УДК 517.9

СЛАБКОНЕЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У КРИТИЧНОМУ ВИПАДКУ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

О. А. Бойчук

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: boichuk@imath.kiev.ua

Є. В. Панасенко

Запоріз. нац. ун-т
Україна, 69600, Запоріжжя, вул. Жуковського, 66
e-mail: innovatory@rambler.ru

We obtain necessary and sufficient conditions for existence of solutions to weakly nonlinear boundary-value problems for differential equations in a Banach space. A convergent iteration procedure for finding a solution is proposed. We also give a connection between necessary and sufficient conditions.

Получены необходимое и достаточное условия существования решений слабонелинейных краевых задач для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Предложен сходящийся итерационный процесс нахождения решения. Установлена связь между необходимым и достаточным условиями.

1. Постановка задачі та попередній результат. Розглянемо у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$ крайову задачу для нелінійного диференціального рівняння з малим невід'ємним параметром ε вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + \varepsilon Z(x,t,\varepsilon) + f(t), \tag{1}$$

$$\ell x(\cdot) = \alpha + \varepsilon J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{2}$$

де вектор-функція $f(t)$ діє з відрізка $[a;b]$ у банахів простір $\mathbf{B}_1 : f(t) \in C([a;b],\mathbf{B_1}) :=$ $:= \{f(\cdot) : [a;b] \to \mathbf{B}_1, |||f||| = \sup_{t\in[a;b]} \|f(t)\|\}$, $C([a;b],\mathbf{B_1})$ — банахів простір неперервних на $[a;b]$ вектор-функцій; оператор-функція $A(t)$, що при кожному $t \in [a;b]$ діє з банахового простору $\mathbf{B}_1$ в себе, сильно неперервна [1, с. 141] з нормою $|||A||| =$ $= \sup_{t\in[a;b]} \|A(t)\| < \infty$; $Z(x,t,\varepsilon)$ — нелінійна вектор-функція, неперервно диференційовна за змінною x в околі породжуючого розв'язку і неперервна по t, ε, тобто $Z(\cdot,t,\varepsilon) \in$ $\in C^1[\|x - x_0\| \le q]$; $Z(x,\cdot,\varepsilon) \in C([a;b],\mathbf{B_1})$; $Z(x,t,\cdot) \in C[0;\varepsilon_0]$, q та ε_0 — достатньо малі константи; α — елемент простору $\mathbf{B}_2 : \alpha \in \mathbf{B}_2$; $J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелінійний обмежений вектор-функціонал, неперервно диференційовний по x у розумінні Фреше і неперервний по ε в околі породжуючого розв'язку. Оператор ℓ є лінійним неперервним на $[a;b]$ векторним функціоналом, що діє з простору $C[a;b]$ у банахів простір $\mathbf{B}_2 : \ell : C^1([a;b],\mathbf{B_1}) \to \mathbf{B_2}$.

Тоді під розв'язком рівняння (1) будемо розуміти розв'язок $x(t) = x(t,\varepsilon)$ інтегрального рівняння

$$x(t,\varepsilon) = x_0 + \int\limits_a^t (A(s)x(s) + \varepsilon Z(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon) + f(s))ds,$$

який є неперервно диференційовним у кожній точці $t \in [a;b]$ і задовольняє рівняння (1) скрізь на $[a;b]$.

Розглянемо критичний випадок, коли відповідна неоднорідна породжуюча крайова задача має нетривіальний розв'язок $x_0(t,c)$ [2]. Будемо шукати умову існування й алгоритм побудови розв'язку $x = x(t,\varepsilon) : x(\cdot,\varepsilon) \in C^1([a;b],\mathbf{B_1})$, $x(t,\cdot) \in C[0;\varepsilon_0]$ крайової задачі (1), (2), що перетворюється при $\varepsilon = 0$ в один із розв'язків $x_0(t,c) = x(t,0)$ крайової задачі

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in [a;b], \tag{3}$$

$$\ell x(\cdot) = \alpha \in \mathbf{B}_2, \tag{4}$$

який у подальшому будемо називати породжуючим розв'язком крайової задачі (1), (2).

Згідно з теоремою [2] породжуюча крайова задача (3), (4) має сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$x_0(t,c) = U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c + U(t)Q^-\alpha + (G[f])(t) \tag{5}$$

тоді і тільки тоді, коли неоднорідності $f(t) \in C([a;b],\mathbf{B_1})$ у диференціальному рівнянні та $\alpha \in \mathbf{B}_2$ у крайовій умові задовольняють умову

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[\alpha - \ell\int\limits_a^b K(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau\right] = 0, \tag{6}$$

де $U(t)$ — еволюційний оператор однорідного диференціального рівняння (3) [1, с. 147], $Q = \ell U(\cdot)$ — оператор, отриманий підстановкою в крайову умову (4) еволюційного оператора; Q^- — узагальнено-обернений оператор до оператора Q [3], $\mathcal{P}_{N(Q)} = I - Q^-Q$ і $\mathcal{P}_{N(Q^*)} = I - QQ^-$ — оператори проектування, які проектують банахів простір $\mathbf{B_1}$ на ядро $N(Q)$ і коядро $N(Q^*)$ оператора Q відповідно; $(G[f])(t)$ — узагальнений оператор Гріна задачі (3), (4), який діє на вектор-функцію $f(t) \in C([a;b],\mathbf{B_1})$ таким чином:

$$(G[f])(t) := \int\limits_a^b K(t,\tau)f(\tau)d\tau - U(t)Q^- \cdot \ell\int\limits_a^b K(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau.$$

У випадку скінченновимірних просторів $\mathbf{B}_1 = \mathbb{R}^n$ і $\mathbf{B}_2 = \mathbb{R}^m$ дану проблему вирішено у роботах [3, 4]. Для періодичних $(m = n, \ell x = x(a) - x(b) = \alpha = 0)$ і двоточкових $(m = n,$ $\ell x = M_1x(a) - M_2x(b)$, $M_i - (n \times n)$-матриці) крайових задач аналогічні постановки задач розглядались у роботах [5–8]. Крім того, умовам існування та алгоритму знаходження обмежених на всій осі $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ розв'язків для слабконелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі присвячено статтю [9].

2. Основний результат. Розглянемо питання про необхідні умови існування розв'язків $x(t, \varepsilon)$ крайової задачі (1), (2) у критичному випадку ($\mathcal{P}_{N(Q^*)} \neq 0$), які при $\varepsilon = 0$ перетворюються в породжуючий розв'язок $x_0(t, c)$ вигляду (5) з константою $c = c_0$ породжуючої крайової задачі (3), (4).

Для цього накладемо на оператор-функцію $Z(x, t, \varepsilon)$ такі обмеження: $Z(\cdot, \cdot, \cdot) \in C[\|x - x_0\| \leq q] \times C([a; b], \mathbf{B_1}) \times \mathbf{C}[\mathbf{0}; \varepsilon_\mathbf{0}]$, q та ε_0 — достатньо малі константи.

Теорема 1 (необхідна умова). *Нехай виконано умову розв'язності (6) породжуючої крайової задачі (3), (4) і критична крайова задача (1), (2) ($\mathcal{P}_{N(Q^*)} \neq 0$) має розв'язок $x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in C^1([a; b], \mathbf{B_1})$, $x(t, \cdot) \in C[0; \varepsilon_0]$, який перетворюється при $\varepsilon = 0$ в породжуючий розв'язок $x_0(t, c_0)$ вигляду (5) з константою $c = c_0$. Тоді константа $c_0 \in \mathbf{B_1}$ задовольняє операторне рівняння*

$$F(c) = \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[J(x_0(\cdot, c), 0) - \ell \int_a^b K(\cdot, \tau) Z(x_0(\tau, c), \tau, 0) d\tau \right] = 0, \tag{7}$$

яке будемо називати рівнянням для породжуючих констант крайової задачі (1), (2).

Доведення. Якщо крайова задача (1), (2) має розв'язок, то згідно з теоремою [2] повинна виконуватись умова розв'язності

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\alpha + \varepsilon J(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell \int_a^b K(\cdot, \tau) \left(\varepsilon Z(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) + f(\tau) \right) \, d\tau \right] = 0.$$

Враховуючи умову розв'язності (6), отримуємо рівність при $\varepsilon \neq 0$:

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} \varepsilon \left[J(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell \int_a^b K(\cdot, \tau) Z(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \, d\tau \right] = 0.$$

Враховуючи неперервність по t і ε оператор-функції $Z(x, t, \varepsilon)$ та переходячи до границі при $\varepsilon \to 0$, $x(t, \varepsilon) \to x_0(t, c_0)$, одержуємо

$$F(c_0) = \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[J(x_0(\cdot, c_0), 0) - \ell \int_a^b K(\cdot, \tau) Z(x_0(t, c_0), \tau, 0) \, d\tau \right] = 0, \tag{8}$$

що і доводить теорему.

Якщо рівняння (8) має розв'язок, то елемент c_0 обумовлює той породжуючий розв'язок $x_0(t, c_0)$, якому може відповідати розв'язок $x(t, \cdot) \in C[0; \varepsilon_0]$, $x(t, 0) = x_0(t, c_0)$ крайової задачі (1), (2). Якщо ж рівняння (8) не має дійсного розв'язку, то крайова задача (1), (2) не має шуканого розв'язку в просторі $C^1([a, b], \mathbf{B_1})$.

У випадку періодичної крайової задачі (1), (2) $(m = n, d = r, \ell x = x(a) - x(b) = \alpha = 0,$ $\mathbf{B}_1 = \mathbb{R}^n$ і $\mathbf{B}_2 = \mathbb{R}^n)$ константа c_0 має фізичний зміст — це амплітуда породжуючого розв'язку, і тому таке рівняння у класичній теорії нелінійних коливань [7, 8] має назву „рівняння для породжуючих амплітуд".

Для отримання достатньої умови існування розв'язку виконаємо у крайовій задачі (1), (2) заміну змінних

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t, c_0) + y(t, \varepsilon),$$

в якій $x_0(t, c_0)$ — породжуючий розв'язок (5), c_0 — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$, що задовольняє операторне рівняння констант (8).

Додатково будемо вимагати, щоб оператор-функція $Z(x, t, \varepsilon)$ була диференційовною за Фреше в околі породжуючого розв'язку $(Z(\cdot, t, \varepsilon) \in C^1[\|x - x_0\| \leq q])$.

Визначимо умови існування і побудуємо розв'язок $y(t, \varepsilon) \,:\, y(\cdot, \varepsilon) \in C^1([a; b], \mathbf{B_1});$ $y(t, \cdot) \in C[0; \varepsilon_0]$, який перетворюється в нульовий розв'язок при $\varepsilon = 0$ крайової задачі

$$\frac{dx_0(t, c_0)}{dt} + \frac{dy(t, \varepsilon)}{dt} = A(t)x_0(t, c_0) + A(t)y(t, \varepsilon) + \varepsilon Z(x_0(t, c_0) + y(t, \varepsilon), t, \varepsilon) + f(t), \qquad (9)$$

$$\ell x_0(\cdot, c_0) + \ell y(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(x_0(\cdot, c_0) + y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \qquad (10)$$

Враховуючи, що $x_0(t, c_0)$ є розв'язком крайової задачі (3), (4), із (9), (10) отримуємо крайову задачу

$$\frac{dy(t, \varepsilon)}{dt} = A(t)y(t, \varepsilon) + \varepsilon Z(x_0(t, c_0) + y(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \qquad (11)$$

$$\ell y(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon J(x_0(\cdot, c_0) + y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \qquad (12)$$

Використовуючи неперервну диференційовність оператор-функції $Z(x, t, \varepsilon)$ і векторного функціонала $J(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ по x в околі точки $\varepsilon = 0$, виділяємо у оператор-функції $Z(x_0(t, c_0) + y(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ і векторного функціонала $J(x_0(t, c_0) + y(t, \varepsilon), \varepsilon)$ лінійну частину по y і члени нульового порядку по ε. Тоді мають місце розвинення

$$Z(x_0(t, c_0) + y(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \varphi_0(t, c_0) + A_1(t)y(t, \varepsilon) + R(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \qquad (13)$$

$$J(x_0(\cdot, c_0) + y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = J_0(x_0(\cdot, c_0)) + \ell_1 y(\cdot, \varepsilon) + R_1(y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \qquad (14)$$

де

$$\varphi_0(t, c_0) = Z(x_0(t, c_0), t, 0) \in C([a; b], \mathbf{B_1}),$$

$$J_0(x_0(\cdot, c_0)) = J(x_0(\cdot, c_0), 0),$$

$$A_1(t) = A_1(t, c_0) = \left.\frac{\partial Z(x, t, 0)}{\partial x}\right|_{x = x_0(t, c_0)} \in C([a; b], \mathbf{B_1}),$$

похідна розуміється в сенсі Фреше; $\ell_1 y(\cdot,\varepsilon)$ — лінійна частина векторного функціонала $J(x_0(\cdot,c_0)+y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$. Нелінійна оператор-функція $R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ належить класу $C^1[\|y\| \leq \leq q], C([a;b],\mathbf{B_1}), C[0;\varepsilon_0]$. При цьому

$$R(0,t,0)=0, \quad \frac{\partial R(0,t,0)}{\partial y}=0,$$

$$R_1(0,0)=0, \quad \frac{\partial R_1(0,0)}{\partial y}=0.$$

Застосуємо до крайової задачі (11), (12) теорему [2], в якій нелінійності $Z(x_0(t,c_0)+ +y(t,\varepsilon),t,\varepsilon),\ J(x_0(\cdot,c_0)+y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ формально розглядаємо як неоднорідності. Крім того, формально розв’язок крайової задачі (11), (12) можна записати у вигляді $y(t,\varepsilon) = = U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c + y^{(1)}(t,\varepsilon)$. При цьому невідомий елемент $c=c(\varepsilon)\in\mathbf{B_1}$ і невідома функція $y^{(1)}(t,\varepsilon)$ визначаються відповідно з умови розв’язності крайової задачі (11), (12) і зображення $y^{(1)}(t,\varepsilon)$ частинного розв’язку крайової задачі

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\varepsilon\Bigg[J_0(x_0(\cdot,c_0))+\ell_1 y(\cdot,\varepsilon)+R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$
$$-\,\ell\int_a^b K(\cdot,\tau)\left(\varphi_0(t,c_0)+A_1(t)y(t,\varepsilon)+R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\right)d\tau\Bigg]=0, \quad \varepsilon\neq 0,$$

або

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\Bigg[J_0(x_0(\cdot,c_0))+\ell_1\Big(U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c+y^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\Big)+R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$
$$-\ell\int_a^b K(\cdot,\tau)\Big(\varphi_0(t,c_0)+A_1(t)\Big\{U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c+y^{(1)}(\tau,\varepsilon)\Big\}+R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big)\,d\tau\Bigg]=0,$$

і

$$y^{(1)}(t,\varepsilon)=\varepsilon\left(G\left[\varphi_0(\tau,c_0)+A_1(\tau)y(\tau,\varepsilon)+R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\right]\right)(t)+$$
$$+\,\varepsilon U(t)Q^-\left\{J_0(x_0(\cdot,c_0))+\ell_1 y(\cdot,\varepsilon)+R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right\}.$$

Для знаходження розв’язку $y(t,\cdot)\in C[0;\varepsilon_0]$, $y(t,0)=0$ крайової задачі (11), (12) отримаємо еквівалентну операторну систему

$$y(t,\varepsilon)=U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c+y^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$B_0 c = -\mathcal{P}_{N(Q^*)}\Bigg[\ell_1 y^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ - \ell\int\limits_a^b K(\cdot,\tau)\left\{A_1(\tau)y^{(1)}(\tau,\varepsilon) + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\right\}d\tau\Bigg] \qquad (15)$$

і

$$y^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\left(G\left[\varphi_0(\tau,c_0) + A_1(\tau)\left(U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c + y^{(1)}(\tau,\varepsilon)\right) + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\right]\right)(t) + \\ + \varepsilon U(t)Q^{-}\left\{J_0(x_0(\cdot,c_0)) + \ell_1\left(U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c + y^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\right) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right\},$$

де оператор B_0 має вигляд

$$B_0 = \mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[\ell_1 U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)} - \ell\int\limits_a^b K(\cdot,\tau)A_1(\tau)U(\tau)\mathcal{P}_{N(Q)}d\tau\right]. \qquad (16)$$

Припустимо, що оператор $B_0 : \mathbf{B_1} \to \mathbf{B_2}$ є узагальнено-оборотним [4, с. 39]. Тоді, як показано в [10], він є нормально-розв'язним і існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(B_0)} : \mathbf{B_1} \to N(B_0)$ та $\mathcal{P}_Y : \mathbf{B_2} \to Y$, які індукують розбиття $\mathbf{B_1}$ і $\mathbf{B_2}$ у прямі топологічні суми замкнених підпросторів

$$\mathbf{B_1} = N(B_0) \oplus X,$$

$$\mathbf{B_2} = Y \oplus R(B_0).$$

Внаслідок нормальної розв'язності оператора B_0 рівняння (15) є розв'язним [11] тоді і тільки тоді, коли його права частина задовольняє умову

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(Q^*)}\Bigg[\ell_1 y^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ - \ell\int\limits_a^b K(\cdot,\tau)\left\{A_1(\tau)y^{(1)}(\tau,\varepsilon) + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\right\}d\tau\Bigg] = 0.$$

Остання умова виконується, якщо буде виконано умову

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(Q^*)} = 0. \qquad (17)$$

При умові (17) операторне рівняння (15) є розв'язним. В результаті операторна система, що еквівалентна крайовій задачі (11), (12) у просторі функцій $y(\cdot,\varepsilon) \in C^1([a;b],\mathbf{B_1})$, $y(t,\cdot) \in C[0;\varepsilon_0]$, має вид

$$y(t,\varepsilon) = U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c + y^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$
\begin{aligned}
c &= -B_0^- \mathcal{P}_{N(Q^*)} \Bigg[\ell_1 y^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\
&\quad - \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) \Big\{ A_1(\tau) y^{(1)}(\tau,\varepsilon) + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon) \Big\}\, d\tau \Bigg], \\
y^{(1)}(t,\varepsilon) &= \varepsilon \Big(G \Big[\varphi_0(\tau,c_0) + A_1(\tau) \Big(U(t)\mathcal{P}_{N(Q)} c + y^{(1)}(\tau,\varepsilon) \Big) + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon) \Big] \Big)(t) + \\
&\quad + \varepsilon U(t) Q^- \Big\{ J_0(x_0(\cdot,c_0)) + \ell_1 \Big(U(t)\mathcal{P}_{N(Q)} c + y^{(1)}(\cdot,\varepsilon) \Big) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \Big\}.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Операторна система (18) належить до класу систем вигляду [7], для розв'язання яких використаємо метод простих ітерацій.

Введемо допоміжний вектор-стовпець $u = \begin{pmatrix} y \\ c \\ y^{(1)} \end{pmatrix} \in \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1$, що належить декартовому добутку просторів $\mathbf{B}_1$ на себе, і допоміжний оператор

$$
L_1 \psi(t) = -B_0^- \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\ell_1 \psi(\cdot) - \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) A_1(\tau) \psi(\tau) d\tau \right]. \tag{19}
$$

Тоді операторну систему (18) можна записати у вигляді

$$
u = \begin{bmatrix} 0 & U(t)\mathcal{P}_{N(Q)} & I \\ 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u + F(u,t,\varepsilon), \tag{20}
$$

де I — одиничний оператор і

$$
\begin{aligned}
F(u,t,\varepsilon) = \operatorname{col} \Bigg(& 0, -R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) + \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\, d\tau, \\
& \varepsilon (G[\varphi_0(\tau,c_0) + A_1(\tau)(U(t)\mathcal{P}_{N(Q)} c + y^{(1)}(\tau,\varepsilon)) + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)])(t) + \\
& + \varepsilon U(t) Q^- \Big\{ J_0(x_0(\cdot,c_0)) + \ell_1 \big(U(t)\mathcal{P}_{N(Q)} c + y^{(1)}(\cdot,\varepsilon) \big) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \Big\} \Bigg),
\end{aligned}
$$

$$
F(0,t,0) = 0, \quad \frac{\partial F(0,t,0)}{\partial y} = 0.
$$

Операторна система (20) еквівалентна системі

$$
\begin{bmatrix} I & -U(t)\mathcal{P}_{N(Q)} & -I \\ 0 & I & -L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} u = F(u,t,\varepsilon).
$$

Введемо позначення

$$L = \begin{bmatrix} I & -U(t)\mathcal{P}_{N(Q)} & -I \\ 0 & I & -L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad F = F(u,t,\varepsilon).$$

Доведемо, що оператор L оборотний і обернений до нього оператор є обмеженим. Для цього знайдемо в явному вигляді обернений оператор L^{-1}. Він існує внаслідок структури клітинного верхньотрикутного оператора L, головна діагональ якого складається з одиничних операторів. Тому будемо шукати його у вигляді операторної матриці

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

де кожна компонента a_{ij} — це оператор, що діє в банаховому просторі $\mathbf{B}_1$ $(a_{ij} : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1)$.

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що оператор L має обмежений оборотний оператор L^{-1} :

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} I & U(t)\mathcal{P}_{N(Q)} & U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}L_1 + I \\ 0 & I & L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Доведемо обмеженість оператора L^{-1}. Покажемо, що існує константа $c_1 > 0$ така, що для всіх $u \in \mathbf{B}_1^3$ виконується нерівність $\|L^{-1}u\|_{\mathbf{B}_1^3} \le c_1\|u\|_{\mathbf{B}_1^3}$. Ця нерівність еквівалентна наступній: існує константа $c_2 > 0$ така, що для всіх $y, c, y^{(1)} \in \mathbf{B}_1^3$ виконується нерівність

$$\left|\left|\left| L^{-1}\begin{pmatrix} y \\ c \\ y^{(1)} \end{pmatrix} \right|\right|\right|_{\mathbf{B}_1^3} \le c_2\left(|||y|||_{\mathbf{B}_1} + |||c|||_{\mathbf{B}_1} + |||y^{(1)}|||_{\mathbf{B}_1}\right),$$

$$L^{-1}\begin{pmatrix} y \\ c \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c + U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}L_1y^{(1)} + Iy^{(1)} \\ c + L_1y^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Доведемо обмеженість норми кожної компоненти вектора в банаховому просторі $\mathbf{B}_1$:

$$|||U|||_{\mathbf{B}_1} = \sup_{t\in[a;b]}\|U(t)\| < \infty.$$

Крім того, нехай

$$|||B_0^-|||_{\mathbf{B}_1} = b_0, \quad |||\mathcal{P}_{N(Q)}|||_{\mathbf{B}_1} = \tilde{p}, \quad |||\mathcal{P}_{N(Q^*)}|||_{\mathbf{B}_1} = \tilde{p}^*,$$

$$\|L_1\psi(t)\| = \left\|-B_0^-\mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[\ell_1\psi(\cdot) - \ell\int_a^b K(\cdot,\tau)A_1(\tau)\psi(\tau)d\tau\right]\right\| \le$$

$$\le b_0\tilde{p}^*|||\ell_1|||\cdot|||\psi||| + \tilde{a}|||\ell|||\cdot|||A_1|||\cdot|||\psi||| = |||L_1|||.$$

Тому

$$\left|\left|\left|y + U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)}c + U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)}L_1 y^{(1)} + Iy^{(1)}\right|\right|\right|_{\mathbf{B}_1} \leq$$

$$\leq |||y|||_{\mathbf{B}_1} + |||U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)}|||_{\mathbf{B}_1}|||c|||_{\mathbf{B}_1} + |||U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)}L_1|||_{\mathbf{B}_1}|||y^{(1)}|||_{\mathbf{B}_1} +$$

$$+ |||Iy^{(1)}|||_{\mathbf{B}_1} \leq |||y|||_{\mathbf{B}_1} + c_3|||c|||_{\mathbf{B}_1} + c_4|||y^{(1)}|||_{\mathbf{B}_1},$$

аналогічно

$$\left|\left|\left|c + L_1 y^{(1)}\right|\right|\right|_{\mathbf{B}_1} \leq |||c|||_{\mathbf{B}_1} + |||L_1|||_{\mathbf{B}_1}|||y^{(1)}|||_{\mathbf{B}_1} \leq |||c|||_{\mathbf{B}_1} + c_5|||y^{(1)}|||_{\mathbf{B}_1}.$$

Отже,

$$\left|\left|\left|L^{-1}\begin{pmatrix} y \\ c \\ y^{(1)} \end{pmatrix}\right|\right|\right|_{\mathbf{B}_1^3} \leq |||y|||_{\mathbf{B}_1} + (c_3+1)|||c|||_{\mathbf{B}_1} + (c_4 + c_5 + 1)|||y^{(1)}|||_{\mathbf{B}_1} \leq$$

$$\leq c_2\left(|||y|||_{\mathbf{B}_1} + |||c|||_{\mathbf{B}_1} + |||y^{(1)}|||_{\mathbf{B}_1}\right),$$

де $c_2 = \max\{1, c_3+1, c_4+c_5+1\}$. Таким чином, обмеженість оператора L^{-1} доведено.

Запишемо операторну систему (18) з урахуванням позначень у вигляді

$$u = L^{-1}F = L^{-1}S(\varepsilon)u,$$

де оператор $S(\varepsilon)$ у загальному випадку є нелінійним. За рахунок вибору ε та обмеженості оператора L^{-1} можна досягти того, щоб оператор $L^{-1}S(\varepsilon)$ був оператором стиску. Тоді з принципу стискаючих відображень [12] буде випливати, що операторна система (18) має єдину нерухому точку, яка й буде розв'язком крайової задачі (1), (2).

3. Ітераційний процес. Побудуємо на основі операторної системи (18) ітераційний процес для знаходження розв'язку $y(t,\cdot) \in C[0;\varepsilon_0]$, $y(t,0) = 0$, крайової задачі (11), (12). Перше наближення $y_1^{(1)}(t,\varepsilon)$ до $y(t,\varepsilon)$ покладемо таким:

$$y_1^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\left(G\left[\varphi_0(\tau, c_0)\right]\right)(t) + \varepsilon U(t)Q^{-}J_0(x_0(\cdot, c_0)).$$

Оператор-функція $y_1^{(1)} = y_1^{(1)}(t,\varepsilon)$ — частинний розв'язок крайової задачі

$$\dot{y}_1 = A(t)y_1 + \varepsilon\varphi_0(t, c_0), \quad \ell y_1 = \varepsilon J_0(x_0(\cdot, c_0)),$$

існує внаслідок вибору $c_0 \in \mathbf{B_1}$ із рівняння (8) для породжуючих констант. Перше наближення $y_1(t,\varepsilon)$ до шуканого розв'язку $y(t,\varepsilon)$ крайової задачі (11), (12) будем вважати рівним $y_1^{(1)}(t,\varepsilon)$. Друге наближення $y_2^{(1)}(t,\varepsilon)$ до $y(t,\varepsilon)$ вважатимемо частинним розв'язком крайової задачі

$$\dot{y}_2 = A(t)y_2 + \varepsilon\left\{\varphi_0(t, c_0) + A_1(t)\left[U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c_1 + y_1^{(1)}(t,\varepsilon)\right] + R(y_1(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\right\},$$

$$\ell y_2 = \varepsilon \left\{ J_0(x_0(\cdot, c_0)) + \ell_1 \left[U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)} c_1 + y_1^{(1)}(\cdot, \varepsilon) \right] + R_1(y_1(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right\}$$

вигляду

$$y_2^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \left(G \left[\varphi_0(t, c_0) + A_1(t) \left[U(t)\mathcal{P}_{N(Q)} c_1 + y_1^{(1)}(t, \varepsilon) \right] + R(y_1(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right] \right)(t) +$$
$$+ \varepsilon U(t) Q^- \left\{ J_0(x_0(\cdot, c_0)) + \ell_1 \left[U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)} c_1 + y_1^{(1)}(\cdot, \varepsilon) \right] + R_1(y_1(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right\}.$$

Із умови розв'язності цієї задачі маємо

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} \varepsilon \Bigg[J_0(x_0(\cdot, c_0)) + \ell_1 \left[U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)} c_1 + y_1^{(1)}(\cdot, \varepsilon) \right] + R_1(y_1(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -$$
$$- \ell \int_a^b K(\cdot, \tau) \left(\varphi_0(\tau, c_0) + A_1(\tau) \left[U(\tau)\mathcal{P}_{N(Q)} c_1 + y_1^{(1)}(\tau, \varepsilon) \right] + R(y_1(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right) d\tau \Bigg] = 0, \ \varepsilon \neq 0.$$

Враховуючи, що елемент c_0 задовольняє рівняння (8), одержуємо систему

$$B_0 c_1 = -\mathcal{P}_{N(Q^*)} \Bigg[\ell_1 y_1^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + R_1(y_1(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -$$
$$- \ell \int_a^b K(\cdot, \tau) \left(A_1(\tau) y_1^{(1)}(\tau, \varepsilon) + R(y_1(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right) d\tau \Bigg], \tag{21}$$

де оператор B_0 має вигляд (16). Знаходимо перше наближення c_1 до $c(\varepsilon)$.

Внаслідок нормальної розв'язності оператора B_0 рівняння (21) є розв'язним [11] тоді і лише тоді, коли його права частина задовольняє умову

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)} \mathcal{P}_{N(Q^*)} \Bigg[\ell_1 y_1^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + R_1(y_1(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -$$
$$- \ell \int_a^b K(\cdot, \tau) \left(A_1(\tau) y_1^{(1)}(\tau, \varepsilon) + R(y_1(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right) d\tau \Bigg] = 0. \tag{22}$$

Умова (22) виконується, якщо буде виконано умову (17), і при цій же умові операторне рівняння (21) є розв'язним:

$$c_1 = -B_0^- \mathcal{P}_{N(Q^*)} \Bigg[\ell_1 y_1^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + R_1(y_1(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -$$
$$- \ell \int_a^b K(\cdot, \tau) \left(A_1(\tau) y_1^{(1)}(\tau, \varepsilon) + R(y_1(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right) d\tau \Bigg]. \tag{23}$$

Друге наближення $y_2^{(1)}(t,\varepsilon)$ до шуканого $y(t,\varepsilon)$ запишемо у вигляді

$$y_2(t,\varepsilon) = U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c_1 + y_2^{(1)}(t,\varepsilon).$$

Третє наближення $y_3^{(1)}(t,\varepsilon)$ до $y(t,\varepsilon)$ вважатимемо частинним розв'язком крайової задачі

$$\dot{y}_3 = A(t)y_3 + \varepsilon\left\{\varphi_0(t,c_0) + A_1(t)\left[U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c_2 + y_2^{(1)}(t,\varepsilon)\right] + R(y_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\right\},$$

$$\ell y_3 = \varepsilon\left\{J_0(x_0(\cdot,c_0)) + \ell_1\left[U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)}c_2 + y_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\right] + R_1(y_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right\}$$

вигляду

$$y_3^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\Big(G\Big[\varphi_0(t,c_0) + A_1(t)\left[U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c_2 + y_2^{(1)}(t,\varepsilon)\right] + R(y_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]\Big)(t) +$$
$$+ \varepsilon U(t)Q^-\left\{J_0(x_0(\cdot,c_0)) + \ell_1\left[U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)}c_2 + y_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\right] + R_1(y_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right\}.$$

Із умови розв'язності цієї задачі маємо

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\varepsilon\Bigg[J_0(x_0(\cdot,c_0)) + \ell_1\left[U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)}c_2 + y_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\right] + R_1(y_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$
$$-\ell\int_a^b K(\cdot,\tau)\left(\varphi_0(t,c_0) + A_1(t)\left[U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c_2 + y_2^{(1)}(t,\varepsilon)\right] + R(y_2(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\right)d\tau\Bigg] = 0,\ \varepsilon \neq 0.$$

Враховуючи, що елемент c_0 задовольняє рівняння (8), одержуємо систему

$$B_0c_2 = -\mathcal{P}_{N(Q^*)}\Bigg[\ell_1 y_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_1(y_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$
$$-\ell\int_a^b K(\cdot,\tau)\left(A_1(\tau)y_2^{(1)}(\tau,\varepsilon) + R(y_2(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\right)d\tau\Bigg], \qquad (24)$$

де оператор B_0 має вигляд (16). Знаходимо перше наближення c_2 до $c(\varepsilon)$.

Критерій розв'язності операторної системи (24) має вигляд

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(Q^*)}\Bigg[\ell_1 y_1^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + R_1(y_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$
$$-\ell\int_a^b K(\cdot,\tau)\left(A_1(\tau)y_2^{(1)}(\tau,\varepsilon) + R(y_2(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\right)d\tau\Bigg] = 0. \qquad (25)$$

Таким чином, якщо $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(Q^*)} = 0$, то й умови розв'язності типу (25) відповідних операторних систем на кожному кроці ітераційного процесу будуть виконані. Тому, продовжуючи цей процес, для знаходження розв'язку $y(t,\cdot) \in C[0;\varepsilon_0]$, $y(t,0) = 0$ крайової задачі (11), (12) отримуємо наступний ітераційний процес:

$$c_k = -B_0^- \mathcal{P}_{N(Q^*)} \Bigg[\ell_1 y_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_1(y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$- \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) \left(A_1(\tau) y_k^{(1)}(\tau,\varepsilon) + R(y_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon) \right) d\tau \Bigg], \tag{26}$$

$$y_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon \left(G \left[\varphi_0(t,c_0) + A_1(t)[U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c_k + y_k^{(1)}(t,\varepsilon)] + R(y_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon) \right] \right)(t) +$$

$$+ \varepsilon U(t) Q^- \left\{ J_0(x_0(\cdot,c_0)) + \ell_1 \left[U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)}c_k + y_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon) \right] + R_1(y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \right\},$$

$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c_k + y_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$k = 0,1,2,\ldots, \quad y_0(t,\varepsilon) = y_0^{(1)}(t,\varepsilon) = 0. \tag{27}$$

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 2 (достатня умова). *Нехай крайова задача (3), (4) при умові (6) має сім'ю розв'язків вигляду (5) та оператор B_0 задовольняє умови:*

1) оператор B_0 є узагальнено-оборотним;

2) $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(Q^*)} = 0$.

Тоді для будь-якого елемента $c = c_0 \in \mathbf{B_1}$, який задовольняє рівняння для породжуючих констант (7), крайова задача (11), (12) має хоча б один розв'язок $y(t,\cdot) \in C[0;\varepsilon_0]$, $y(t,0) = 0$. Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного на $[0;\varepsilon_0]$ ітераційного процесу (26), (27). Крайова задача (1), (2) має принаймні один розв'язок $x(t,\cdot) \in C[0;\varepsilon_*]$, який перетворюється при $\varepsilon = 0$ у породжуючий розв'язок $x_0(t,c_0)$. Цей розв'язок знаходиться за допомогою збіжного ітераційного процесу (26), (27) і формули $x_k(t,\varepsilon) = x_0(t,c_0) + y_k(t,\varepsilon)$, $k = 0,1,2,\ldots$.

4. Зв'язок між необхідною і достатньою умовами. Зв'язок між необхідною і достатньою умовами існування розв'язків слабконелінійної крайової задачі у критичному випадку в банаховому просторі встановлює наступне твердження.

Наслідок. *Нехай функціонал $F(c)$ має похідну Фреше $F^{(1)}(c)$ для деякого елемента c_0 банахового простору $\mathbf{B_1}$, який задовольняє операторне рівняння для породжуючих констант (7). Тоді якщо $F^{(1)}(c)$ має обернений оператор, то крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок для кожного c_0.*

Доведення. Запишемо похідну Фреше від функціонала $F(c)$:

$$F^{(1)}(c)[h] = \mathcal{P}_{N(Q^*)}\Bigg[J^{(1)}(v,\varepsilon)|_{v=x_0(\cdot,c),\varepsilon=0}[x_0^{(1)}(t,c)[h]]-$$

$$-\,\ell\int\limits_a^b K(\cdot,\tau)Z^{(1)}(v,\tau,\varepsilon)|_{v=x_0,\varepsilon=0}[x_0^{(1)}(\tau,c)[h]]\,d\tau\Bigg].$$

Це зображення випливає з теореми про суперпозицію диференційовних відображень у банаховому просторі [13, с. 131]. Знайдемо похідну Фреше $x_0^{(1)}(t,c)[h]$.

Оскільки $x_0(t,c) = U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c + U(t)Q^-\alpha + (Gf)(t)$, то

$$x_0^{(1)}(t,c)[h] = \left.\frac{\partial x_0(t,c+\lambda h)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left.\left[U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c + \lambda U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}h + U(t)Q^-\alpha + (Gf)(t)\right]\right|_{\lambda=0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left.\left[U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c\right]\right|_{\lambda=0} + \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\lambda U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}h\right]\big|_{\lambda=0} +$$

$$+\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\left.\left[U(t)Q^-\alpha\right]\right|_{\lambda=0} + \frac{\partial}{\partial\lambda}\left.\left[(Gf)(t)\right]\right|_{\lambda=0} = U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}h,$$

$$Z^{(1)}(v,\tau,\varepsilon)\Big|_{v=x_0,\varepsilon=0} = A_1(t), \quad J^{(1)}(v,\varepsilon)\Big|_{v=x_0(\cdot,c)} = \ell_1.$$

Таким чином, маємо

$$F^{(1)}(c)[h] = \mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[\ell_1 U(\cdot)\mathcal{P}_{N(Q)}[h] - \ell\int\limits_a^b K(\cdot,\tau)A_1(\tau)U(\tau)\mathcal{P}_{N(Q)}d\tau[h]\right] = B_0[h].$$

Оператор B_0 є оборотним внаслідок оборотності оператора $F^{(1)}(c)$. Завдяки цьому рівняння вигляду (15) має єдиний розв’язок, а отже, і крайова задача (1), (2) має єдиний розв’язок.

Таким чином, умова оборотності оператора $B_0 = F^{(1)}(c_0)$ пов’язує між собою необхідну і достатню умови існування розв’язків слабконелінійної крайової задачі у критичному випадку в банаховому просторі.

Зауваження. У випадку скінченновимірних просторів $\mathbf{B}_1 = \mathbb{R}^n$ і $\mathbf{B}_2 = \mathbb{R}^m$ умова оборотності оператора $F^{(1)}(c)$ еквівалентна умові простоти кореня c_0 рівняння для породжуючих констант.

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 536 с.

2. *Бойчук О. А., Панасенко Є. В.* Крайові задачі для диференціальних рівнянь в банаховому просторі // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 1. — С. 16 – 19.
3. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 317 p.
4. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 320 с.
5. *Бойчук А. А.* Построение решений двухточечных краевых задач для слабовозмущенных нелинейных систем в критических случаях // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 10. — С. 1416 – 1420.
6. *Бойчук А. А.* Краевые задачи для слабовозмущенных систем в критических случаях. — Киев, 1988. — 44 с. — (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики).
7. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
8. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.
9. *Бойчук О. А., Покутний О. О.* Обмежені розв'язки слабконелінійних диференціальних рівнянь в банаховому просторі // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 2. — С. 151 – 159.
10. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 104 с.
11. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 496 с.
12. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968. — 496 с.
13. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. — 2-е изд. — М.: Физматлит, 2005. — 384 с.
14. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1990. — 96 с.
15. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. — 308 с.

Одержано 03.02.10