УДК 517.91/912

ПОБУДОВА НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ ТА ОБМЕЖЕННЯМИ

А. Ю. Лучка, В. А. Ферук

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

We propose a new approach to study boundary-value problems for systems of differential equations with parameters and restrictions. This approach uses ideas of both the iteration and the projection methods. A new modification of the iteration-projection method for constructing approximate solutions of the problems is suggested and substantiated. This method has substantial advantages over the existing methods.

Предложен новый подход к исследованию краевых задач для систем дифференциальных уравнений с параметрами и ограничениями, в котором использованы идеи как итерационных, так и проекционных методов. Разработан и обоснован новый вариант проекционно-итеративного метода построения их приближенных решений, имеющий существенные преимущества по сравнению с существующими вариантами.

Розв'язування багатьох задач сучасного природознавства неможливо сьогодні уявити без побудови різноманітних математичних моделей, дослідження та аналіз яких стимулює розвиток низки галузей математики. Серед таких математичних моделей — широке коло задач з параметрами. Розробці теорії таких задач присвячено велику кількість робіт. Зокрема, в роботах [1 – 5] розглядалися питання аналітичної та якісної теорії і розробка наближених методів побудови розв'язків диференціальних, інтегральних та інтегродиференціальних рівнянь з параметрами і обмеженнями. У даній статті запропоновано новий підхід до дослідження крайових задач для систем диференціальних рівнянь з параметрами та обмеженнями і розроблено ефективний метод побудови їх розв'язків.

1. Постановка задачі. Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = f(t) + C(t)\lambda, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

розв'язки якої задовольняють умови

$$x(0) = \gamma + Dx(T), \quad \int_0^T S(t)x(t)dt = \alpha, \tag{2}$$

де $P(t)$, $C(t)$ та $S(t)$ — матриці розмірності $m \times m$, $m \times l$ та $l \times m$ відповідно, елементи яких сумовні з квадратом на відрізку $[0, T]$, до того ж стовпці матриці $C(t)$ є лінійно незалежними, D — стала $(m \times m)$-матриця, $f \in L_2([0, T], \mathbb{R}^m)$, $\alpha \in \mathbb{R}^l$, $\gamma \in \mathbb{R}^m$.

Під розв'язком задачі (1), (2) розумітимемо вектор $\lambda \in \mathbb{R}^l$ та вектор-функцію $x \in W_2^1([0, T], \mathbb{R}^m)$, які задовольняють рівняння (1) та умови (2). Якщо ж це не виконується, задача несумісна. У подальшому, для зручності, замість терміну „вектор-функція" будемо використовувати термін „функція".

2. Зведення задачі до інтегрального рівняння. З цією метою розглянемо крайову задачу

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x = y(t), \quad x(0) = \gamma + Dx(T), \tag{3}$$

в якій неперервна $(m \times m)$-матриця $A(t)$ і функція $y(t)$ із класу $L_2([0,T], \mathbb{R}^m)$ є заданими.

Припустимо, що матрицю $A(t)$ підібрано таким чином, що крайова задача (3) має єдиний розв'язок при довільній функції $y(t)$. За такого припущення, як відомо, існують функція $h(t)$ та $(m \times m)$-матриця $G(t,s)$ такі, що розв'язок задачі (3) визначається формулою

$$x(t) = h(t) + \int_0^T G(t,s)\, y(s) ds. \tag{4}$$

Якщо тепер ввести до розгляду матрицю

$$B(t) = A(t) - P(t) \tag{5}$$

і покласти

$$y(t) = C(t)\lambda + f(t) + B(t)x(t), \tag{6}$$

то, очевидно, рівняння (1) набере вигляду (3).

Підставимо вираз (4) у формулу (6) та в другу умову (2) і виконаємо нескладні перетворення, в результаті чого отримаємо інтегральне рівняння з параметром

$$y(t) = C(t)\lambda + p(t) + \int_0^T K(t,s) y(s) ds \tag{7}$$

та обмеженням

$$\int_0^T V(s) y(s) ds = \beta, \tag{8}$$

де

$$p(t) = f(t) + B(t)h(t), \quad \beta = \alpha - \int_0^T S(t)h(t)dt, \tag{9}$$

$$K(t,s) = B(t)G(t,s), \quad V(s) = \int_0^T S(t)G(t,s)dt. \tag{10}$$

Методика дослідження задач вигляду (7), (8) та побудова їх розв'язків, наближених чи точних, розглядалися у працях [3–6].

У подальшому використаємо цю методику для обґрунтування нового варіанту проекційно-ітеративного методу щодо задачі (1), (2).

Нагадаємо суть проекційно-ітеративного методу для задачі (7), (8). Вона полягає в тому, що, маючи деяку функцію $u(t)$ із класу $L_2([0,T],\mathbb{R}^m)$, за проекційним методом знаходимо функцію

$$w(t) = u(t) + \Phi(t)\mu \tag{11}$$

і за ітераційним методом обчислюємо ітерацію

$$y(t) = C(t)\lambda + p(t) + \int_0^T K(t,s)w(s)ds, \tag{12}$$

визначаючи при цьому невідомі параметри $\lambda \in \mathbb{R}^l$ та $\mu \in \mathbb{R}^n$ таким чином, щоб справджувались умови

$$\int_0^T V(t)y(t)dt = \beta, \quad \int_0^T \Psi(t)(y(t) - w(t))dt = 0, \tag{13}$$

де $\Phi(t)$ та $\Psi(t)$ — задані матриці розмірності $m \times n$ та $n \times m$ відповідно, елементи яких сумовні з квадратом на $[0,T]$, до того ж стовпці матриці $\Phi(t)$ і рядки матриці $\Psi(t)$, окремо взяті, лінійно незалежні.

Нехай

$$Z(t) = \int_0^T K(t,s)\Phi(s)ds, \tag{14}$$

тоді, використовуючи вираз (11), формулу (12) запишемо у вигляді

$$y(t) = C(t)\lambda + Z(t)\mu + p(t) + \int_0^T K(t,s)u(s)ds. \tag{15}$$

Використовуючи формулу (15), маємо

$$y(t) - w(t) = C(t)\lambda + (Z(t) - \Phi(t))\mu + p(t) + \int_0^T K(t,s)u(s)ds - u(t). \tag{16}$$

Із формул (15), (16) та умов (13) очевидним чином випливає система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\int_0^T V(t)C(t)\lambda dt + \int_0^T V(t)Z(t)\mu dt + \int_0^T V(t)\left(p(t) + \int_0^T K(t,s)u(s)ds\right)dt = \beta,$$

$$\int_0^T \Psi(t)C(t)\lambda dt + \int_0^T \Psi(t)(Z(t)-\Phi(t))\mu dt +$$
$$+ \int_0^T \Psi(t)\left(p(t)-u(t)+\int_0^T K(t,s)u(s)ds\right)dt = 0.$$

Цю систему рівнянь, якщо ввести позначення

$$\Lambda_{11} = \int_0^T V(t)C(t)dt, \quad \Lambda_{12} = \int_0^T V(t)Z(t)dt,$$
$$\Lambda_{21} = \int_0^T \Psi(t)C(t)dt, \quad \Lambda_{22} = \int_0^T \Psi(t)(Z(t)-\Phi(t))dt, \tag{17}$$

$$d_1 = \sigma_1 - \int_0^T X(s)u(s)ds, \quad d_2 = \sigma_2 - \int_0^T Y(s)u(s)ds, \tag{18}$$

де

$$\sigma_1 = \beta - \int_0^T V(t)p(t)dt, \quad \sigma_2 = -\int_0^T \Psi(t)p(t)dt, \tag{19}$$

$$X(s) = \int_0^T V(t)K(t,s)dt, \tag{20}$$

$$Y(s) = \int_0^T \Psi(t)K(t,s)dt - \Psi(s), \tag{21}$$

можна записати у компактному вигляді

$$\Lambda_{11}\lambda + \Lambda_{12}\mu = d_1, \quad \Lambda_{21}\lambda + \Lambda_{22}\mu = d_2. \tag{22}$$

Зазначимо, що матриці (17) мають розмірність $l\times l$, $l\times n$, $n\times l$ та $n\times n$ відповідно.

Лема 1. *Якщо матриця*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \tag{23}$$

невироджена, то існують такі функція $g(t)$, параметри $\sigma \in \mathbb{R}^l$ та $\tau \in \mathbb{R}^n$ і матриці $\Gamma(s)$, $W(s)$ та $H(t,s)$ розмірності $l \times m$, $n \times m$, $m \times m$ відповідно, що розв'язок системи (22) зображується формулами

$$\lambda = \sigma - \int_0^T \Gamma(s)u(s)ds, \tag{24}$$

$$\mu = \tau - \int_0^T W(s)u(s)ds, \tag{25}$$

а також правильним є співвідношення

$$y(t) = g(t) + \int_0^T H(t,s)u(s)ds. \tag{26}$$

Доведення. Запишемо обернену матрицю $\Delta = \Lambda^{-1}$ у вигляді

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix}, \tag{27}$$

де матриці Δ_{11}, Δ_{12}, Δ_{21} та Δ_{22} мають розмірність $l \times l$, $l \times n$, $n \times l$ та $n \times n$ відповідно. Тоді з урахуванням виразів (18) єдиний розв'язок системи (22) визначається формулами

$$\lambda = \Delta_{11}\sigma_1 + \Delta_{12}\sigma_2 - \int_0^T (\Delta_{11}X(s) + \Delta_{12}Y(s))u(s)ds, \tag{28}$$

$$\mu = \Delta_{21}\sigma_1 + \Delta_{22}\sigma_2 - \int_0^T (\Delta_{21}X(s) + \Delta_{22}Y(s))u(s)ds. \tag{29}$$

Очевидно, з уведенням позначень

$$\sigma = \Delta_{11}\sigma_1 + \Delta_{12}\sigma_2, \quad \tau = \Delta_{21}\sigma_1 + \Delta_{22}\sigma_2, \tag{30}$$

$$\Gamma(s) = \Delta_{11}X(s) + \Delta_{12}Y(s), \quad W(s) = \Delta_{21}X(s) + \Delta_{22}Y(s) \tag{31}$$

формули (28), (29) наберуть вигляду (24), (25) відповідно.

Оскільки, використавши формули (24) та (25), неважко встановити співвідношення

$$p(t) + C(t)\lambda + Z(t)\mu = g(t) - \int_0^T R(t,s)u(s)ds, \tag{32}$$

де

$$g(t) = p(t) + C(t)\sigma + Z(t)\tau, \tag{33}$$

$$R(t,s) = C(t)\Gamma(s) + Z(t)W(s), \tag{34}$$

формулу (15) можна записати у вигляді

$$y(t) = g(t) - \int\limits_0^T R(t,s)u(s)ds + \int\limits_0^T K(t,s)u(s)ds,$$

тобто якщо ще ввести позначення

$$H(t,s) = K(t,s) - R(t,s), \tag{35}$$

отримаємо співвідношення (26).

Лема 2. *Якщо матриця Λ невироджена, то правильними є рівності*

$$\int\limits_0^T \Gamma(s)\Phi(s)ds = O, \quad \int\limits_0^T H(t,s)\Phi(s)ds = O, \tag{36}$$

$$\int\limits_0^T V(t)H(t,s)dt = O, \quad \int\limits_0^T V(t)g(t)dt = \beta, \tag{37}$$

де матриця Λ та функція $g(t)$ визначаються формулами (23) та (33).

Доведення. Оскільки справедливими є рівності

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J & O \\ O & I \end{pmatrix}, \tag{38}$$

де J та I — одиничні матриці в $\mathbb{R}^l$ та $\mathbb{R}^n$, то, використовуючи їх, формули (31), а також рівності

$$\int\limits_0^T X(s)\Phi(s)ds = \int\limits_0^T V(s)Z(s)ds = \Lambda_{12},$$

$$\int\limits_0^T Y(s)\Phi(s)ds = \int\limits_0^T \Psi(s)(Z(s) - \Phi(s))ds = \Lambda_{22},$$

що очевидним чином випливають із (14), (20), (21), маємо

$$\int_0^T \Gamma(s)\Phi(s)ds = \int_0^T (\Delta_{11}X(s) + \Delta_{12}Y(s))\Phi(s)ds = \Delta_{11}\Lambda_{12} + \Delta_{12}\Lambda_{22} = O, \tag{39}$$

$$\int_0^T W(s)\Phi(s)ds = \int_0^T (\Delta_{21}X(s) + \Delta_{22}Y(s))\Phi(s)ds = \Delta_{21}\Lambda_{12} + \Delta_{22}\Lambda_{22} = I. \tag{40}$$

Із формул (35), (34), (14), (39) та (40) випливає

$$\int_0^T H(t,s)\Phi(s)ds = \int_0^T K(t,s)\Phi(s)ds - \int_0^T R(t,s)\Phi(s)ds =$$

$$= \int_0^T K(t,s)\Phi(s)ds - C(t)\int_0^T \Gamma(s)\Phi(s)ds - Z(t)\int_0^T W(s)\Phi(s)ds =$$

$$= Z(t) - C(t)\cdot O - Z(t)\cdot I = O.$$

Отже, властивості (36) справджуються.

Аналогічно встановлюються рівності (37). Справді, на основі формул (35), (34), (20), (17), (31) та (38), а також (33), (19), (30) маємо

$$\int_0^T V(t)H(t,s)dt = X(s) - \Lambda_{11}(\Delta_{11}X(s) + \Delta_{12}Y(s)) - \Lambda_{12}(\Delta_{21}X(s) + \Delta_{22}Y(s)) =$$

$$= X(s) - (\Lambda_{11}\Delta_{11} + \Lambda_{12}\Delta_{21})X(s) - (\Lambda_{11}\Delta_{12} + \Lambda_{12}\Delta_{22})Y(s) =$$

$$= X(s) - J\cdot X(s) - O\cdot Y(s) = O,$$

$$\int_0^T V(t)g(t)dt = \int_0^T V(t)(p(t) - C(t)\sigma + Z(t)\tau)dt =$$

$$= \beta - \sigma_1 + \Lambda_{11}(\Delta_{11}\sigma_1 + \Delta_{12}\sigma_2) + \Lambda_{12}(\Delta_{21}\sigma_1 + \Delta_{22}\sigma_2) =$$

$$= \beta - \sigma_1 + (\Lambda_{11}\Delta_{11} + \Lambda_{12}\Delta_{21})\sigma_1 + (\Lambda_{11}\Delta_{12} + \Lambda_{12}\Delta_{22})\sigma_2 =$$

$$= \beta - \sigma_1 + J\cdot\sigma_1 - O\cdot\sigma_2 = \beta.$$

Зауваження 1. Використовуючи рівності (38), як і при доведенні леми 2, встановлюємо правильність рівностей

$$\int_0^T \Psi(t)(g(t) - \Phi(t)\tau)dt = 0,$$

$$\int_0^T \Psi(t) \left(\int_0^T H(t,s)u(s)ds - u(t) + \Phi(t)\nu \right) dt = 0,$$

де $\nu = \tau - \mu$, а μ має вигляд (25).

Ці формули можна використати при подальшому дослідженні, зокрема, із них випливає важливе співвідношення

$$\int_0^T \Psi(t) \left(g(t) + \int_0^T H(t,s)u(s)ds - u(t) + \Phi(t)\mu \right) dt = 0. \tag{41}$$

Зауваження 2. Із формул (3) та (4) очевидним чином випливає тотожність

$$x(t) = h(t) + \int_0^T G(t,s) \left(\frac{d}{ds} + A(s) \right) x(s)ds, \tag{42}$$

використовуючи яку і позначення (9), (10), отримуємо рівності

$$f(t) - \left(\frac{d}{dt} + P(t) \right) x(t) = p(t) + \int_0^T K(t,s)y(s)ds - y(t), \tag{43}$$

$$\int_0^T S(t)(x(t) - h(t))dt = \int_0^T V(t)y(t)dt, \tag{44}$$

які правильні при довільній одній із функцій $x \in W_2^1([0,T], \mathbb{R}^m)$ чи $y \in L_2([0,T], \mathbb{R}^m)$.

Справді, якщо задано функцію $y(t)$, то функція $x(t)$ визначається формулою (4), а підставивши її у ліві частини (43), (44), отримаємо праві. Навпаки, якщо задано функцію $x(t)$, то функція $y(t)$ визначається формулою (3), а підставляючи її у праві частини і враховуючи рівності (42) та (5), маємо

$$p(t) + \int_0^T K(t,s)y(s)ds - y(t) = f(t) + B(t) \left(h(t) + \int_0^T G(t,s) \left(\frac{d}{ds} + A(s) \right) x(s)ds \right) -$$

$$- y(t) = f(t) + B(t)x(t) - \left(\frac{d}{dt} + A(t) \right) x(t) =$$

$$= f(t) - \left(\frac{d}{dt} + P(t) \right) x(t),$$

$$\int_0^T V(s)y(s)\,ds = \int_0^T S(t) \int_0^T G(t,s) \left(\frac{d}{ds} + A(s) \right) x(s)\,ds\,dt = \int_0^T S(t)(x(t) - h(t))\,dt.$$

Лема 3. *Якщо* $(x^*(t), \lambda^*)$ *— розв'язок задачі (1), (2) і матриця* Λ *невироджена, то при*

$$u(t) = \left(\frac{d}{dt} + A(t)\right) x^*(t) \tag{45}$$

єдиним розв'язком системи алгебраїчних рівнянь (22) є

$$\lambda = \lambda^*, \quad \mu = \mu^* = 0. \tag{46}$$

Доведення. За умови леми правильними є рівності

$$\left(\frac{d}{dt} + P(t)\right) x^*(t) = f(t) + C(t)\lambda^*, \quad \int\limits_0^T S(t)x^*(t)dt = \alpha.$$

Використавши їх і формули (43), (44), в яких покладемо $y(t) = u(t)$, та (9), отримаємо

$$p(t) + \int\limits_0^T K(t,s)u(s)ds - u(t) = -C(t)\lambda^*, \tag{47}$$

$$\int\limits_0^T V(t)u(t)dt = \alpha - \int\limits_0^T S(t)h(t)dt = \beta. \tag{48}$$

Повернемось тепер до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (22), права частина якої визначається, як зазначено вище, таким чином:

$$d_1 = \beta - \int\limits_0^T V(t)\left(p(t) + \int\limits_0^T K(t,s)u(s)ds\right)dt,$$

$$d_2 = -\int\limits_0^T \Psi(t)\left(p(t) + \int\limits_0^T K(t,s)u(s)ds - u(t)\right)dt.$$

Якщо врахувати, що в цих формулах функція $u(t)$ має вигляд (45), то, використовуючи співвідношення (47), (48) і позначення (17), маємо

$$d_1 = \int\limits_0^T V(t)C(t)\lambda^* dt = \Lambda_{11}\lambda^*,$$

$$d_2 = \int\limits_0^T \Psi(t)C(t)\lambda^* dt = \Lambda_{21}\lambda^*.$$

Отже, система (22) при вказаному виборі функції $u(t)$ набирає вигляду

$$\Lambda_{11}(\lambda - \lambda^*) + \Lambda_{12}\mu = 0, \quad \Lambda_{21}(\lambda - \lambda^*) + \Lambda_{22}\mu = 0. \tag{49}$$

За умови леми однорідна система (49) має лише тривіальний розв'язок, а тому маємо $\lambda - \lambda^* = 0$, $\mu = 0$.

Теорема 1. *Якщо матриці*

$$\Omega = \int\limits_0^T \Psi(t)\Phi(t)dt \tag{50}$$

і Λ, *що визначається формулою (23), невироджені, то задача (1), (2) рівнозначна інтегральному рівнянню*

$$u(t) = g(t) + \int\limits_0^T H(t,s)u(s)ds. \tag{51}$$

Доведення. Нехай $u^*(t)$ — розв'язок інтегрального рівняння (51), тобто правильною є рівність

$$u^*(t) = g(t) + \int\limits_0^T H(t,s)u^*(s)ds. \tag{52}$$

Побудуємо функцію

$$x^*(t) = h(t) + \int\limits_0^T G(t,s)u^*(s)ds \tag{53}$$

і вектори

$$\lambda^* = \sigma - \int\limits_0^T \Gamma(s)u^*(s)ds, \tag{54}$$

$$\mu^* = \tau - \int\limits_0^T W(s)u^*(s)ds. \tag{55}$$

Тоді, використавши формулу (41), яка правильна при довільній функції $u(t)$, зокрема при $u^*(t)$, і рівність (52) та позначення (50), отримаємо

$$\Omega\mu^* = 0. \tag{56}$$

Оскільки за умовою теореми матриця Ω невироджена, то з рівності (56) випливає $\mu^* = 0$, тобто, враховуючи зображення (55), маємо

$$\int_0^T W(s)u^*(s)ds = \tau. \tag{57}$$

Покладемо тепер у рівності (32) $u(t) = u^*(t)$ і візьмемо до уваги, що в цьому випадку $\lambda = \lambda^*$ і $\mu = \mu^* = 0$. В результаті отримаємо

$$p(t) + C(t)\lambda^* = g(t) - \int_0^T R(t,s)u^*(s)ds. \tag{58}$$

За допомогою формул (43), (44), поклавши в них $y(t) = u^*(t)$, рівностей (52), (58), позначень (9), (35) і властивостей (37) неважко переконатись у тому, що вирази (53) та (54) — це розв'язок задачі (1), (2). Справді,

$$C(t)\lambda^* + f(t) - \left(\frac{d}{dt} + P(t)\right)x^*(t) = C(t)\lambda^* + p(t) + \int_0^T K(t,s)u^*(s)ds - u^*(t) =$$

$$= g(t) - \int_0^T R(t,s)u^*(s)ds + \int_0^T K(t,s)u^*(s)ds - u^*(t) =$$

$$= g(t) + \int_0^T H(t,s)u^*(s)ds - u^*(t) = 0,$$

$$\int_0^T S(t)x^*(t)dt = \int_0^T S(t)h(t)dt + \int_0^T V(t)u^*(t)dt =$$

$$= \alpha - \beta - \int_0^T V(t)\left(g(t) + \int_0^T H(t,s)u^*(s)ds\right)dt = \alpha - \beta + \beta = \alpha.$$

Навпаки, нехай $(x^*(t), \lambda^*)$ — розв'язок задачі (1), (2), тобто правильною є рівність

$$C(t)\lambda^* + f(t) - \left(\frac{d}{dt} + P(t)\right)x^*(t) = 0. \tag{59}$$

Встановимо, що функція

$$u^*(t) = \left(\frac{d}{dt} + A(t)\right)x^*(t) \tag{60}$$

задовольняє рівняння (51). Для цього використаємо лему 3, згідно з якою у випадку, коли функція $u(t)$ має вигляд (60), правильними є рівності (46). Отже, виконуються рівності (57) та (58).

На основі формул (43), (58), (59) із урахуванням позначення (35) остаточно маємо

$$g(t) + \int_0^T H(t,s)u^*(s)ds - u^*(t) =$$

$$= g(t) - \int_0^T R(t,s)u^*(s)ds + \int_0^T K(t,s)u^*(s)ds - u^*(t) =$$

$$= p(t) + C(t)\lambda^* + \int_0^T K(t,s)u^*(s)ds - u^*(t) =$$

$$= C(t)\lambda^* + f(t) - \left(\frac{d}{dt} + P(t)\right) x^*(t) = 0.$$

Зауваження 3. Як видно із доведення теореми, умову, накладену на матрицю Ω, можна замінити слабкішою умовою: розв'язок інтегрального рівняння (51) задовольняє рівність (57).

За відсутності умови щодо матриці Ω задача (1), (2) рівнозначна інтегральному рівнянню (51) з обмеженнями (57).

Теорема 2. *За умови теореми 1 задача (1), (2) має єдиний розв'язок лише тоді, коли існує єдиний розв'язок рівняння (51).*

Якщо спектральний радіус $\rho(H)$ інтегрального оператора

$$(Hu)(t) = \int_0^T H(t,s)u(s)ds \tag{61}$$

менший за одиницю, то існує єдиний розв'язок задачі (1), (2).

Доведення. Припустимо, що існує єдиний розв'язок рівняння (51), а задача (1), (2) має два розв'язки $(x^*(t), \lambda^*)$ та $(\overline{x}(t), \overline{\lambda})$, до того ж

$$x^*(t) \neq \overline{x}(t), \quad \lambda^* \neq \overline{\lambda}. \tag{62}$$

Тоді згідно з теоремою 1 функції, що визначаються формулами (60) і

$$\overline{u}(t) = \left(\frac{d}{dt} + A(t)\right) \overline{x}(t), \tag{63}$$

є розв'язками рівняння (51). Оскільки за припущенням $u^*(t) = \overline{u}(t)$, то на основі виразів (60), (63) і того факту, що функції $x^*(t)$ та $\overline{x}(t)$ задовольняють крайові умови, маємо

$$\left(\frac{d}{dt} + A(t)\right)(x^*(t) - \overline{x}(t)) = 0, \quad x^*(0) - \overline{x}(0) = D\left(x^*(T) - \overline{x}(T)\right).$$

Звідси згідно з припущенням щодо крайової задачі (3) випливає $x^*(t) = \overline{x}(t)$, а з урахуванням ще й виразу (24)

$$\lambda^* - \overline{\lambda} = \int_0^T \Gamma(s)\left(u^*(s) - \overline{u}(s)\right) ds = 0,$$

тобто $\lambda^* = \overline{\lambda}$, що суперечить припущенню (62).

Аналогічно встановлюється обернене твердження. Справді, припустимо, що існує єдиний розв'язок задачі (1), (2), а рівняння (51) має два розв'язки $u^*(t)$ та $\overline{u}(t)$, до того ж

$$u^*(t) \neq \overline{u}(t). \tag{64}$$

Тоді за теоремою 1 задача (1), (2) має розв'язки вигляду (53), (54) і

$$\overline{x}(t) = h(t) + \int_0^T G(t,s)\overline{u}(s)ds, \quad \overline{\lambda} = \sigma - \int_0^T \Gamma(s)\overline{u}(s)ds,$$

а використовуючи їх, маємо

$$\int_0^T G(t,s)\left(u^*(s) - \overline{u}(s)\right) ds = 0,$$

оскільки за припущенням $x^*(t) = \overline{x}(t)$. Звідси на підставі властивості функції Гріна очевидним чином випливає $u^*(t) = \overline{u}(t)$, що суперечить припущенню (64).

Твердження другої частини теореми є очевидним, оскільки відома умова $\rho(H) < 1$ гарантує існування та єдиність розв'язку інтегрального рівняння (51).

Зауваження 4. Як відомо [7], збільшення n у розмірностях матриць $\Phi(t)$ та $\Psi(t)$ сприяє зменшенню спектрального радіуса оператора (61).

3. Побудова наближених розв'язків. Для побудови наближених розв'язків задачі (1), (2) можна використати існуючі наближені методи, зокрема проекційні, ітераційні чи методи проекційно-ітеративного типу. При цьому існують два підходи до їх побудови. Згідно з першим диференціальна задача зводиться до рівнозначного інтегрального рівняння, до якого застосовується певний наближений метод, і з допомогою отриманого наближення та простої диференціальної задачі знаходиться розв'язок задачі (1), (2). При другому підході потрібно використовувати чи розробляти наближені методи, які безпосередньо застосовуються до диференціальної задачі, а рівнозначне інтегральне рівняння використовувати при обґрунтуванні методу. Нижче пропонується один із таких методів проекційно-ітеративного типу.

Суть методу полягає в тому, що наближені розв'язки задачі (1), (2) визначаємо із крайової задачі

$$\frac{dx_k}{dt} + A(t)x_k = y_k(t), \quad x_k(0) = \gamma + Dx_k(T), \tag{65}$$

в якій

$$y_k(t) = C(t)\lambda_k + f(t) + B(t)z_k(t), \tag{66}$$

матриця $B(t)$ має вигляд (5) і

$$z_k(t) = x_{k-1}(t) + \delta_k(t), \quad k \geq 1. \tag{67}$$

Функція $\delta_k(t)$ — це розв'язок крайової задачі

$$\frac{d\delta_k}{dt} + A(t)\delta_k = \Phi(t)\mu_k, \quad \delta_k(0) = D\delta_k(T), \tag{68}$$

а невідомі параметри $\lambda_k \in \mathbb{R}^l$ та $\mu_k \in \mathbb{R}^n$ визначаються з умов

$$\int\limits_0^T S(t)x_k(t)dt = \alpha, \quad \int\limits_0^T \Psi(t)(y_k(t) - y_{k-1}(t) - \Phi(t)\mu_k)dt = 0. \tag{69}$$

За умови, що крайова задача (3) має єдиний розв'язок, метод (65) – (69) рівнозначний проекційно-ітеративному методу щодо інтегрального рівняння (7) з обмеженням (8).

Справді, нехай

$$w_k(t) = y_{k-1}(t) + \Phi(t)\mu_k, \tag{70}$$

тоді на основі формул (67), (68) і (65), замінивши в останній індекс k на $k-1$, будемо мати

$$\frac{dz_k}{dt} + A(t)z_k = w_k(t), \quad z_k(0) = \gamma + Dz_k(T). \tag{71}$$

Розв'язавши задачі (65) та (71), отримаємо

$$z_k(t) = h(t) + \int\limits_0^T G(t,s)w_k(s)ds, \quad x_k(t) = h(t) + \int\limits_0^T G(t,s)y_k(s)ds, \tag{72}$$

а підставивши ці розв'язки у формули (66) та (69) відповідно і врахувавши позначення (9), (10) та (70) відповідно, одержимо

$$y_k(t) = p(t) + C(t)\lambda_k + \int\limits_0^T K(t,s)w_k(s)ds, \tag{73}$$

$$\int\limits_0^T V(t)y_k(t)dt = \beta, \quad \int\limits_0^T \Psi(t)(y_k(t) - w_k(t))dt = 0. \tag{74}$$

Отже, якщо покласти в проекційно-ітеративному методі (11) – (13) щодо інтегрального рівняння (7) з обмеженням (8)

$$u(t) = y_{k-1}(t), \quad y(t) = y_k(t), \quad \lambda = \lambda_k, \quad \mu = \mu_k, \quad w(t) = w_k(t), \tag{75}$$

то неважко помітити, що формули (70), (73) та (74) визначають той самий метод.

Звідси випливає, що результати, висвітлені у попередньому пункті, правильні і для розглядуваного методу. Зокрема, для знаходження параметрів λ_k та μ_k отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\Lambda_{11}\lambda_k + \Lambda_{12}\mu_k = d_{1k}, \quad \Lambda_{21}\lambda_k + \Lambda_{22}\mu_k = d_{2k}. \tag{76}$$

З урахуванням (75) систему (76) запишемо у вигляді

$$d_{1k} = \beta - \int_0^T V(t)\left(p(t) + \int_0^T K(t,s)y_{k-1}(s)ds\right)dt,$$

$$d_{2k} = -\int_0^T \Psi(t)\left(p(t) + \int_0^T K(t,s)y_{k-1}(s)ds - y_{k-1}(t)\right)dt,$$

а вирази (24) – (26) наберуть вигляду

$$\lambda_k = \sigma - \int_0^T \Gamma(s)y_{k-1}(s)ds, \quad \mu_k = \tau - \int_0^T W(s)y_{k-1}(s)ds, \tag{77}$$

$$y_k(t) = g(t) + \int_0^T H(t,s)y_{k-1}(s)ds. \tag{78}$$

Формула (78) засвідчує той факт, що метод (65) – (69) можна звести до методу послідовних наближень для інтегрального рівняння (51).

Теорема 3. *Якщо матриці Λ та Ω, що визначаються формулами (23) та (50), невироджені і спектральний радіус інтегрального оператора (61) менший за одиницю, то існує єдиний розв'язок $(x^*(t), \lambda^*)$ задачі (1), (2) і послідовність $\{(x_k(t), \lambda_k), k \geq 0,\}$, побудована за методом (65) – (69), збігається до цього розв'язку, тобто*

$$\lim_{k\to\infty} x_k(t) = x^*(t), \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda^*, \tag{79}$$

а також

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k = 0. \tag{80}$$

Доведення. Умова $\rho(H) < 1$ гарантує існування єдиного розв'язку $u^*(t)$ інтегрального рівняння (51) і збіжність за нормою $L_2([0,T],\mathbb{R}^m)$ послідовності (78) до цього розв'язку, тобто

$$\lim_{k\to\infty} y_k(t) = u^*(t). \tag{81}$$

Отже, згідно з теоремою 2 існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) і, як встановлено при доведенні теореми 1, правильними є співвідношення (53) – (55). Використавши їх і формули (72), (77), отримаємо

$$x^*(t) - x_k(t) = \int_0^T G(t,s)(u^*(s) - y_k(s))ds, \tag{82}$$

$$\lambda^* - \lambda_k = \int_0^T \Gamma(s)(y_{k-1}(s) - u^*(s))ds, \tag{83}$$

$$\mu^* - \mu_k = \int_0^T W(s)(y_{k-1}(s) - u^*(s))ds. \tag{84}$$

Перейшовши до границі в рівностях (82) – (84) і врахувавши вираз (81) та лему 3, згідно з якою $\mu^* = 0$, отримаємо співвідношення (79) та (80).

Зауваження 5. Використавши норму оператора (61) і відомі оцінки похибки методу послідовних наближень (78) щодо інтегрального рівняння (51), за допомогою формул (82) – (84) та норм інтегральних операторів, що в них фігурують, і властивостей (36) можна встановити оцінки похибки методу (65) – (69).

Зауваження 6. При розробці обчислювальних схем доцільно формулу (66) записати у вигляді

$$y_k(t) = C(t)\lambda_k + B(t)\delta_k(t) + v_k(t), \tag{85}$$

де

$$v_k(t) = f(t) + B(t)x_{k-1}(t), \quad k \geq 1, \tag{86}$$

і побудувати матрицю $U(t)$ розміру $m \times n$, яка є розв'язком задачі

$$\left(\frac{d}{dt} + A(t)\right) U(t) = \Phi(t), \quad U(0) = DU(T). \tag{87}$$

Тоді єдиний розв'язок задачі (68) можна зобразити у вигляді

$$\delta_k(t) = U(t)\mu_k, \tag{88}$$

а при формуванні матриці Λ (23) використати рівність

$$Z(t) = B(t)U(t), \tag{89}$$

правильність якої безпосередньо випливає із позначень (14), (10) та задачі (87).

Взявши до уваги формули (85) – (89), можна дати рекомендації щодо побудови початкового наближення. Одна із них полягає в тому, що при $k = 0$ функцію $v_0(t)$ задаємо довільним чином, зокрема можна взяти $v_0(t) = 0$, якщо хоча б один із векторів σ чи γ відмінний від нульового, або $v_0(t) = f(t)$ чи

$$v_0(t) = f(t) + B(t)h(t).$$

Функцію $y_0(t)$ шукаємо у вигляді

$$y_0(t) = C(t)\lambda_0 + Z(t)\mu_0 + v_0(t) \tag{90}$$

і початкове наближення визначаємо із задачі

$$\frac{dx_0}{dt} + A(t)x_0 = y_0(t), \quad x_0(0) = \gamma + x_0 D(T), \tag{91}$$

вимагаючи при цьому, щоб справджувались умови

$$\int_0^T S(t)x_0(t)dt = \alpha, \quad \int_0^T \Psi(t)(y_0(t) - \Phi(t)\mu_0)dt = 0. \tag{92}$$

Таким самим шляхом, як і вище, на основі формул (90) – (92) для визначення невідомих параметрів λ_0 та μ_0 отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (76), у якій

$$d_{10} = \beta - \int_0^T V(t)v_0(t)dt, \quad d_{20} = -\int_0^T \Psi(t)v_0(t)dt.$$

Зауваження 7. Частинним випадком запропонованого методу (65) – (69) є ітераційний метод, згідно з яким послідовні наближення також визначаються із задачі (65), однак у цьому випадку

$$y_k(t) = C(t)\lambda_k + f(t) + B(t)x_{k-1}(t)$$

і, очевидно, формули (67), (68) та друга умова (69) не використовуються.

Цей метод за умови, коли матриця Λ_{11}, що визначається формулою (17), невироджена, зводиться до методу послідовних наближень для інтегрального рівняння (51), але його ядро уже має вигляд

$$H(t,s) = K(t,s) - \int_0^T C(t)\Delta_{11}V(\xi)K(\xi,s)d\xi,$$

де Δ_{11} — один із блоків матриці (27).

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1986. — 224 с.
2. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 319 с.
3. *Лучка А. Ю.* Интегральные уравнения с ограничениями и методы их решения // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 3. — С. 82–96.
4. *Лучка А. Ю.* Методи дослідження систем диференціальних рівнянь з обмеженнями // Диференціальні рівняння і нелінійні коливання: Пр. Укр. мат. конгр. (Київ, 2002 р.). — 2002. — С. 43–59.
5. *Лучка А. Ю., Нестеренко О. Б.* Побудова розв'язків інтегро-диференціальних рівнянь з обмеженнями і керуванням проекційно-ітеративним методом // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 1. — С. 83–91.
6. *Лучка А. Ю., Ферук В. А.* Проекційно-ітеративний метод для систем диференціальних рівнянь із запізненням та обмеженнями // Там же. — 2003. — **6**, № 2. — С. 206–232.
7. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. — Киев: Наук. думка, 1993. — 288 с.

Одержано 08.06.10