УДК 517 . 9

ПРО ІСНУВАННЯ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ІНВАРІАНТНИХ ТОРІВ НЕЛІНІЙНИХ ЗЛІЧЕННИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

А. М. Самойленко

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: sam@imath.kiev.ua

Ю. В. Теплінський

Кам'янець-Поділ. нац. ун-т
Україна, 32300, Кам'янець-Подільський Хмельницької обл., вул. І. Огієнка, 61

К. В. Пасюк

Буковин. держ. фін. академія
Україна, 58000, Чернівці, вул. Штерна, 1

In the space of bounded number sequences, sufficient conditions for existence of invariant tori for nonlinear countable systems of differential-difference equations defined on infinite-dimensional tori and containing an infinite set of constant deviations of the scalar argument are obtained.

Получены достаточные условия существования в пространстве ограниченных числовых последовательностей инвариантных торов нелинейных счетных систем дифференциально-разностных уравнений, определенных на бесконечномерных торах и содержащих бесконечное множество постоянных отклонений скалярного аргумента.

У цій роботі знайдено достатні умови існування у просторі обмежених числових послідовностей ліпшицевих інваріантних торів нелінійних зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь загального вигляду, що визначені на нескінченновимірних торах і містять нескінченну множину різнознакових сталих відхилень скалярного аргументу. Доведені тут теореми добре узгоджуються з результатами щодо існування інваріантних торів зліченних систем диференціальних та різницевих рівнянь, визначених на торах, одержаними у монографіях [1, 2]. Робота є продовженням досліджень, результати яких опубліковано у статтях [3–5], де було розв'язано аналогічні задачі для лінійних та квазілінійних систем вказаного вигляду.

1. Постановка задачі. Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = a(\phi(t), x(t)),$$
$$\frac{dx(t)}{dt} = P_1(\phi(t), x(t), x(t+Q))x(t) + F(v(\phi,t), x(t), x(t+\Theta))x(t+\Delta) + c(\phi,t), \tag{1}$$

де $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots)$ та $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ належать банаховому простору $\mathfrak{M}$ обмежених числових послідовностей зі стандартною нормою $\|x\| = \sup_i\{|x_i|\}$; відображення

$$a(\phi, x) = \{a_1(\phi, x), a_2(\phi, x), a_3(\phi, x), \ldots\}$$

визначене періодичними відносно координат $\phi_j,\ j = 1, 2, 3, \ldots,$ з періодом 2π функціями $a_i(\phi, x) : \mathfrak{M} \times D \to R^1$, $i \in N$, $D = \{x \in \mathfrak{M} | \|x\| \le d = \text{const} > 0\}$, N — множина натуральних чисел; $\phi(t) = \phi_t(\phi) = (\phi_{1_t}(\phi), \phi_{2_t}(\phi), \ldots)$ при фіксованому $\phi \in \mathcal{T}_\infty$ є відображенням $R^1 \to \mathfrak{M}$ і задовольняє умову $\phi = \phi_0(\phi)$, $\mathcal{T}_\infty$ — нескінченновимірний тор; функція

$$c(\phi, t) = (c_1(z_1(\phi, t), z_2(\phi, t), \ldots), c_2(z_1(\phi, t), z_2(\phi, t), \ldots), \ldots)$$

відображує множину $\mathcal{T}_\infty \times R^1$ у простір $\mathfrak{M}$, причому функції $c_i(z_1, z_2, \ldots) : \mathcal{T}_\infty^\infty \mapsto R^1$ для будь-якого натурального числа i, $\mathcal{T}_\infty^\infty = \mathcal{T}_\infty \times \mathcal{T}_\infty \times \ldots$; точки $z_i(\phi, t) = (\phi_{1_{t+\Delta_{i1}}}(\phi), \phi_{2_{t+\Delta_{i2}}}(\phi), \ldots)$, $t \in R^1$, належать тору $\mathcal{T}_\infty$, Δ_{ij} — довільні фіксовані дійсні числа, $\{i, j\} \subset \subset N$; функція

$$v = v(\phi, t) = (v_1(\psi_1(\phi, t), \psi_2(\phi, t), \ldots), v_2(\psi_1(\phi, t), \psi_2(\phi, t), \ldots), \ldots)$$

теж відображує $\mathcal{T}_\infty \times R^1$ у $\mathfrak{M}$, тобто $v_i(\psi_1, \psi_2, \ldots) : \mathcal{T}_\infty^\infty \mapsto R^1\ \forall i \in N$; точки $\psi_i(\phi, t) = (\phi_{1_{t+\Theta_{i1}}}(\phi), \phi_{2_{t+\Theta_{i2}}}(\phi), \ldots)$, $t \in R^1$, належать тору $\mathcal{T}_\infty$, Θ_{ij} — довільні дійсні числа. При цьому $x(t + \Delta) = (x_1(t + \Delta_1), x_2(t + \Delta_2), \ldots)$, $x(t + \Theta) = (x_1(t + \Theta_1), x_2(t + \Theta_2), \ldots)$ та $x(t+Q) = (x_1(t+Q_1), x_2(t+Q_2), \ldots)$, де Δ_i, Θ_i та Q_i — довільні дійсні числа, $i \in N$.

Далі будемо вважати, що множини відхилень Δ_{ij}, Δ_i, Θ_{ij}, Θ_i та Q_i аргументу t обмежені, тобто $|\Delta_{ij}| \le \Delta^*$, $|\Delta_i| \le \Delta_*$, $|\Theta_{ij}| \le \Theta^*$, $|\Theta_i| \le \Theta_*$ та $|Q_i| \le Q_*\ \forall\{i, j\} \subset N$, де Δ^*, $\Delta_*, \Theta^*, \Theta_*, Q_*$ — додатні сталі.

Через

$$P_1(\phi, x, \chi) = \left[p^1_{ij}(\phi, x, \chi)\right]_{i,j=1}^\infty \quad \text{та} \quad F(v, x, \chi) = [f_{ij}(v, x, \chi)]_{i,j=1}^\infty$$

позначимо нескінченні матриці, елементи першої з яких є періодичними відносно ϕ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots,$ з періодом 2π, що визначені на множинах $D_* = \mathfrak{M} \times D \times D$ і D^* відповідно, де $D^* = D_0 \times D \times D$, $D_0 = \{x \in \mathfrak{M} | \|x\| \le V^0 = \text{const} > 0\}$, тобто $\{x, \chi\} \subset D$, $v \in D_0$. Норму матриці $P = [p_{ij}]_{i,j=1}^\infty$, узгоджену з векторною нормою простору $\mathfrak{M}$, визначимо рівністю $\|P\| = \sup_i \sum_{j=1}^\infty |p_{ij}|$.

Диференціювання та інтегрування векторних функцій розумітимемо лише у покоординатному сенсі.

Наступні коефіцієнтні умови назвемо умовами $(\mathbf{V}^*)$:

1) $\forall\phi \in \mathcal{T}_\infty$ і $\forall x \in D$ $\|a(\phi, x)\| \le A = \text{const} > 0$ та $\forall\{\phi, \psi\} \subset \mathcal{T}_\infty$ і $\forall\{x_1, x_2\} \subset D$: $\|a(\phi, x_1) - a(\psi, x_2)\| \le \alpha\{\|\phi - \psi\| + \|x_1 - x_2\|\}$, де $\alpha = \text{const} > 0$;

2) для функції $c(\phi, t)$ виконуються умови:

а) її координати $c_i(z) = c_i(z_1, z_2, \ldots)$ є 2π-періодичними відносно кожної координати вектора z_j для будь-яких натуральних i та j;

б) функції $c_i(z)$ рівномірно обмежені на $\mathcal{T}_\infty^\infty$, тобто $\|c(z)\| = \sup_i |c_i(z)| \le C^0 = \text{const} > 0$ $i = 1, 2, 3, \ldots$;

в) $\forall\{z, \bar{z}\} \subset \mathcal{T}_\infty^\infty : \|c(z) - c(\bar{z})\| \le \eta\|z - \bar{z}\|$, $\eta = \text{const} > 0$;

3) для функції $v(\phi, t)$ виконуються умови:

а) її координати $v_i(\psi_1, \psi_2, \dots)$ є 2π-періодичними відносно кожної координати вектора ψ_j для будь-яких натуральних i та j;

б) для будь-яких $\{\psi, \bar{\psi}\} \subset \mathcal{T}_\infty^\infty$ справджуються нерівності $\|v(\psi) - v(\bar{\psi})\| \le \zeta \|\psi - \bar{\psi}\|$, $\|v(\psi)\| \le V^0$, де $\zeta = \text{const} > 0$;

4) для будь-якого $i \in N$ виконуються нерівності

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{(\phi,x,\chi)\in D_*} |p_{ij}^1(\phi, x, \chi)| \le P^0 = \text{const} < \infty,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{(v,x,\chi)\in D^*} |f_{ij}(v, x, \chi)| \le F_0 = \text{const} < \infty;$$

5) матриці $P_1(\phi, x, \chi)$ та $F(v, x, \chi)$ задовольняють умови Ліпшиця на D_* та D^* відповідно, тобто для будь-яких $\{(\phi, x, \chi), (\bar{\phi}, \bar{x}, \bar{\chi})\} \subset D_*$ і $\{(v, x, \chi), (\bar{v}, \bar{x}, \bar{\chi})\} \subset D^*$ мають місце оцінки

$$\|P_1(\phi, x, \chi) - P_1(\bar{\phi}, \bar{x}, \bar{\chi})\| \le \xi_1^* \|\phi - \bar{\phi}\| + \xi_2^* \|x - \bar{x}\| + \xi_3^* \|\chi - \bar{\chi}\|,$$

$$\|F(v, x, \chi) - F(\bar{v}, \bar{x}, \bar{\chi})\| \le \xi_1 \|v - \bar{v}\| + \xi_2 \|x - \bar{x}\| + \xi_3 \|\chi - \bar{\chi}\|,$$

де $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*$ — додатні сталі.

Інваріантним тором $\mathcal{T}$ системи рівнянь (1) називають множину точок $x \in \mathfrak{M}$ (поверхню), породжену векторною функцією $x = u(\phi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$, яка є 2π-періодичною відносно ϕ_i, $i = 1, 2, 3, \dots$, обмеженою за нормою і при будь-яких $\phi \in \mathcal{T}_\infty$, $t \in R^1$ задовольняє рівність

$$\frac{du(\phi_t(\phi))}{dt} = P_1(\phi_t(\phi), u(\phi_t(\phi)), u(\phi, t + Q))u(\phi_t(\phi)) + \\ + F(v(\phi, t), u(\phi_t(\phi)), u(\phi, t + \Theta))u(\phi, t + \Delta) + c(\phi, t), \tag{2}$$

а під $\phi_t(\phi)$ слід розуміти розв'язок рівняння

$$\frac{d\phi_t(\phi)}{dt} = a(\phi_t(\phi), u(\phi_t(\phi))), \tag{3}$$

визначений початковою умовою $\phi_0(\phi) = \phi \in \mathcal{T}_\infty$. Тут $u(\phi, t + \Theta) = (u_1(\phi_{t+\Theta_1}(\phi)), u_2(\phi_{t+\Theta_2}(\phi)), \dots)$, символи $u(\phi, t + Q)$ та $u(\phi, t + \Delta)$ мають аналогічний сенс.

Інваріантний тор називають ліпшицевим на $\mathcal{T}_\infty$, якщо цю властивість має породжуюча його функція $x = u(\phi)$.

Задача полягає у відшуканні достатніх умов існування ліпшицевого інваріантного тора $\mathcal{T}$ системи рівнянь (1).

2. Допоміжні твердження. Поклавши в (1)

$$a(\phi_t(\phi)) = a(\phi_t(\phi), 0), \quad a^1(\phi_t(\phi), x(t)) = a(\phi_t(\phi), x(t)) - a(\phi_t(\phi)),$$

$$P(\phi_t(\phi)) = P_1(\phi_t(\phi), 0, 0), \quad 0 \in \mathfrak{M},$$

$$P_2(\phi_t(\phi), x(t), x(t+Q)) = P_1(\phi_t(\phi), x(t), x(t+Q)) - P(\phi_t(\phi)),$$

одержимо систему рівнянь

$$\frac{d\phi_t(\phi)}{dt} = a(\phi_t(\phi)) + a^1(\phi_t(\phi), x(t)),$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\phi_t(\phi))x(t) + P_2(\phi_t(\phi), x(t), x(t+Q))x(t)+$$
$$+ F(v(\phi,t), x(t), x(t+\Theta))x(t+\Delta) + c(\phi,t). \tag{4}$$

В [1, 3] докладно обговорено питання про існування у зліченної системи рівнянь вигляду

$$\frac{d\phi}{dt} = a(\phi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\phi)x, \tag{5}$$

яка не містить відхилень аргументу t, функцій Гріна – Самойленка (скорочено ФГС) $G_t(\tau,\phi)$ та $G_0(\tau,\phi)$ задач про обмежені розв'язки та про інваріантні тори відповідно і про їх матричні зображення. ФГС $G_t(\tau,\phi)$ системи рівнянь (5) назвемо грубою з індексом $\varepsilon > 0$, якщо при кожній функції $\bar{a}(\phi) \in C^0_{\text{Lip}}(\mathcal{T}_\infty)$, для якої $\|\bar{a}(\phi)\| \le \varepsilon$, збурена система рівнянь

$$\frac{d\phi}{dt} = a(\phi) + \bar{a}(\phi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\phi)x \tag{6}$$

має єдиний обмежений на всій осі розв'язок $x = 0$ і для неї існує ФГС $\bar{G}_t(\tau,\phi)$, до того ж у нерівності

$$\|\bar{G}_t(\tau,\phi)\| \le K \exp\{-\gamma|t-\tau|\} \tag{7}$$

додатні сталі K і γ не залежать від вибору функції $\bar{a}(\phi)$. Через $C^0_{\text{Lip}}(\mathcal{T}_\infty)$ тут позначено множину обмежених за нормою і ліпшицевих на $\mathcal{T}_\infty$ функцій вигляду $a(\phi) = \{a_1(\phi), a_2(\phi), a_3(\phi), \ldots\}$, визначених періодичними відносно координат ϕ_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$, з періодом 2π функціями $a_i(\phi)$, $i \in N$.

Зауважимо, що для скінченновимірних систем вигляду (5) умови грубості ФГС досліджувались, наприклад, у монографії [6].

Нехай $u^0(\phi) = \{u^0_1(\phi), u^0_2(\phi), \ldots\}$ — будь-яка функція, що має 2π-періодичні відносно ϕ_i, $i \in N$, координати і на торі $\mathcal{T}_\infty$ задовольняє умову Ліпшиця з коефіцієнтом U^0, до того ж $\|u^0(\phi)\| \le d \ \ \forall \phi \in \mathcal{T}_\infty$.

Тоді для рівняння

$$\frac{d\phi}{dt} = a(\phi, u^0(\phi)) \tag{8}$$

виконуються умови $(\mathbf{A})$ з [3], а тому воно для будь-якого $\phi \in \mathcal{T}_\infty$ має єдиний розв'язок $\phi^1_t(\phi) = (\phi^1_{1_t}(\phi), \phi^1_{2_t}(\phi), \ldots)$, що визначений на всій осі і задовольняє початкову умову $\phi = \phi^1_0(\phi)$.

Розглянемо спочатку рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\phi_t^1(\phi))x(t) + c^0(\phi^1,\phi,t), \tag{9}$$

в якому

$$c^0(\phi^1,\phi,t) = P_2^0(\phi^1,\phi,t)u^0(\phi_t^1(\phi)) + F^0(\phi^1,\phi,t)u^0(\phi^1,\phi,t+\Delta) + c(\phi^1,\phi,t),$$

$$P_2^0(\phi^1,\phi,t) = P_2(\phi_t^1(\phi), u^0(\phi_t^1(\phi)), u^0(\phi^1,\phi,t+Q)),$$

$$F^0(\phi^1,\phi,t) = F(v(\phi^1,t), u^0(\phi_t^1(\phi)), u^0(\phi^1,\phi,t+\Theta)),$$

$$u(\phi^1,\phi,t+\Theta) = (u_1(\phi^1_{t+\Theta_1}(\phi)), u_2(\phi^1_{t+\Theta_2}(\phi)),\ldots),$$

символи $u(\phi^1,\phi,t+Q)$ та $u(\phi^1,\phi,t+\Delta)$ мають аналогічний сенс; відображення $c(\phi^1,\phi,t)$ та $v(\phi^1,\phi,t)$ введено аналогічно до відображень $c(\phi,t)$ та $v(\phi,t)$ відповідно, лише точки $z_i(\phi,t)$ та $\psi_i(\phi,t)$, $i\in N$, з означення останніх замінено точками $z_i(\phi^1,\phi,t) = (\phi^1_{1_{t+\Delta_{i1}}}(\phi),$ $\phi^1_{2_{t+\Delta_{i2}}}(\phi),\ldots)$, $\psi_i(\phi^1,\phi,t) = (\phi^1_{1_{t+\Theta_{i1}}}(\phi), \phi^1_{2_{t+\Theta_{i2}}}(\phi),\ldots)$.

Лема 1. *Припустимо, що виконуються умови* $(\mathbf{V}^*)$ *і рівняння* $\dfrac{dx(t)}{dt} = P(\phi_t^1(\phi))x(t)$ *має ФГС* $G_t^1(\tau,\phi)$, *яка задовольняє нерівність (7), і не має обмежених на всій числовій осі розв'язків, крім нульового. Тоді при умові, що*

$$\gamma > \alpha(1+U^0), \tag{10}$$

система рівнянь (8), (9) має єдиний інваріантний тор $\mathcal{T}^1$, *породжений функцією*

$$u^1(\phi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0^1(\tau,\phi)c^0(\phi^1,\phi,\tau)d\tau, \tag{11}$$

що задовольняє відносно ϕ *на торі* $\mathcal{T}_\infty$ *умову Ліпшиця з коефіцієнтом* U^1.

Доведення. Неважко перевірити (див. [3]), що $\|c^0(\phi^1,\phi,\tau)\| \le (2P^0+F_0)d + C^0 := C_*^0$ і координати вектор-функції $c^0(\phi^1,\phi,\tau)$ неперервні відносно τ на R^1, невласний інтеграл у рівності (11) збігається рівномірно відносно $\phi\in\mathcal{T}_\infty$ у покоординатному сенсі і визначає інваріантний тор системи (8), (9), до того ж $\|u^1(\phi)\| \le \dfrac{2KC_*^0}{\gamma}$. Переконаємося, що функція $u^1(\phi)$ задовольняє умову Ліпшиця.

При всіх $\{\phi,\bar\phi\}\subset\mathcal{T}_\infty$ справджується нерівність

$$\|u^1(\phi) - u^1(\bar\phi)\| \le I^1 + I^2,$$

де

$$I^1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0^1(\tau,\phi) - G_0^1(\tau,\bar\phi)\|\,\|c^0(\phi^1,\phi,\tau)\|d\tau,$$

$$I^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0^1(\tau,\bar\phi)\|\,\|c^0(\phi^1,\phi,\tau) - c^0(\phi^1,\bar\phi,\tau)\|d\tau.$$

Нескладно отримати наступні співвідношення:

$$I^1 \le K^2\xi_1^*\|\varphi-\bar\varphi\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{\exp\{-(\gamma-\alpha^1)|\tau|\}}{2\gamma-\alpha^1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\exp\{-(\gamma-\alpha^1)|\tau|\}}{\alpha^1} + \frac{\exp\{-\gamma|\tau|\}}{2\gamma-\alpha^1}\right\} d\tau = S_1\|\varphi-\bar\varphi\|,$$

де

$$\alpha^1 = \alpha(1+U^0), \quad S_1 = 2K^2\xi_1^*\,\frac{2\gamma^2+\alpha^1\gamma-{\alpha^1}^2}{\alpha^1\gamma(\gamma-\alpha^1)(2\gamma-\alpha^1)}.$$

Знайдемо аналогічну оцінку для інтеграла I^2. Неважко переконатися у правильності оцінок

$$\|c(\phi^1,\phi,t) - c(\phi^1,\bar\phi,t)\| \le \eta\exp\{\alpha^1|t|\}\exp\{\alpha^1\Delta^*\}\|\phi-\bar\phi\|,$$

$$\|P_2^0(\phi^1,\phi,t) - P_2^0(\phi^1,\bar\phi,t)\| \le [2\xi_1^* + \xi_2^*U^0(1+\exp\{\alpha^1 Q_*\})]\exp\{\alpha^1|t|\}\|\phi-\bar\phi\|,$$

$$\|P_2^0(\phi^1,\phi,t)u^0(\phi_t^1(\phi)) - P_2^0(\phi^1,\bar\phi,t)u^0(\phi_t^1(\bar\phi))\| \le$$

$$\le \left\{d[2\xi_1^* + \xi_2^*U^0(1+\exp\{\alpha^1 Q_*\})] + 2P^0U^0\right\}\exp\{\alpha^1|t|\}\|\phi-\bar\phi\|,$$

$$\|F^0(\phi^1,\phi,t)u^0(\phi^1,\phi,t+\Delta) - F^0(\phi^1,\bar\phi,t)u^0(\phi^1,\bar\phi,t+\Delta)\| \le$$

$$\le \|F^0(\phi^1,\phi,t) - F^0(\phi^1,\bar\phi,t)\|\,\|u^0(\phi^1,\phi,t+\Delta)\| +$$

$$+ \|F^0(\phi^1,\bar\phi,t)\|\|u^0(\phi^1,\phi,t+\Delta) - u^0(\phi^1,\bar\phi,t+\Delta)\| \le$$

$$\le \left\{d[\xi_1\zeta\exp\{\alpha^1\Theta^*\} + \xi_2U^0 + \xi_3U^0\exp\{\alpha^1\Theta_*\}] + \right.$$

$$\left. + F_0U^0\exp\{\alpha^1\Delta_*\}\right\}\exp\{\alpha^1|t|\}\|\phi-\bar\phi\|.$$

З них безпосередньо випливає нерівність

$$\|c^0(\phi^1,\phi,t) - c^0(\phi^1,\bar\phi,t)\| \le \Lambda^*\exp\{\alpha^1|t|\}\|\phi-\bar\phi\|,$$

де

$$\Lambda^* = \left\{d[2\xi_1^* + \xi_2^*U^0(1+\exp\{\alpha^1 Q_*\})] + 2P^0U^0 + \right.$$

$$+ d[\xi_1\zeta\exp\{\alpha^1\Theta^*\} + \xi_2U^0 + \xi_3U^0\exp\{\alpha^1\Theta_*\}] +$$

$$\left. + F_0U^0\exp\{\alpha^1\Delta_*\} + \eta\exp\{\alpha^1\Delta^*\}\right\},$$

що приводить до оцінки
$$I^2 \leq S_2\|\phi - \bar{\phi}\|,$$
в якій через S_2 позначено константу $\dfrac{2\Lambda^* K}{\gamma - \alpha^1} > 0.$

Таким чином, для будь-яких $\{\phi, \bar{\phi}\} \subset \mathcal{T}_\infty$ справджується нерівність

$$\|u^1(\phi) - u^1(\bar{\phi})\| \leq (S_1 + S_2)\|\phi - \bar{\phi}\|,$$

що завершує доведення леми, якщо число $S_1 + S_2$ позначити через U^1.

Запишемо формальну систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_t^k(\phi)}{dt} &= a(\phi_t^k(\phi), u^{k-1}(\phi_t^k(\phi))), \\ \frac{dx(t)}{dt} &= P(\phi_t^k(\phi))x(t) + c^{k-1}(\phi^k, \phi, t), \end{aligned} \tag{12}$$

в якій $\phi_t^k(\phi)$ — розв'язок першого рівняння системи (12), який задовольняє початкову умову $\phi_0^k(\phi) = \phi$;

$$\begin{aligned} c^{k-1}(\phi^k, \phi, t) = P_2^{k-1}(\phi^k, \phi, t)u^{k-1}(\phi_t^k(\phi)) + \\ + F^{k-1}(\phi^k, \phi, t)u^{k-1}(\phi^k, \phi, t + \Delta) + c(\phi^k, \phi, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2^{k-1}(\phi^k, \phi, t) &= P_2(\phi_t^k(\phi), u^{k-1}(\phi_t^k(\phi)), u^{k-1}(\phi^k, \phi, t + Q)), \\ F^{k-1}(\phi^k, \phi, t) &= F(v(\phi^k, t), u^{k-1}(\phi_t^k(\phi)), u^{k-1}(\phi^k, \phi, t + \Theta)), \end{aligned}$$

символи вигляду $u^{k-1}(\phi^k, \phi, t+\Delta)$, $c(\phi^k, \phi, t)$ вводяться аналогічно до символів $u^0(\phi^1, \phi, t+ +\Delta)$, $c(\phi^1, \phi, t)$; $G_t^k(\tau, \phi)$ — ФГС рівняння $\dfrac{dx(t)}{dt} = P(\phi_t^k(\phi))x(t)$.

Індуктивна лема 2. *Припустимо, що виконуються умови* $(\mathbf{V}^*)$, *ФГС* $G_t(\tau, \phi)$ *системи рівнянь (5) є грубою з індексом* ε, $2A < \varepsilon$ *і справджуються нерівності*

$$2K(2P^0 + F_0) < \gamma, \quad \frac{2KC^0}{\gamma - 2K(2P^0 + F_0)} \leq d.$$

Тоді для будь-якого $k \in N$ *рекурентна система рівнянь (12) визначає у просторі* $\mathfrak{M}$ *єдиний інваріантний тор* $\mathcal{T}^k$, *породжений функцією*

$$x = u^k(\phi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0^k(\tau, \phi)c^{k-1}(\phi^k, \phi, \tau)\, d\tau, \tag{13}$$

що задовольняє на торі $\mathcal{T}_\infty$ *умову Ліпшиця*

$$\|u^k(\phi) - u^k(\bar{\phi})\| \leq U^k\|\phi - \bar{\phi}\|$$

і обмежена за нормою сталою d, *при умові, що для будь-якого* $k \in N \bigcup \{0\}$ *виконується нерівність*

$$\gamma > \alpha(1 + U^k). \tag{14}$$

Доведення останньої леми при $k = 1$ безпосередньо випливає з леми 1. Залишається застосувати принцип повної математичної індукції, що не становить труднощів. Зауважимо лише, що необхідною умовою для виконання оцінки (14), яка є аналогом нерівності (10) на кожному кроці рекурентного процесу, є обмеженість числової множини $\{U^k\}$, тобто існування такого додатного числа U, що $U^k \leq U \; \forall k \in N \bigcup \{0\}$.

Очевидним прикладом грубої ФГС з довільним індексом є ФГС системи рівнянь вигляду (5), в якій матриця $P(\phi) = P_1(\phi, 0, 0)$ не залежить від ϕ, тобто є сталою матрицею $\mathbb{P}$, а матрицант Ω_τ^t рівняння $\dfrac{dx}{dt} = \mathbb{P}x$ задовольняє нерівність $\|\Omega_\tau^0\| \leq K \exp\{-\gamma|\tau|\}$ $\forall \tau \leq 0$. Тоді ФГС системи вигляду (6) не залежить від збурюючої функції $\bar{a}(\phi)$ і задовольняє нерівність (7). Такою, наприклад, є діагональна матриця $\mathbb{P} = \operatorname{diag}\{-1, -1, -1, \ldots\}$.

3. Основне твердження та наслідки з нього. Введемо формальне позначення

$$\Sigma^* = 2K \left\{ \frac{K\xi_1^*(2\gamma^2 + \alpha^*\gamma - {\alpha^*}^2)[d(2P^0 + F_0) + C^0]}{(2\gamma - \alpha^*)(\gamma - \alpha^*)\alpha^*\gamma} + \right.$$

$$\left. + \frac{d(\xi_2^* + \xi_3^* + \xi_2 + \xi_3) + 2P^0 + F_0}{\gamma} + \frac{2d\xi_1^* + d\xi_1\zeta \exp\{\alpha^*\Theta^*\} + \eta \exp\{\alpha^*\Delta^*\}}{\gamma - \alpha^*} \right\}$$

і наведемо достатні умови збіжності послідовності $\{u^k(\phi)\}_{k=1}^\infty$ до функції $u(\phi)$, що визначає інваріантний тор $\mathcal{T}$ системи рівнянь (1) або, що те саме, системи рівнянь (4).

Теорема. *Припустимо, що виконуються умови* $(\mathbf{V}^*)$, *існує груба з індексом* ε *ФГС* $G_t(\tau, \phi)$ *системи рівнянь (5) і справджуються нерівності*

$$2A < \varepsilon, \quad \Sigma^* < 1, \quad \frac{2KC^0}{\gamma - 2K(2P^0 + F_0)} \leq d,$$

$$U = \sup_{k \in N \bigcup \{0\}} U^k < \infty, \quad \gamma > \alpha^* = \alpha(1 + U).$$

Тоді послідовність $\{u^k(\phi)\}_{k=1}^\infty$ *рівномірно відносно* $\phi \in \mathcal{T}_\infty$ *збігається за нормою простору* $\mathfrak{M}$ *до функції* $u(\phi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$, *що визначає інваріантний тор* $\mathcal{T}$ *системи рівнянь (1) і задовольняє умову Ліпшиця відносно* ϕ *з коефіцієнтом* U.

Доведення. Зауважимо спочатку, що з нерівності $\Sigma^* < 1$ безпосередньо випливає оцінка $2K(2P^0 + F_0) < \gamma$, тобто виконуються всі умови індуктивної леми 2.

Ввівши позначення $\|u^k(\phi)\|_0 := \sup_{\phi \in \mathcal{T}_\infty} \|u^k(\phi)\|$, неважко переконатися у виконанні нерівності

$$\|\phi_t^k(\phi) - \phi_t^{k-1}(\phi)\| \leq \int\limits_0^{|t|} \left\{ \alpha^* \|\phi_\tau^k(\phi) - \phi_\tau^{k-1}(\phi)\| + \alpha^* \|u^{k-1}(\phi) - u^{k-2}(\phi)\|_0 \right\} d\tau.$$

Тоді $\|\phi_t^k(\phi) - \phi_t^{k-1}(\phi)\| \leq \Phi(t)$, де $\Phi(t)$ є розв'язком рівняння

$$\Phi(t) = \int\limits_0^{|t|} \left\{ \alpha^* \Phi(\tau) + \alpha^* \|u^{k-1}(\phi) - u^{k-2}(\phi)\|_0 \right\} d\tau,$$

який зображується рівністю

$$\Phi(t) = \|u^{k-1}(\phi) - u^{k-2}(\phi)\|_0 (\exp\{\alpha^* |t|\} - 1).$$

Звідси для будь-яких $\{i, j\} \subset N$ випливають оцінки

$$\|\phi_t^k(\phi) - \phi_t^{k-1}(\phi)\| \leq \|u^{k-1}(\phi) - u^{k-2}(\phi)\|_0 \exp\{\alpha^* |t|\},$$

$$|\phi^k_{j_{t+\Delta_{ij}}}(\phi) - \phi^{k-1}_{j_{t+\Delta_{ij}}}(\phi)| \leq \|u^{k-1}(\phi) - u^{k-2}(\phi)\|_0 \exp\{\alpha^* |t|\} \exp\{\alpha^* \Delta^*\},$$

що дозволяють записати нерівності

$$\|c(\phi^k, \phi, t) - c(\phi^{k-1}, \phi, t)\| \leq \eta \sup_{i \in N} \sup_{j \in N} \left\{ |\phi^k_{j_{t+\Delta_{ij}}}(\phi) - \phi^{k-1}_{j_{t+\Delta_{ij}}}(\phi)| \right\} \leq$$
$$\leq \eta \exp\{\alpha^* |t|\} \exp\{\alpha^* \Delta^*\} \|u^{k-1}(\phi) - u^{k-2}(\phi)\|_0,$$

$$\|P_2^{k-1}(\phi^k, \phi, t) u^{k-1}(\phi_t^k(\phi)) - P_2^{k-2}(\phi^{k-1}, \phi, t) u^{k-2}(\phi_t^{k-1}(\phi))\| \leq$$
$$\leq \|P_2^{k-1}(\phi^k, \phi, t) - P_2^{k-2}(\phi^{k-1}, \phi, t)\| \|u^{k-1}(\phi_t^k(\phi))\| +$$
$$+ \|P_2^{k-2}(\phi^{k-1}, \phi, t)\| \|u^{k-1}(\phi_t^k(\phi)) - u^{k-2}(\phi_t^{k-1}(\phi))\| \leq$$
$$\leq d \left\{ 2\xi_1^* \|\phi_t^k(\phi) - \phi_t^{k-1}(\phi)\| + \xi_2^* \|u^{k-1}(\phi_t^k(\phi)) - u^{k-2}(\phi_t^{k-1}(\phi))\| + \right.$$
$$\left. + \xi_3^* \|u^{k-1}(\phi^k_, \phi, t + Q) - u^{k-2}(\phi^{k-1}, \phi, t + Q)\| \right\} + 2P^0 \|u^{k-1}(\phi) - u^{k-2}(\phi)\|_0 \leq$$
$$\leq \left\{ d \left[2\xi_1^* \exp\{\alpha^* |t|\} + \xi_2^* + \xi_3^* \right] + 2P^0 \right\} \|u^{k-1}(\phi) - u^{k-2}(\phi)\|_0,$$

$$\|F^{k-1}(\phi^k, \phi, t) u^{k-1}(\phi^k, \phi, t + \Delta) - F^{k-2}(\phi^{k-1}, \phi, t) u^{k-2}(\phi^{k-1}, \phi, t + \Delta)\| \leq$$
$$\leq \|F^{k-1}(\phi^k, \phi, t) - F^{k-2}(\phi^{k-1}, \phi, t)\| \|u^{k-1}(\phi^k, \phi, t + \Delta)\| +$$
$$+ \|F^{k-2}(\phi^{k-1}, \phi, t)\| \|u^{k-1}(\phi^k, \phi, t + \Delta) - u^{k-2}(\phi^{k-1}, \phi, t + \Delta)\| \leq$$
$$\leq \{F_0 + d \left[\xi_1 \zeta \exp\{\alpha^* (\Theta^* + |t|)\} + \xi_2 + \xi_3 \right]\} \|u^{k-1}(\phi) - u^{k-2}(\phi)\|_0.$$

Останні оцінки приводять до нерівностей

$$\|c^{k-1}(\phi^k,\phi,t)-c^{k-2}(\phi^{k-1},\phi,t)\| \le$$
$$\le \|P_2^{k-1}(\phi^k,\phi,t)u^{k-1}(\phi_t^k(\phi))-P_2^{k-2}(\phi^{k-1},\phi,t)u^{k-2}(\phi_t^{k-1}(\phi))\|+$$
$$+\|F^{k-1}(\phi^k,\phi,t)u^{k-1}(\phi^k,\phi,t+\Delta)-F^{k-2}(\phi^{k-1},\phi,t)u^{k-2}(\phi^{k-1},\phi,t+\Delta)\|+$$
$$+\|c(\phi^k,\phi,t)-c(\phi^{k-1},\phi,t)\| \le \Sigma^0(t)\|u^{k-1}(\phi)-u^{k-2}(\phi)\|_0, \tag{15}$$

де

$$\Sigma^0(t) = d[2\xi_1^*\exp\{\alpha^*|t|\}+\xi_2^*+\xi_3^*]+2P^0+F_0+$$
$$+d[\xi_1\zeta\exp\{\alpha^*(\Theta^*+|t|)\}+\xi_2+\xi_3]+\eta\exp\{\alpha^*(\Delta^*+|t|)\}.$$

Оцінимо тепер за нормою різницю $L(t,\tau,\phi,k) = G_t^k(\tau,\phi)-G_t^{k-1}(\tau,\phi)$. Очевидно, що $L(t,\tau,\phi,k)$ є єдиним обмеженим розв'язком матричного рівняння

$$\frac{dL(t,\tau,\phi,k)}{dt} = P(\phi_t^k(\phi))L(t,\tau,\phi,k)+F^k(t,\tau,\phi),$$

де

$$F^k(t,\tau,\phi) = \left\{P(\phi_t^k(\phi))-P(\phi_t^{k-1}(\phi))\right\}G_t^{k-1}(\tau,\phi),$$

а тому справджуються рівності

$$L(t,\tau,\phi,k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_t^k(s,\phi)F^k(s,\tau,\phi)ds =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_t^k(s,\phi)\left\{P(\phi_s^k(\phi))-P(\phi_s^{k-1}(\phi))\right\}G_s^{k-1}(\tau,\phi)ds,$$

що приводять до наступних нерівностей:

$$\|L(0,\tau,\phi,k)\| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} K^2\exp\{-\gamma|s|-\gamma|s-\tau|\}\|P(\phi_s^k(\phi))-P(\phi_s^{k-1}(\phi))\|ds \le$$
$$\le \int\limits_{-\infty}^{\infty} K^2\xi_1^*\exp\{-\gamma|s|-\gamma|s-\tau|\}\|\phi_s^k(\phi)-\phi_s^{k-1}(\phi)\|ds \le$$
$$\le \int\limits_{-\infty}^{\infty} K^2\xi_1^*\exp\{-\gamma|s|-\gamma|s-\tau|+\alpha^*|s|\}\|u^{k-1}(\phi)-u^{k-2}(\phi)\|_0\,ds \le$$
$$\le \Sigma^1(\tau)\|u^{k-1}(\phi)-u^{k-2}(\phi)\|_0,$$

де

$$\Sigma^1(\tau) = \frac{K^2\xi_1^*}{2\gamma - \alpha^*}\left\{\frac{2\gamma}{\alpha}\exp\{-(\gamma-\alpha^*)|\tau|\} + \exp\{-\gamma|\tau|\}\right\}. \qquad (16)$$

Врахувавши рівність (13) та оцінки (15) і (16), одержимо ланцюжок нерівностей

$$\begin{aligned}
&\|u^k(\phi) - u^{k-1}(\phi)\| \le \\
&\le \left\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ G_0^k(\tau,\phi)c^{k-1}(\phi^k,\phi,\tau) - G_0^{k-1}(\tau,\phi)c^{k-2}(\phi^{k-1},\phi,\tau)\right\} d\tau \right\| \le \\
&\le \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0^k(\tau,\phi) - G_0^{k-1}(\tau,\phi)\|\|c^{k-1}(\phi^k,\phi,\tau)\|\, d\tau + \\
&+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0^{k-1}(\tau,\phi)\|\|c^{k-1}(\phi^k,\phi,\tau) - c^{k-2}(\phi^{k-1},\phi,\tau)\| d\tau \le \\
&\le \{(2P^0 + F_0)d + C^0\}\|u^{k-1}(\phi) - u^{k-2}(\phi)\|_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Sigma^1(\tau)d\tau + \\
&+ K\|u^{k-1}(\phi) - u^{k-2}(\phi)\|_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\gamma|\tau|\}\Sigma^0(\tau)d\tau \le \\
&\le \Sigma^*\|u^{k-1}(\phi) - u^{k-2}(\phi)\|_0.
\end{aligned}$$

Індуктивна оцінка

$$\|u^k(\phi) - u^{k-1}(\phi)\|_0 \le \Sigma^*\|u^{k-1}(\phi) - u^{k-2}(\phi)\|_0$$

при $\Sigma^* < 1$ означає, що послідовність $\{u^k(\phi)\}_{k=0}^{\infty}$ є фундаментальною у повному метричному просторі $\mathfrak{M}$. Отже, ця послідовність рівномірно відносно $\phi \in \mathcal{T}_\infty$ збігається за нормою простору $\mathfrak{M}$ до неперервної на $\mathcal{T}_\infty$ функції $u(\phi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$. Залишилося показати, що ця функція визначає інваріантний тор рівняння (1).

Нехай $\sigma = [-T_\sigma; T_\sigma]$ — будь-який сегмент скінченної довжини і $\sigma_\Delta = [-T_\sigma - \Delta^*; T_\sigma + +\Delta^*]$. Тоді для всіх $t \in \sigma_\Delta$, $k \in N$ виконується нерівність

$$\|\phi_t^{k+1}(\phi) - \phi_t^k(\phi)\| \le \|u^k(\phi) - u^{k-1}(\phi)\|_0 \exp\{\alpha^*(T_\sigma + \Delta^*)\},$$

до того ж $\|u^k(\phi) - u^{k-1}(\phi)\|_0 \to 0$ при $k \to \infty$. Це означає, що послідовність $\{\phi_t^k(\phi)\}_{k=1}^{\infty}$ теж є фундаментальною у просторі $\mathfrak{M}$, а тому рівномірно відносно $\phi \in \mathcal{T}_\infty$ та $t \in \sigma_\Delta$ збігається за нормою простору $\mathfrak{M}$ до функції $\phi_t(\phi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$ такої, що $\phi_0(\phi) = \phi$.

При всіх $k \in N, \phi \in \mathcal{T}_\infty, t \in R^1$ справджуються рівності

$$\frac{d\phi_t^k(\phi)}{dt} = a(\phi_t^k(\phi), u^{k-1}(\phi_t^k(\phi))), \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\frac{du^k(\phi_t^k(\phi))}{dt} &= P(\phi_t^k(\phi))u^k(\phi_t^k(\phi))+ \\ &+ P_2(\phi_t^k(\phi), u^{k-1}(\phi_t^k(\phi)), u^{k-1}(\phi^k, \phi, t+Q)u^{k-1}(\phi_t^k(\phi))+ \\ &+ F(v(\phi^k, t), u^{k-1}(\phi_t^k(\phi)), u^{k-1}(\phi^k, \phi, t+\Theta))u^{k-1}(\phi^k, \phi, t+\Delta) + c(\phi^k, \phi, t).\end{aligned} \tag{18}$$

З нерівності

$$\begin{aligned}&\|a(\phi_t(\phi), u(\phi_t(\phi))) - a(\phi_t^k(\phi), u^{k-1}(\phi_t^k(\phi)))\| \le \\ &\le \alpha\{\|\phi_t(\phi) - \phi_t^k(\phi)\| + \|u^{k-1}(\phi_t^k(\phi)) - u^{k-1}(\phi_t(\phi))\| + \|u^{k-1}(\phi_t(\phi)) - u(\phi_t(\phi))\|\}\end{aligned}$$

випливає, що рівномірно відносно $\phi \in \mathcal{T}_\infty$ та $t \in \sigma$

$$a(\phi_t^k(\phi), u^{k-1}(\phi_t^k(\phi)) \to a(\phi_t(\phi), u(\phi_t(\phi)))$$

при $k \to \infty$. Це дає можливість у рівності (17) перейти до границі в покоординатному сенсі при $k \to \infty$ і одержати рівність (3) для всіх $t \in R^1$.

Покажемо тепер, що справджується рівність (2). Оскільки

$$\|c(\phi, t) - c(\phi^k, \phi, t)\| \le \eta \sup_{i \in N} \sup_{j \in N} \left\{ |\phi_{j_{t+\Delta_{ij}}}(\phi) - \phi^k_{j_{t+\Delta_{ij}}}(\phi)| \right\},$$

а

$$|\phi_{j_{t+\Delta_{ij}}}(\phi) - \phi^k_{j_{t+\Delta_{ij}}}(\phi)| \to 0$$

при $k \to \infty$ рівномірно відносно $t \in \sigma$, $\phi \in \mathcal{T}_\infty$ та $\{i, j\} \subset N$, то послідовність $\{c(\phi^k, \phi, t)\}_{k=1}^\infty$ рівномірно відносно $\phi \in \mathcal{T}_\infty$ та $t \in \sigma$ збігається при $k \to \infty$ за нормою простору $\mathfrak{M}$ до функції $c(\phi, t)$.

Позначивши матрицю P_2 через $[p_{sj}^2]_{s,j=1}^\infty$, рівність (18) запишемо у покоординатному вигляді

$$\begin{aligned}\frac{du_s^k(\phi_t^k(\phi))}{dt} &= \sum_{j=1}^\infty \Big\{ p_{sj}(\phi_t^k(\phi))u_j^k(\phi_t^k(\phi)) + \\ &+ p_{sj}^2(\phi_t^k(\phi), u^{k-1}(\phi_t^k(\phi)), u^{k-1}(\phi^k, \phi, t+Q))u_j^{k-1}(\phi_t^k(\phi))+ \\ &+ f_{sj}(v(\phi^k, t), u^{k-1}(\phi_t^k(\phi)), u^{k-1}(\phi^k, \phi, t+\Theta))u_j^{k-1}(\phi^k, \phi, t+\Delta) \Big\} + c_s(\phi^k, \phi, t).\end{aligned}$$

Очевидно, що для будь-якого $s \in N$ ряди, що знаходяться у правих частинах останніх рівностей, збігаються рівномірно відносно $k,\, t \in R^1$ та $\phi \in \mathcal{T}_\infty$, оскільки вони мажоруються збіжним числовим рядом

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ 2 \sup_{\phi \in \mathcal{T}_\infty} |p_{sj}(\phi)| + \sup_{(\phi,x,\chi) \in D_*} |p^1_{sj}(\phi,x,\chi)| + \sup_{(v,x,\chi) \in D^*} |f_{sj}(v,x,\chi)| \right\} d.$$

Це дає можливість у рівності (18) перейти у покоординатному сенсі до границі при $k \to \infty$ і будь-якому $t \in \sigma$ одержати рівність (2). Отже, ця рівність справджується при будь-якому $t \in R^1$. При умовах теореми ліпшицевість функції $u(\phi)$ є очевидною.

Теорему доведено.

Наслідок 1. *Неоднозначність вибору функції $u^0(\phi)$ при побудові ітераційного процесу не приводить до зміни функції $u(\phi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$, що визначає інваріантний тор $\mathcal{T}$ системи рівнянь (1).*

Доведення. Замість $u^0(\phi)$ виберемо іншу початкову функцію $\bar{u}^0(\phi)$ з аналогічними властивостями і розглянемо рекурентну послідовність

$$\bar{u}^k(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}_0^k(\tau,\phi)\bar{c}^{k-1}(\bar{\phi}^k,\phi,\tau)d\tau, \quad k \in N, \tag{19}$$

де $\bar{G}_0^k(\tau,\phi)$ — ФГС рівняння $\dfrac{dx(t)}{dt} = P(\bar{\phi}_t^k(\phi))x(t)$, $\bar{\phi}_t^k(\phi)$ — розв'язок рівняння

$$\frac{d\bar{\phi}_t^k(\phi)}{dt} = a(\bar{\phi}_t^k(\phi), \bar{u}^{k-1}(\bar{\phi}_t^k(\phi))),$$

який задовольняє початкову умову $\bar{\phi}_0^k(\phi) = \phi$;

$$\bar{c}^{k-1}(\bar{\phi}^k,\phi,t) = P_2^{k-1}(\bar{\phi}^k,\phi,t)\bar{u}^{k-1}(\bar{\phi}_t^k(\phi)) + \\ + F^{k-1}(\bar{\phi}^k,\phi,t)\bar{u}^{k-1}(\bar{\phi}^k,\phi,t+\Delta) + c(\bar{\phi}^k,\phi,t),$$

$$P_2^{k-1}(\bar{\phi}^k,\phi,t) = P_2(\bar{\phi}_t^k(\phi), \bar{u}^{k-1}(\bar{\phi}_t^k(\phi)), \bar{u}^{k-1}(\bar{\phi}^k,\phi,t+Q)),$$
$$F^{k-1}(\bar{\phi}^k,\phi,t) = F(v(\bar{\phi}^k,t), \bar{u}^{k-1}(\bar{\phi}_t^k(\phi)), \bar{u}^{k-1}(\bar{\phi}^k,\phi,t+\Theta));$$

символи вигляду $\bar{u}^{k-1}(\bar{\phi}^k,\phi,t+\Delta)$, $c(\bar{\phi}^k,\phi,t)$ вводяться аналогічно до символів $u^{k-1}(\phi^k,\phi,t+\Delta)$, $c(\phi^k,\phi,t)$.

Врахувавши рівності (13) та (19), легко одержати оцінку

$$\|u^k(\phi) - \bar{u}^k(\phi)\| \le \int_{-\infty}^{\infty} \|G_0^k(\tau,\phi) - \bar{G}_0^k(\tau,\phi)\| \, \|c^{k-1}(\phi^k,\phi,\tau)\| d\tau + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \|\bar{G}_0^k(\tau,\phi)\| \, \|c^{k-1}(\phi^k,\phi,\tau) - \bar{c}^{k-1}(\bar{\phi}^k,\phi,\tau)\| d\tau. \tag{20}$$

Неважко також переконатись у виконанні нерівності

$$\|\phi_t^k(\phi) - \bar{\phi}_t^k(\phi)\| \le \int\limits_0^{|t|} \left\{ \alpha^* \|\phi_\tau^k(\phi) - \bar{\phi}_\tau^k(\phi)\| + \alpha^* \|u^{k-1}(\phi) - \bar{u}^{k-1}(\phi)\|_0 \right\} d\tau,$$

з якої при будь-яких $\{i,j\} \subset N$ випливають оцінки

$$\|\phi_t^k(\phi) - \bar{\phi}_t^k(\phi)\| \le \|u^{k-1}(\phi) - \bar{u}^{k-1}(\phi)\|_0 \exp\{\alpha^*|t|\},$$

$$|\phi_{j_{t+\Delta_{ij}}}^k(\phi) - \bar{\phi}_{j_{t+\Delta_{ij}}}^k(\phi)| \le \|u^{k-1}(\phi) - \bar{u}^{k-1}(\phi)\|_0 \exp\{\alpha^*|t|\} \exp\{\alpha^*\Delta^*\}.$$

Далі застосуємо методику доведення теореми. Оцінимо спочатку за нормою різницю $\bar{L}(t,\tau,\phi,k) = G_t^k(\tau,\phi) - \bar{G}_t^k(\tau,\phi)$, використавши рівність

$$\bar{L}(t,\tau,\phi,k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_t^k(s,\phi) \left\{ P(\phi_s^k(\phi)) - P(\bar{\phi}_s^k(\phi)) \right\} \bar{G}_s^k(\tau,\phi)\, ds,$$

що приводить до наступних нерівностей:

$$\|\bar{L}(0,\tau,\phi,k)\| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} K^2 \exp\{-\gamma|s| - \gamma|s-\tau|\} \|P(\phi_s^k(\phi)) - P(\bar{\phi}_s^k(\phi))\| ds \le$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{\infty} K^2 \xi_1^* \exp\{-\gamma|s| - \gamma|s-\tau|\} \|\phi_s^k(\phi) - \bar{\phi}_s^k(\phi)\| ds \le$$

$$\le \Sigma^1(\tau) \|u^{k-1}(\phi) - \bar{u}^{k-1}(\phi)\|_0, \tag{21}$$

де множник $\Sigma^1(\tau)$ визначений рівністю (16).

Неважко переконатися також у правильності оцінок

$$\|c(\phi^k,\phi,t) - c(\bar{\phi}^k,\phi,t)\| \le \eta \exp\{\alpha^*|t|\} \exp\{\alpha^*\Delta^*\} \|u^{k-1}(\phi) - \bar{u}^{k-1}(\phi)\|_0,$$

$$\|P_2^{k-1}(\phi^k,\phi,t) u^{k-1}(\phi_t^k(\phi)) - P_2^{k-1}(\bar{\phi}^k,\phi,t) \bar{u}^{k-1}(\bar{\phi}_t^k(\phi))\| \le$$

$$\le \left\{ d\,[2\xi_1^* \exp\{\alpha^*|t|\} + \xi_2^* + \xi_3^*] + 2P^0 \right\} \|u^{k-1}(\phi) - \bar{u}^{k-1}(\phi)\|_0,$$

$$\|F^{k-1}(\phi^k,\phi,t) u^{k-1}(\phi^k,\phi,t+\Delta) - F^{k-1}(\bar{\phi}^k,\phi,t) \bar{u}^{k-1}(\bar{\phi}^k,\phi,t+\Delta)\| \le$$

$$\le \{F_0 + d\,[\xi_1 \zeta \exp\{\alpha^*(\Theta^* + |t|)\} + \xi_2 + \xi_3]\} \|u^{k-1}(\phi) - \bar{u}^{k-1}(\phi)\|_0,$$

що приводять до нерівності

$$\|c^{k-1}(\phi^k,\phi,t) - \bar{c}^{k-1}(\bar{\phi}^k,\phi,t)\| \le \Sigma^0(t) \|u^{k-1}(\phi) - \bar{u}^{k-1}(\phi)\|_0, \tag{22}$$

де $\Sigma^0(t)$ — та ж сама функція, що і у співвідношеннях (15). Співвідношення (20) – (22) у свою чергу приводять до індуктивної оцінки

$$\|u^k(\phi) - \bar{u}^k(\phi)\| \leq \Sigma^* \|u^{k-1}(\phi) - \bar{u}^{k-1}(\phi)\|_0,$$

з якої при $\Sigma^* < 1$ випливає рівність

$$\lim_{k\to\infty} \|u^k(\phi) - \bar{u}^k(\phi)\| = 0,$$

що завершує доведення.

Зауваження. У формулюванні теореми не наведено коефіцієнтних умов виконання нерівності (14) при будь-якому $k \in N$ і достатніх умов грубості ФГС системи рівнянь (5). Це потребує додаткових нетривіальних досліджень.

Тут ми розглянемо другий важливий наслідок з теореми, який демонструє клас нелінійних систем вигляду (1), для існування інваріантних торів яких можна не вимагати виконання вказаних у зауваженні умов. Покладемо

$$\|P_1\|_0 = \|P_1(\phi, x, \chi)\|_0 = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{(\phi,x,\chi)\in D_{**}} |p^1_{ij}(\phi, x, \chi)|,$$

$$b = [\xi_2^* + \xi_3^* \exp\{Q_*\} + \xi_2 + \xi_3 \exp\{\Theta_*\}]d + \|P_1 + E\|_0 + F_0 \exp\{\Delta_*\} - (1-\alpha),$$

$$c = d[\xi_1^* + \xi_1 \zeta \exp\{\Theta^*\}] + \eta \exp\{\Delta^*\}$$

і систему рівнянь (1) запишемо у вигляді

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = a(\phi(t), x(t)),$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Ex(t) + P_2(\phi_t(\phi), x(t), x(t+Q))x(t) +$$
$$+ F(v(\phi,t), x(t), x(t+\Theta))x(t+\Delta) + c(\phi,t),$$

де

$$P_2(\phi_t(\phi), x(t), x(t+Q)) = P_1(\phi_t(\phi), x(t), x(t+Q)) + E.$$

Покладемо $\mathfrak{u}^0(\phi) := u^0(\phi)$ і запишемо рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Ex(t) + \mathfrak{c}^0(\phi^1, \phi, t), \tag{23}$$

в якому, як і раніше,

$$\mathfrak{c}^0(\phi^1, \phi, t) = P_2^0(\phi, \phi^1, \phi, t)u^0(\phi_t^1(\phi)) +$$
$$+ F^0(\phi^1, \phi, t)u^0(\phi^1, \phi, t+\Delta) + c(\phi^1, \phi, t).$$

Якщо виконуються умови $(\mathbf{V}^*)$ і справджуються нерівності

$$1 - \|P_1 + E\|_0 - F_0 > 0, \quad \frac{C^0}{1 - \|P_1 + E\|_0 - F_0} \leq d,$$

то, нескладно переконатися в існуванні інваріантного тора $\mathfrak{T}^1$ системи рівнянь (8), (23) при умові, що

$$1 > \alpha(1 + \mathfrak{U}^0), \quad \mathfrak{U}^0 := U^0. \tag{24}$$

Цей тор породжений функцією

$$\mathfrak{u}^1(\phi) = \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0 \mathfrak{c}^0(\phi^1, \phi, \tau) d\tau,$$

де Ω_τ^t — матрицант рівняння $\dfrac{dx}{dt} = -Ex$, причому ця функція задовольняє відносно ϕ на торі $\mathcal{T}_\infty$ умову Ліпшиця з коефіцієнтом $\mathfrak{U}^1$ і $\|\mathfrak{u}^1(\phi)\| \leq d$.

Підберемо константу $\mathfrak{U}^0$ так, щоб виконувалися нерівність (24) та оцінка $\mathfrak{U}^1 \leq \mathfrak{U}^0$. Внісши несуттєві зміни у доведення леми 1, виберемо за $\mathfrak{U}^1$ вираз

$$f(\mathfrak{U}^0) := \frac{1}{1 - \alpha(1 + \mathfrak{U}^0)} \{ d[\xi_1^* + \mathfrak{U}^0(\xi_2^* + \xi_3^* \exp\{Q_*\})] + \|P_1 + E\|_0 \mathfrak{U}^0 +$$
$$+ d[\xi_1 \zeta \exp\{\Theta^*\} + \xi_2 \mathfrak{U}^0 + \xi_3 \mathfrak{U}^0 \exp\{\Theta_*\}] + F_0 \mathfrak{U}^0 \exp\{\Delta_*\} + \eta \exp\{\Delta^*\}\}$$

і розв'яжемо нерівність $f(\mathfrak{U}^0) \leq \mathfrak{U}^0$, яка має вигляд

$$\alpha(\mathfrak{U}^0)^2 + b\mathfrak{U}^0 + c \leq 0. \tag{25}$$

Очевидно, що при умовах $b < 0$, $b^2 - 4\alpha c > 0$ рівняння $\alpha(\mathfrak{U}^0)^2 + b\mathfrak{U}^0 + c = 0$ має два дійсних корені $u^- < u^+$, до того ж $0 < u^+$. З нерівності (24) випливає, що $\alpha < 1$. Якщо $\dfrac{1-\alpha}{\alpha} > u^-$, то шукана константа існує і за неї можна вибрати будь-який додатний розв'язок нерівності (25), який задовольняє нерівність

$$\mathfrak{U}^0 < \frac{1-\alpha}{\alpha}. \tag{26}$$

Якщо $\dfrac{1-\alpha}{\alpha} \leq u^-$, то потрібна константи не існує.

Запишемо тепер аналог індуктивної системи (12):

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_t^k(\phi)}{dt} &= a(\phi_t^k(\phi), \mathfrak{u}^{k-1}(\phi_t^k(\phi))), \\ \frac{dx(t)}{dt} &= -Ex(t) + \mathfrak{c}^{k-1}(\phi^k, \phi, t), \quad k \in N, \end{aligned} \tag{27}$$

в якій

$$\mathfrak{c}^{k-1}(\phi^k, \phi, t) = P_2^{k-1}(\phi^k, \phi, t)\mathfrak{u}^{k-1}(\phi_t^k(\phi)) + \\ + F^{k-1}(\phi^k, \phi, t)\mathfrak{u}^{k-1}(\phi^k, \phi, t + \Delta) + c(\phi^k, \phi, t),$$

$$P_2^{k-1}(\phi^k, \phi, t) = P_2(\phi_t^k(\phi), \mathfrak{u}^{k-1}(\phi_t^k(\phi)), \mathfrak{u}^{k-1}(\phi^k, \phi, t + Q)),$$
$$F^{k-1}(\phi^k, \phi, t) = F(v(\phi^k, t), \mathfrak{u}^{k-1}(\phi_t^k(\phi)), \mathfrak{u}^{k-1}(\phi^k, \phi, t + \Theta)).$$

Індуктивні міркування приводять до висновку, що при виконанні оцінок $b < 0$, $b^2 - -4\alpha c > 0$ та $\dfrac{1-\alpha}{\alpha} > u^- \ \forall k \in N$ рекурентна система рівнянь (27) визначає у просторі $\mathfrak{M}$ інваріантний тор $\mathfrak{T}^k$, породжений функцією

$$x = \mathfrak{u}^k(\phi) = \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0 \mathfrak{c}^{k-1}(\phi^k, \phi, \tau) d\tau,$$

що задовольняє на торі $\mathcal{T}_\infty$ умову Ліпшиця з коефіцієнтом $\mathfrak{U}^0$ і обмежена за нормою сталою d.

Введемо позначення

$$\Sigma^{**} = d(\xi_2^* + \xi_3^* + \xi_2 + \xi_3) + \|P_1 + E\|_0 + F_0 + \frac{d\xi_1^* + d\xi_1\zeta\exp\{\Theta^*\} + \eta\exp\{\Delta^*\}}{1 - \alpha(1 + \mathfrak{U}^0)}$$

і сформулюємо наступне твердження.

Наслідок 2. *Припустимо, що виконуються умови* $(\mathbf{V}^*)$ *і справджуються нерівності*

$$1 - \|P_1 + E\|_0 - F_0 > 0, \quad \frac{C^0}{1 - \|P_1 + E\|_0 - F_0} \le d,$$

$$b < 0, \quad b^2 - 4\alpha c > 0, \quad \frac{1-\alpha}{\alpha} > u^-.$$

Тоді система нерівностей (25), (26) має розв'язок $\mathfrak{U}^0$. *Якщо при цьому* $\Sigma^{**} < 1$, *то система рівнянь (1) має інваріантний тор, породжений функцією* $\mathfrak{u}(\phi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$, *що задовольняє умову Ліпшиця відносно* ϕ *з коефіцієнтом* $\mathfrak{U}^0$.

Доведення. Збіжність послідовності $\{\mathfrak{u}^k(\phi)\}_{k=0}^{\infty}$ до функції $\mathfrak{u}(\phi)$, яка визначає інваріантний тор системи рівнянь (1), доводиться так само, як і в теоремі, з незначними змінами. Зрозуміло, що ця функція задовольняє на торі $\mathcal{T}_\infty$ умову Ліпшиця з коефіцієнтом $\mathfrak{U}^0$. При цьому має місце індуктивна нерівність

$$\|\mathfrak{u}^k(\phi) - \mathfrak{u}^{k-1}(\phi)\|_0 \le \Sigma^{**}\|\mathfrak{u}^{k-1}(\phi) - \mathfrak{u}^{k-2}(\phi)\|_0.$$

У наступному прикладі розглянемо систему рівнянь виляду (12.1) з [1], що є частковим випадком нелінійної системи (1), яка не містить відхилень аргументу. Цей приклад покаже несуперечливість умов доведених вище теореми та наслідку 2, а також продемонструє можливість практичного застосування цього наслідку в цілому класі задач.

4. Приклад. Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \frac{1}{16}\,\mathrm{trig}\,(\phi_i + \phi_{i+1} + x_i),$$

$$\frac{dx}{dt} = P(\phi, x)x + \frac{1}{64}\,c(\phi), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{28}$$

де $c(\phi) = \{\mathrm{trig}\,(\phi_1 + \phi_2), \mathrm{trig}\,(\phi_2 + \phi_3), \ldots\}$,

$$P(\phi, x) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{\mathrm{trig}\,(\phi_{12}+x_1+x_2)}{4} & \frac{\mathrm{trig}\,(\phi_{13}+x_1+x_3)}{8} & \frac{\mathrm{trig}\,(\phi_{14}+x_1+x_4)}{16} & \ldots \\ \frac{\mathrm{trig}\,(\phi_{21}+x_2+x_1)}{4} & -1 & \frac{\mathrm{trig}\,(\phi_{23}+x_2+x_3)}{8} & \frac{\mathrm{trig}\,(\phi_{24}+x_2+x_4)}{16} & \ldots \\ \frac{\mathrm{trig}\,(\phi_{31}+x_3+x_1)}{4} & \frac{\mathrm{trig}\,(\phi_{32}+x_3+x_2)}{8} & -1 & \frac{\mathrm{trig}\,(\phi_{34}+x_3+x_4)}{16} & \ldots \\ \frac{\mathrm{trig}\,(\phi_{41}+x_4+x_1)}{4} & \frac{\mathrm{trig}\,(\phi_{42}+x_4+x_2)}{8} & \frac{\mathrm{trig}\,(\phi_{43}+x_4+x_3)}{16} & -1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

символом trig позначено функції синус або косинус, а символом ϕ_{sl}, $\{s, l\} \subset N$, — будь-яку координату ϕ_i вектора ϕ.

Очевидно, що будь-яких $x \in \mathfrak{M}$ і $\phi \in \mathcal{T}_\infty$ $\|P(\phi, x) + E\|_0 = \frac{1}{2}$, $\|P(\phi, x)\| \le \frac{3}{2}$, $C^0 = \frac{1}{64}$, $\eta = \frac{1}{32}$, $\alpha = \frac{1}{8}$, $\xi_1^* = \frac{1}{2}$, $\xi_2^* = 1$, до того ж стосовно системи рівнянь (28) виконуються всі умови ($\mathbf{V}^*$). Інші умови наслідку 2 також виконуються, якщо покласти, наприклад, $d = \frac{1}{32}$. Дійсно,

$$\frac{C^0}{1 - \|P_1 + E\|_0 - F_0} = \frac{\frac{1}{64}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{32} \le d = \frac{1}{32},$$

$$b = \frac{1}{32} + \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{8}\right) = -\frac{11}{32} < 0, \quad c = \frac{1}{64} + \frac{1}{32} = \frac{3}{64},$$

$$b^2 - 4\alpha c = \frac{121}{32^2} - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{64} = \frac{97}{32^2} > 0$$

і рівняння

$$\frac{1}{8}z^2 - \frac{11}{32}z + \frac{3}{64} = 0$$

має додатні корені

$$u^- = \frac{11 - \sqrt{97}}{8}, \quad u^+ = \frac{11 + \sqrt{97}}{8},$$

до того ж виконується нерівність (26), оскільки

$$\frac{1 - \frac{1}{8}}{\frac{1}{8}} = 7 > \frac{11 - \sqrt{97}}{8} = u^-.$$

І, нарешті, поклавши $\mathfrak{U}^0_{***} = 2$, одержимо нерівність

$$\Sigma^{**} = \frac{1}{32} + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{8}(1-2)} = \frac{157}{288} < 1,$$

тобто система (28) має інваріантний тор, причому породжуюча його функція задовольняє оцінку $\|\mathfrak{u}(\phi)\| \leq \frac{1}{32}$ і є ліпшицевою з коефіцієнтом 2. Зауважимо, що при фіксованих вище сталих $C^0, \eta, \alpha, \xi^*_1, \xi^*_2$ значення $d = \frac{1}{32}$ є мінімальним з можливих. Очевидно також, що при побудові інваріантного тора системи (28) за початкове наближення породжуючої його функції можна взяти або $0 \in \mathfrak{M}$, або будь-яку 2π-періодичну відносно кожної координати ϕ_i, $i \in N$, функцію $u^0(\phi)$, яка задовольняє на торі $\mathcal{T}_\infty$ умову Ліпшиця з коефіцієнтом 2 і обмежена за нормою числом $\frac{1}{32}$.

1. *Samoilenko A. M., Teplinskiy Yu. V.* Countable systems of differential equations. — Utrecht; Boston:VSP, 2003. — 287 p.
2. *Самойленко А. М., Теплінський Ю. В.* Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь у банахових просторах. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2008. — 496 с.
3. *Самойленко А. М., Теплінський Ю. В., Пасюк К. В.* Про існування інваріантних торів лінійних і квазілінійних зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь, визначених на нескінченновимірних торах // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 3. — С. 347 – 367.
4. *Пасюк К. В.* Про існування ліпшицевих інваріантних торів зліченних лінійних систем диференціально-різницевих рівнянь, що містять нескінченну кількість відхилень скалярного аргументу // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2008. — Вип. 421. — С. 75 – 79.
5. *Теплінський Ю. В., Пасюк К. В.* Про існування інваріантних торів зліченних лінійних систем диференціально-різницевих рівнянь // Там же. — 2009. — Вип. 454. — С. 108 – 115.
6. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. — Киев: Наук. думка, 1990. — 270 с.

Одержано 27.08.09