **85**, 614 (1983).
7. Н. М. Макаров, И. В. Юркевич, В. А. Ямпольский, *ЖЭТФ* **89**, 209 (1985).
8. Э. А. Канер, Н. М. Макаров, И. В. Юркевич, В. А. Ямпольский, *ЖЭТФ* **93**, 274 (1987).

9. Г. А. Вугальтер, В. Я. Демиховский, *ЖЭТФ* **70**, 1419 (1976).
10. А. П. Копасов, *ЖЭТФ* **72**, 191 (1977).
11. L. M. Fisher, N. M. Makarov, V. E. Vekslerchik, and V. A. Yampol'skii, *J. Phys.: Condens. Matter* **7**, 7549 (1995).
12. В. Т. Долгополов, П. П. Чупров, *ЖЭТФ* **83**, 2287 (1982).
13. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
14. Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович, *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*, Наука, Москва (1990).
15. Н. М. Макаров, И. В. Юркевич, В. А. Ямпольский, *ЖЭТФ* **94**, 238 (1988).

Nonlinear low frequency structures of electromagnetic field in a compensated metal

V. E. Vekslerchik, I. B. Snapiro, and G. B. Tkachev

The possibility of appearing of essentially nonlinear low frequency electromagnetic eigenwaves in a compensated metal is studied theoretically. It is shown that in an unbounded metalic medium the soliton- and kink-type structures can form which are the propagating tranwerse stationary waves in their character. The nonlinear waves found are supposed to be caused by the influence of their intrinsic strong inhomogeneous magnetic field on the charge carrier dynamics.